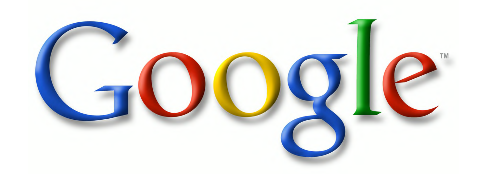


BIBLIOGRAPHIC RECORD TARGET

ACD4271
UL FMT S RT a BL s T/C DT 07/18/88 R/DT 02/03/89 CC STAT mm E/L 1
035/1: : |a (RLIN)MIUG24935-S
035/2: : |a (CaOTULAS)160242852
040: : |a WMaUCS |c WMaUCS |d MUL |d MiU
245:00: |a Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen.
260: : |a Leipzig, |b B. G. Teubner, |c 1900-13.
300/1: : |a 21 v. |b ill., plates, ports. |c 24 cm.
362/1:0 : |a 10.-30. Heft.
515/1: : |a Vol. 16, pt. 2 never published?
580/2: : |a Vol. 10 published as a supplement to Zeitschrift für Mathematik und Physik.
650/1: 0: |a Mathematics |x Periodicals
650/2: 0: |a Mathematics |x History.
730/1:0 : |a Zeitschrift für Mathematik und Physik.
772/1:1 : |t Zeitschrift fur Mathematik und Physik
780/1:00: |t Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik |g 1.-9. Heft, 1877-99
998/1: : |c sc3 2/3/89

ABHANDLUNGEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN
WISSENSCHAFTEN MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN
BEGRÜNDET VON MORITZ CANTOR · HEFT XXVI.1

DIE PROBLEME VON HANSEN UND SNELLIUS

VON

DR. ING. A. HAERPFER
IN PRAG

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1910



Ahrens, Dr. **W.,** in Magdeburg, mathematische Unterhaltungen und Spiele. 2., vermehrte und verbesserte Auflage. In 2 Bänden. gr. 8. In Leinwand geb. I. Band. Mit 200 Figuren. [IX u. 400 S.] 1910. n. ℳ 7.50. [II. Band in Vorbereitung.]

——— Kleine Ausgabe: Mathematische Spiele. Mit einem Titelbild und 69 Figuren. [VI u. 118 S.] 8. 1907. Geh. n. ℳ 1.—, in Leinwand geb. n. ℳ 1.25.

——— Scherz und Ernst in der Mathematik. Geflügelte und ungeflügelte Worte. [X u. 522 S.] gr. 8. 1904. In Leinwand geb. n. ℳ 8.—

v. Braunmühl, Dr. **A.,** weil. Professor an der Kgl. Technischen Hochschule zu München, Vorlesungen über die Geschichte der Trigonometrie. 2 Teile gr. 8. Geh. n. ℳ 19.—, in Leinwand geb. n. ℳ 21.—.

I. Teil: Von den ältesten Zeiten bis zur Erfindung der Logarithmen. Mit 62 Figuren im Text. [VII u. 260 S.] 1900. Geh. n. ℳ 9.—, in Leinwand geb. n. ℳ 10.—
II. Teil: Von der Erfindung der Logarithmen bis auf die Gegenwart. Mit 39 Figuren im Text. [XI u. 264 S.] 1903. Geh. n. ℳ 10.—, in Leinwand geb. n. ℳ 11.—

Cantor, Geheimer Hofrat Dr. **M.,** Professor an der Universität Heidelberg, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. In 4 Bänden.

I. Band. Von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 n. Chr. 3. Auflage. Mit 114 Figuren im Text und 1 lithogr. Tafel. [VI u. 941 S.] gr. 8. 1907. Geh. n. ℳ 24.—, in Halbfranz geb. n. ℳ 26.—
II. — Vom Jahre 1200 bis zum Jahre 1668. 2. verbesserte und vermehrte Auflage. In 2 Abteilungen. Mit 190 Figuren im Text. [X u. 943 S.] gr. 8. 1900. Geh. n. ℳ 26.— in Halbfranz geb. n. ℳ 28.—
III. — Vom Jahre 1668 bis zum Jahre 1758. 2. verbesserte und vermehrte Auflage. In 3 Abteilungen. Mit 146 Fig. im Text. [X u. 923 S.] gr. 8. 1901. Geh. n. ℳ 25.— in Halbfranz geb. n. ℳ 27.—
IV. — Von 1759 bis 1799. Bearbeitet von V. Bobynin, A. von Braunmühl, F. Cajori, M. Cantor, S. Günther, V. Kommerell, G. Loria, E. Netto, G. Vivanti und C. R. Wallner. Mit 100 Figuren im Text. [VI u. 1113 S.] gr. 8. 1908. Geh. n. ℳ 32.—, in Halbfranz geb. n. ℳ 35.—

Curtze, M., Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance. A. u. d. Titel: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. XII. u. XIII. Heft.

I. Teil: [X u. 336 S.] gr. 8. 1902. Geh. n. ℳ 16.—
II. Teil: [IV u. 291 S.] gr. 8. 1902. Geh. n. ℳ 14.—

Diophantus, des, von **Alexandria** Arithmetik und die Schrift über Polygonalzahlen. Übersetzt und mit Anmerkungen begleitet von G. Wertheim. [X u. 346 S.] gr. 8. 1890. Geh. n. ℳ 8.—

Engel, Dr. **Fr.,** Professor an der Universität Greifswald, und Dr. **P. Stäckel,** Professor an der Königl. Technischen Hochschule zu Karlsruhe, Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie. Mit vielen Figuren. In zwei Bänden. gr. 8.

I. Band: **Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij,** zwei geometrische Abhandlungen, aus dem Russischen übersetzt, mit Anmerkungen und mit einer Biographie des Verfassers von Friedr. Engel. I. Teil: Die Übersetzung. Mit einem Bildnisse Lobatschefskijs und 194 Figuren. II. Teil: Anmerkungen. Lobatschefskijs Leben und Schriften. Register. Mit 67 Figuren. [XVI, IV u. 476 S.] 1898. Geh. n. ℳ 14.—, in Halbfranz geb. n. ℳ 15.40.

II. Band: **Wolfgang und Johann Bolyai,** geometrische Untersuchungen, herausgegeben von Paul Stäckel. Mit einem Bildnisse Wolfgang Bolyais. [In Vorbereitung.]

Euklid und die sechs planimetrischen Bücher. Mit Benutzung der Textausgabe von Heiberg. Von Dr. Max Simon, Professor am Lyzeum und an der Universität Straßburg i. E. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. XI. Heft. Mit 192 Figuren. [VII u. 141 S.] gr. 8. 1901. Geh. n. ℳ 5.—



ABHANDLUNGEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN
WISSENSCHAFTEN MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN
BEGRÜNDET VON MORITZ CANTOR · HEFT XXVI.1

DIE PROBLEME VON HANSEN UND SNELLIUS

VON

DR. ING. A. HAERPFER
IN PRAG

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1910




Hosted by Google

DIE PROBLEME VON HANSEN UND SNELLIUS

VON

DR. ING. A. HAERPFER
IN PRAG

Die in den nachfolgenden Untersuchungen dargestellten Lösungen obiger Probleme gehen von der Voraussetzung aus, daß die Festpunkte durch rechtwinklige Koordinaten gegeben seien. Es werden die Koordinatenunterschiede der Neupunkte gegen einen der gegebenen Festpunkte als Unbekannte betrachtet und die zu ihrer Berechnung notwendigen Gleichungen durch Projizieren ausgewählter Dreiecke der HANSENschen, bzw. SNELLIUSschen Figur auf die X- und Y-Achse gewonnen. Dabei genügt es, die allgemeinen Formeln für die HANSENsche Aufgabe aufzustellen und den Rückwärtseinschnitt als eine Modifikation der genannten Aufgabe zu betrachten.

Diese Art der Behandlung bietet namentlich bei der mehrfachen Punktbestimmung gewisse Vorteile, indem sich infolge des symmetrischen Baues der Koeffizienten der Unbekannten in den Bestimmungsgleichungen die Ausgleichung nicht unerheblich vereinfacht.

Bei der Betrachtung des einfachen Rückwärtseinschnittes ergibt sich ein neuer Weg, um zur Kenntnis eines der unbekannten Winkel der SNELLIUSschen Figur, die der Schlüssel zur Lösung überhaupt ist, zu gelangen.

I.

Das HANSENsche Problem.

A. Einfache Punktbestimmung.

In Fig. 1 sei A_0 jener der beiden gegebenen Festpunkte $A_0 A_1$, auf welchen sich die als Unbekannte einzuführenden Koordinatenunterschiede:

$$\Delta x_P = x_P - x_0$$

$$\Delta y_P = y_P - y_0$$

und ebenso

$$\Delta x_Q = x_Q - x_0$$

$$\Delta y_Q = y_Q - y_0$$

der Neupunkte P und Q beziehen sollen.

Die in diesen Punkten gemessenen Winkel seien α, β, bzw. γ, δ.

Die Gleichungen für P ergeben sich durch Projektion des Linienzuges $A_0 A_1 P A_0$ auf die X-Achse, bzw. Y-Achse. Mit den Zeichen von Fig. 1 entstehen:

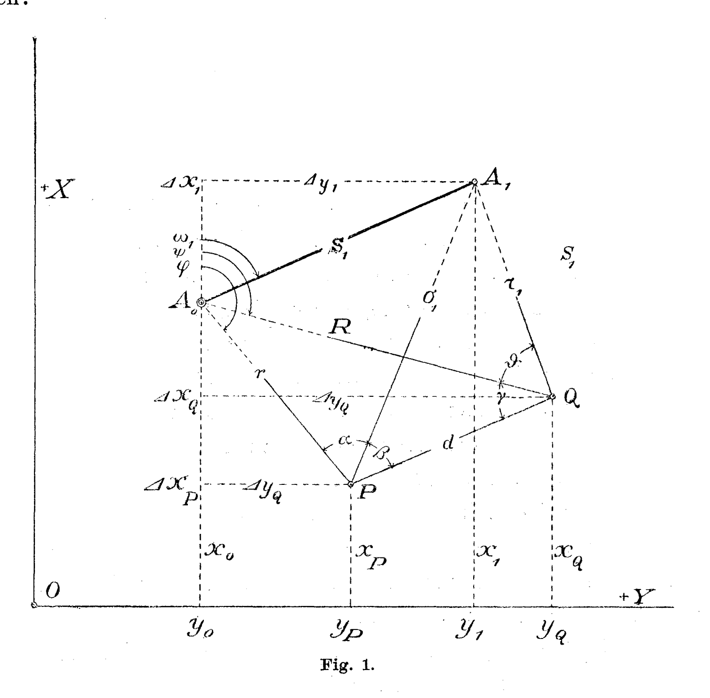


Fig. 1.

$$(1) \qquad \begin{cases} s_1 \cos w_1 + \sigma_1 \cos(\alpha + \varphi) - r \cos\varphi = 0 \\ s_1 \sin w_1 + \sigma_1 \sin(\alpha + \varphi) - r \sin\varphi = 0 \,. \end{cases}$$

Wir drücken σ_1 durch r aus. Es verhält sich:

$$\sigma_1 : d = \sin(\gamma + \delta) : \sin(\beta + \gamma + \delta)$$
$$d : r = \sin(\alpha + \beta + \gamma) : \sin\gamma.$$

Mithin:

$$\sigma_1 = \frac{\sin(\alpha + \beta + \gamma)\sin(\gamma + \delta)}{\sin(\beta + \gamma + \delta)\sin\gamma}\, r = K \cdot r,$$

wenn der Kürze halber

$$\frac{\sin(\alpha + \beta + \gamma)\sin(\gamma + \delta)}{\sin(\beta + \gamma + \delta)\sin\gamma} = K \qquad \text{(I)}$$

gesetzt wird.

Es ist ferner:

$$\sigma_1 \cos(\alpha + \varphi) = K \cos\alpha \cdot r \cos\varphi - K \sin\alpha \cdot r \sin\varphi$$
$$\sigma_1 \sin(\alpha + \varphi) = K \sin\alpha \cdot r \cos\varphi + K \cos\alpha \cdot r \sin\varphi.$$

Diese Ausdrücke in die Gleichungen (1) eingeführt und für

$$s_1 \cos w_1 = x_1 - x_0 = \varDelta x_1$$
$$s_1 \sin w_1 = y_1 - y_0 = \varDelta y_1\,,$$

für

$$r \cos \varphi = \varDelta x_P$$
$$r \sin \varphi = \varDelta y_P\,,$$

wie oben geschrieben, ergibt:

$$K \cos \alpha \cdot \varDelta x_P - K \sin \alpha \cdot \varDelta y_P - \varDelta x_P + \varDelta x_1 = 0$$
$$K \sin \alpha \cdot \varDelta x_P + K \cos \alpha \cdot \varDelta y_P - \varDelta y_P + \varDelta y_1 = 0$$

oder

$$(2) \qquad \begin{cases} (K \cos \alpha - 1)\, \varDelta x_P - K \sin \alpha \cdot \varDelta y_P + \varDelta x_1 = 0 \\ K \sin \alpha \cdot \varDelta x_P + (K \cos \alpha - 1)\, \varDelta y_P + \varDelta y_1 = 0 \end{cases}$$

In gleicher Weise erhält man für Q durch Projektion des Linienzuges $A_0 A_1 Q A_0$:

$$s_1 \cos w_1 + \tau_1 \cos (\psi + \delta) - R \cos \psi = 0$$
$$s_1 \sin w_1 + \tau_1 \sin (\psi + \delta) - R \sin \psi = 0$$

Da sich wieder verhält:

$$\tau_1 : d = \sin \beta : \sin (\beta + \gamma + \delta)$$
$$d : R = \sin (\alpha + \beta + \gamma) : \sin (\alpha + \beta),$$

so folgt:

$$\tau_1 = LR,$$

worin

$$L = \frac{\sin (\alpha + \beta + \gamma) \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta) \sin (\beta + \gamma + \delta)}\,. \qquad \text{(II)}$$

Es ist wieder:

$$\tau_1 \cos (\psi + \delta) = L \cos \delta \cdot R \cos \psi - L \sin \delta \cdot R \sin \psi$$
$$\tau_1 \sin (\psi + \delta) = L \cos \delta \cdot R \sin \psi + L \sin \delta \cdot R \cos \psi$$

Die Schlußgleichungen lauten somit, wenn $R \cos \psi = \varDelta x_Q$, $R \sin \psi = \varDelta y_Q$ geschrieben wird:

$$(3) \qquad \begin{cases} (L \cos \delta - 1)\, \varDelta x_Q - L \sin \delta\, \varDelta y_Q + \varDelta x_1 = 0 \\ (L \sin \delta \cdot \varDelta x_Q + (L \cos \delta - 1)\, \varDelta y_Q + \varDelta y_1 = 0. \end{cases}$$

Die praktische Rechnung hat also mit der Ermittlung der Hilfsgrößen K und L (Gleichungen (I) und (II)) einzusetzen. Aus diesen folgen ohne Schwierigkeit die Koeffizienten der Unbekannten, die schließlich aus der Auflösung der Gleichungen (2) und (3) hervorgehen. Zur Kontrolle werden die so gefundenen Werte in die nachstehenden Gleichungen ein-

geführt, welche sich aus der Projektion des Dreieckes A_0QP auf die X- und Y-Achse ergeben:

$$(4\text{a})\qquad \begin{cases} R\cos\psi - d\cos(\psi-\gamma) - r\cos\varphi = 0 \\ R\sin\psi - d\sin(\psi-\gamma) - r\sin\varphi = 0. \end{cases}$$

Oder:

$$(4\text{b})\qquad \begin{cases} R\cos\psi + d\cos(\alpha+\beta+\varphi) - r\cos\varphi = 0 \\ R\sin\psi + d\sin(\alpha+\beta+\varphi) - r\cos\varphi = 0. \end{cases}$$

Nach dem Sinussatze ist:

$$d\sin(\alpha+\beta) = R\sin(\alpha+\beta+\gamma)$$

und ebenso

$$d\sin\gamma = r\sin(\alpha+\beta+\gamma)$$

Führt man in (4a) ein:

$$d = MR,\qquad \text{worin}\qquad M = \frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

und in (4b):

$$d = Nr,\qquad \text{wo}\qquad N = \frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\gamma},$$

so erhält man, da

$$d\cos(\psi-\gamma) = M\cos\gamma\cdot R\cos\psi + M\sin\gamma\cdot R\sin\psi$$
$$d\sin(\psi-\gamma) = M\cos\gamma\cdot R\sin\psi - M\sin\gamma\cdot R\cos\psi$$

und andererseits:

$$d\cos(\alpha+\beta+\varphi) = N\cos(\alpha+\beta)\cdot r\cos\varphi - N\sin(\alpha+\beta)\cdot r\sin\varphi$$
$$d\sin(\alpha+\beta+\varphi) = N\sin(\alpha+\beta)\cdot r\cos\varphi + N\cos(\alpha+\beta)\cdot r\sin\varphi,$$

die Alternativegleichungen in der für die Anwendung geeigneten Form·

$$(5\text{a})\qquad \begin{cases} (1 - M\cos\gamma)\,\Delta x_Q - M\sin\gamma\cdot\Delta y_Q - \Delta x_P = 0 \\ M\sin\gamma\cdot\Delta x_Q + (1 - M\cos\gamma)\,\Delta y_Q - \Delta y_P = 0. \end{cases}$$

Oder:

$$(5\text{b})\qquad \begin{cases} \{N\cos(\alpha+\beta) - 1\}\,\Delta x_P - N\sin(\alpha+\beta)\cdot\Delta y_P + \Delta x_Q = 0 \\ N\sin(\alpha+\beta)\cdot\Delta x_P + \{N\cos(\alpha+\beta) - 1\}\,\Delta y_P + \Delta y_Q = 0. \end{cases}$$

B. Mehrfache Punktbestimmung.

Sind nicht zwei, sondern $n+1$ Punkte durch ihre Koordinaten gegeben, so bilden der unter diesen gewählte Punkt A_0 und die Neupunkte P und Q mit jedem der anderen n Festpunkte eine HANSENfigur analog Fig. 1 S. 4. Aus diesen n Kombinationen entstehen n Gleichungspaare für P nach Art der Gleichungen (2) S. 5 mit den Hilfsgrößen

$K_1, K_2, \ldots K_n$ und n Gleichungspaare für Q nach Art von (3) S. 5 mit den Hilfsgrößen $L_1, L_2, \ldots L_n$.

Bei den Winkelbeobachtungen ist auf die richtige Auswahl der Winkel α, β und δ innerhalb der n Figuren zu achten. γ ist ein Winkel des in allen Kombinationen wiederkehrenden Dreiecks A_0QP, ebenso der Summenwinkel $\alpha + \beta$, dem in allen Figuren der gleiche Wert zukommen muß, d. h.

$$\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2 = \ldots = \alpha_n + \beta_n.$$

Die in P gemessenen Winkel sind daher vorerst einer Ausgleichung in der Station zu unterwerfen. Die beiden Punkte P und Q werden im übrigen getrennt ausgeglichen.

Wir beginnen mit dem Punkte P. Aus zwei beliebigen Gleichungen des diesem Punkte angehörenden Systems oder auf anderem Wege verschafft man sich Näherungswerte $\Delta x_P'$, $\Delta y_P'$ der Unbekannten Δx_P und Δy_P. Führt man in die Bestimmungsgleichungen (2) S. 5 ein:

$$\Delta x_P = \Delta x_P' + dx_P$$
$$\Delta y_P = \Delta y_P' + dy_P,$$

so nehmen die Fehlergleichungen folgende Formen an:

$$\begin{aligned}
v_1 &= (K_1 \cos\alpha_1 - 1)dx_P - K_1 \sin\alpha_1 \cdot dy_P + l_1 \\
v_2 &= K_1 \sin\alpha_1 \cdot dx_P + (K_1 \cos\alpha_1 - 1)\,dy_P + l_2 \\
v_3 &= (K_2 \cos\alpha_2 - 1)dx_P - K_2 \sin\alpha_2 \cdot dy_P + l_3 \\
v_4 &= K_2 \sin\alpha_2 \cdot dx_P + (K_2 \cos\alpha_2 - 1)\,dy_P + l_4 \\
&\vdots \\
v_{2n-1} &= (K_n \cos\alpha_n - 1)dx_P - K_n \sin\alpha_n \cdot dy_P + l_{2n-1} \\
v_{2n} &= K_n \sin\alpha_n\,dx_P + (K_n \cos\alpha_n - 1)\,dy_P + l_{2n}.
\end{aligned}$$

Hierin haben die Widersprüche l die nachstehenden Werte:

$$\begin{aligned}
l_{2i-1} &= (K_i \cos\alpha_i - 1)\,\Delta x_P' - K_i \sin\alpha_i \cdot \Delta y_P' + \Delta x_1 \\
l_{2i} &= K_i \sin\alpha_i \cdot \Delta x_P' + (K_i \cos\alpha_i - 1)\,\Delta y_P' + \Delta y_1.
\end{aligned}$$

Bei der Aufstellung der Normalgleichungen ist zu beachten, daß wegen des wechselweisen Auftretens der Koeffizienten von dx_P und dy_P, sowie wegen des Alternierens der Vorzeichen der Koeffizienten von dy_P in den Fehlergleichungen der Koeffizient $[ab]$ in den Normalgleichungen verschwindet. Die quadratischen Koeffizienten der Unbekannten sind einander gleich und da sich die Normalgleichungen unmittelbar in reduzierter Form ergeben, schon die Gewichte der Unbekannten:



$$
(6)\begin{cases}
\{[(K_i \cos \alpha_i - 1)^2] + [(K_i \sin \alpha_i)^2]\} \cdot dx_P \\
\qquad + \{[(K_i \cos \alpha_i - 1)\, l_{2i-1}] + [K_i \sin \alpha_i \, l_{2i}]\} = 0 \\
\{[(- K_i \sin \alpha_i)^2] + [(K_i \cos \alpha_i - 1)^2]\} \cdot dy_P \\
\qquad + \{[- K_i \sin \alpha_i \, l_{2i-1}] + [(K_i \cos \alpha_i - 1)\, l_{2i}]\} = 0.
\end{cases}
$$

$$
G_{x,P} = \{[(K_i \cos \alpha_i - 1)^2] + [(K_i \sin \alpha_i)^2]\} = G_{y,P}.
$$

Von $i = 1$ bis $i = n$.

Die Ausgleichung für den Punkt Q geht die gleichen Bahnen und führt zu folgenden Normalgleichungen:

$$
(7)\begin{cases}
\{[(L_i \cos \delta_i - 1)^2] + [(L_i \sin \delta_i)^2]\}\, dx_Q \\
\qquad + \{[(L_i \cos \delta_i - 1)\, l_{2i-1}] + [L_i \sin \delta_i \cdot l_{2i}]\} = 0 \\
\{[(- L_i \sin \delta_i)^2] + [(L_i \cos \delta_i - 1)^2]\}\, dy_Q \\
\qquad + \{[- L_i \sin \delta_i \cdot l_{2i-1}] + [L_i \cos \delta_i - 1)\, l_{2i}]\} = 0.
\end{cases}
$$

$$
G_{x,Q} = \{[(L_i \cos \delta_i - 1)^2] + [(L_i \sin \delta_i)^2]\} = G_{y,Q}.
$$

Von $i = 1$ bis $i = n$.

Die so berechneten Werte der Unbekannten $\Delta x_P = \Delta x'_P + dx_P$, $\Delta y_P = \Delta y'_P + dy_P$ und $\Delta x_Q = \Delta x'_Q + dx_Q$, $\Delta y_Q = dy'_Q + dy_Q$ treten nunmehr mit ihren Gewichten in die Bedingungsgleichungen (5a) S. 6 (oder (5b) S. 6) — als solche müssen die zitierten Gleichungen bei der mehrfachen Punktbestimmung Berücksichtigung finden — ein und werden dadurch einer endgültigen Simultanausgleichung unterzogen.

Bezeichnen wir die neuen Verbesserungen von

Δx_Q mit $v_{x,Q}$ und von Δx_P mit $v_{x,P}$
Δy_Q „ $v_{y,Q}$ „ „ Δy_P „ $v_{y,P}$,

so ergeben sich unter Anlehnung an (5a) S. 6 die reduzierten Bedingungsgleichungen in der Form:

$$
(8)\quad \begin{cases}
(1 - M \cos \gamma)\, v_{x,Q} - M \sin \gamma \cdot v_{y,Q} - v_{x,P} + \lambda_1 = 0 \\
M \sin \gamma\, v_{x,Q} + (1 - M \cos \gamma) \cdot v_{y,Q} - v_{y,P} + \lambda_2 = 0.
\end{cases}
$$

Man erkennt sofort, daß auch hier der Koeffizient $\left[\frac{ab}{g}\right]$ in den Normalgleichungen verschwindet und die quadratischen Koeffizienten der Korrelaten C_1 und C_2 einander gleich sind.

Die Normalgleichungen haben daher die folgenden, einfachen Gestalten:

$$(9)\quad \begin{cases} \left[\dfrac{(1-M\cos\gamma)^2+(-M\sin\gamma)^2}{G_{x,Q}}+\dfrac{(-1)^2}{G_{x,P}}\right]C_1+\lambda_1=0 \\ \left[\dfrac{(M\sin\gamma)^2+(1-M\cos\gamma)^2}{G_{y,Q}}+\dfrac{(-1)^2}{G_{y,P}}\right]C_2+\lambda_2=0\,. \end{cases}$$

Die Verbesserungen folgen mit:

$$v_{x,Q}=\frac{1-M\cos\gamma}{G_{x,Q}}\,C_1-\frac{M\sin\gamma}{G_{x,Q}}\,C_2$$

$$v_{y,Q}=\frac{M\sin\gamma}{G_{y,Q}}\,C_1-\frac{1-M\cos\gamma}{G_{y,Q}}\,C_2$$

$$(10)\quad \begin{cases} v_{x,P}=\dfrac{-1}{G_{x,P}}\,C_1 \\ v_{y,P}=\dfrac{-1}{G_{y,P}}\,C_2\,. \end{cases}$$

Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit ist:

$$f=\pm\sqrt{\frac{(Gvv)}{2}}$$

und der mittlere Fehler eines der auszugleichenden Werte (mit dem Gewichte G) allgemein:

$$m=\frac{f}{\sqrt{G}}\,.$$

C. Beispiel einer mehrfachen Punktbestimmung.

Hierzu Fig. 2.

Tabelle der Koordinaten der gegebenen Festpunkte.

	x	y
A_0	902,706	1575,240
A_1	775,989	1832,027
A_2	1312,390	1402,200
A_3	1594,820	1638,870

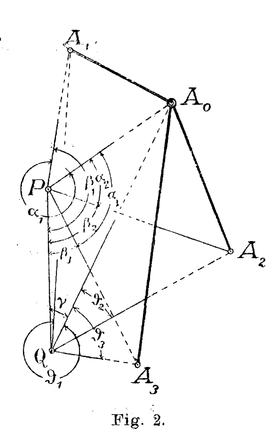


Fig. 2.

Die Winkelmessung in P ergab:

$\alpha_1 = 314^0\ 29'\ 04''$
$\beta_1 = 171^0\ 51'\ 11''$
$\alpha_2 = 57^0\ 35'\ 44''$
$\beta_2 = 68^0\ 44'\ 31''$
$\alpha_3 = 99^0\ 19'\ 02''$
$\beta_3 = 27^0\ 01'\ 13''$.

Die Winkelmessung in Q ergab:

$$\gamma = 24^0\ 49'\ 27''$$
$$\delta_1 = 338^0\ 50'\ 35''$$
$$\delta_2 = 37^0\ 16'\ 58''$$
$$\delta_3 = 71^0\ 59'\ 01''.$$

Die Berechnung der Hilfsgrößen K_1, K_2, K_3 und L_1, L_2, L_3 vereinfacht sich nicht unbedeutend, da: $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2 = \alpha_3 + \beta_3$, somit auch $\sin(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma) = \sin(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma) = \sin(\alpha_3 + \beta_3 + \gamma)$ ist.

Ausgleichung des Punktes P.

Allgemein ist: $K = \frac{\sin(\alpha + \beta + \gamma)\sin(\gamma + \delta)}{\sin(\beta + \gamma + \delta)\sin\gamma}$, s. (I) S. 4. Wir erhalten nach Einführung der numerischen Werte und logarithmischer Berechnung:

$$\log K_1 = 9{,}97\,350 \qquad K_1 \cos\alpha_1 = 0{,}659 \qquad K_1 \sin\alpha_1 = -0{,}671$$

$$\log K_2 = 0{,}12\,726 \qquad K_2 \cos\alpha_2 = 0{,}719 \qquad K_2 \sin\alpha_2 = 1{,}133$$

$$\log K_3 = 0{,}13\,775 \qquad K_3 \cos\alpha_3 = -0{,}222 \qquad K_3 \sin\alpha_3 = 1{,}355$$

Die Bestimmungsgleichungen lauten:

$$-0{,}341\ \varDelta x_p + 0{,}671\ \varDelta y_p - 126{,}717 = 0$$
$$-0{,}671\ \varDelta x_p - 0{,}341\ \varDelta y_p + 256{,}787 = 0$$
$$-0{,}281\ \varDelta x_p - 1{,}133\ \varDelta y_p + 409{,}684 = 0$$
$$1{,}133\ \varDelta x_p - 0{,}281\ \varDelta y_p - 173{,}040 = 0$$
$$-1{,}222\ \varDelta x_p - 1{,}355\ \varDelta y_p + 692{,}114 = 0$$
$$1{,}355\ \varDelta x_p - 1{,}222\ \varDelta y_p + 63{,}630 = 0.$$

Als Näherungswerte werden benützt:

$$\varDelta x_p' = 228{,}100^m$$
$$\varDelta y_p' = 304{,}800^m.$$

Es ergeben sich die Fehlergleichungen:

$$v_1 = -0{,}341\, dx_P + 0{,}671\, dy_P + 0{,}022$$
$$v_2 = -0{,}671\, dx_P - 0{,}341\, dy_P - 0{,}215$$
$$v_3 = -0{,}281\, dx_P - 1{,}333\, dy_P + 0{,}250$$
$$v_4 = +1{,}133\, dx_P - 0{,}281\, dy_P - 1{,}352$$
$$v_5 = -1{,}222\, dx_P - 1{,}355\, dy_P + 0{,}372$$
$$v_6 = +1{,}355\, dx_P - 1{,}222\, dy_P + 0{,}240\,.$$

Die Normalgleichungen sind:

$$5{,}2585\, dx_P - 1{,}5947 = 0$$
$$5{,}2585\, dy_P - 0{,}6127 = 0\,,$$
$$dx_P = 0{,}303^m$$
$$dy_P = 0{,}117^m,$$
$$G_{x,P} = G_{y,P} = \quad 5{,}259$$
$$m_{x,P} = m_{y,P} = \pm 0{,}274\,. \qquad \text{(III)}$$

Die unabhängige Ausgleichung bei P ergibt somit:

$$\Delta x_P = 228{,}403^m \pm 0{,}274$$
$$\Delta y_P = 304{,}917^m \pm 0{,}274\,. \quad \text{Mittlerer Punktfehler bei } P = \pm 0{,}387^m \qquad \text{(IV)}$$

Ausgleichung des Punktes Q.

Allgemein ist: $L = \dfrac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma+\delta)}$, (s. (II) S. 5).

Die logarithmische Berechnung ergibt:

$$\log L_1 = 0{,}03\,598 \qquad L_1 \cos\delta_1 = \quad 1{,}013$$
$$L_1 \sin\delta_1 = -0{,}392$$
$$\log L_2 = 9{,}86\,788 \qquad L_2 \cos\delta_2 = 0{,}587$$
$$L_3 \cos\delta_3 = 0{,}101$$
$$\log L_3 = 9{,}51\,515 \qquad L_2 \sin\delta_2 = 0{,}447$$
$$L_3 \sin\delta_3 = 0{,}311\,.$$

Die Bestimmungsgleichungen sind:

$$0{,}013\, \Delta x_Q + 0{,}392\, \Delta y_Q - 126{,}717 = 0$$
$$-0{,}392\, \Delta x_Q + 0{,}013\, \Delta y_Q + 256{,}787 = 0$$
$$-0{,}413\, \Delta x_Q - 0{,}447\, \Delta y_Q + 409{,}684 = 0$$
$$0{,}447\, \Delta x_Q - 0{,}413\, \Delta y_Q - 173{,}040 = 0$$
$$-0{,}899\, \Delta x_Q - 0{,}311\, \Delta y_Q + 692{,}114 = 0$$
$$0{,}311\, \Delta x_Q - 0{,}899\, \Delta y_Q + \quad 63{,}630 = 0\,.$$

Mit den Näherungswerten:

$$\Delta x_Q' = 665{,}500^m$$
$$\Delta y_Q' = 301{,}300^m$$

folgen die Fehlergleichungen:

$$\begin{aligned}
v_1' &= 0{,}013\, dx_Q + 0{,}392\, dy_Q + 0{,}112 \\
v_2' &= -0{,}392\, dx_Q + 0{,}013\, dy_Q - 0{,}143 \\
v_3' &= -0{,}413\, dx_Q - 0{,}447\, dy_Q + 0{,}151 \\
v_4' &= 0{,}447\, dx_Q - 0{,}413\, dy_Q + 0{,}002 \\
v_5' &= -0{,}899\, dx_Q - 0{,}311\, dy_Q + 0{,}125 \\
v_6' &= 0{,}311\, dx_Q - 0{,}899\, dy_Q - 0{,}268
\end{aligned}$$

Daraus resultieren die Normalgleichungen:

$$1{,}429\, dx_Q - 0{,}199 = 0$$
$$1{,}429\, dx_Q + 0{,}176 = 0\,.$$

Daher ist:

$$dx_Q = +\,0{,}139$$
$$dy_Q = -\,0{,}123\,,$$

$$\left.\begin{aligned} G_{x,Q} &= G_{y,Q} = 1{,}429 \\ m_{x,P} &= m_{y,P} = \pm\,0{,}128\,. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III')}$$

Die Ergebnisse der selbständigen Ausgleichung bei Q lauten:

$$\left.\begin{aligned} \Delta x_Q &= 665{,}639^m \pm 0{,}128 \\ \Delta y_Q &= 301{,}177^m \pm 0{,}128\,. \end{aligned}\right\} \text{ Mittlerer Punktfehler bei } Q = \pm\,0{,}181^m. \quad \text{(IV')}$$

Diese vorläufig ausgeglichenen Werte von Δx_P, Δy_P und Δx_Q, Δy_Q sind nunmehr in die Bedingungsgleichungen (5a) S. 6 (oder (5b) S. 6) einzusetzen.

Die Aufstellung der letzteren erfordert die Berechnung der Hilfsgröße M oder N. Indem wir uns z. B. für das Gleichungspaar (5a) S. 6 entscheiden, ist

$$M = \frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

auszuwerten.

$$\log\sin(\alpha+\beta+\gamma) = 9{,}68335$$
$$\log\sin(\alpha+\beta) = 9{,}90609\,,$$

$$\begin{aligned}
\log\cos\gamma &= 9{,}95789 \\
\log M &= 9{,}77726 \qquad & M\cos\gamma &= 0{,}543 \\
\log\sin\gamma &= 9{,}62308 \qquad & M\sin\gamma &= 0{,}251
\end{aligned}$$

Die Bedingungsgleichungen lauten:

$$0{,}457\,(\Delta x_Q + v_{x,Q}) - 0{,}251\,(\Delta y_Q + v_{y,Q}) - (\Delta x_P + v_{x,P}) = 0$$
$$0{,}251\,(\Delta x_Q + v_{x,Q}) + 0{,}457\,(\Delta y_Q + v_{y,Q}) - (\Delta y_P + v_{y,P}) = 0\,.$$

Nach Einführung der Zahlenwerte:

$\Delta x_P = 228{,}403$ ((IV) S. 11) und $\Delta x_Q = 665{,}639$ ((IV') S. 12)

$\Delta y_P = 304{,}917$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\Delta y_Q = 301{,}177$

ergeben sich die folgenden Fehlergleichungen:

$$0{,}457\,v_{x,Q} - 0{,}251\,v_{y,Q} - v_{x,P} - 0{,}182 = 0$$
$$0{,}251\,v_{x,Q} + 0{,}457\,v_{y,Q} - v_{y,P} - 0{,}071 = 0\,.$$

Mit Beachtung der Gewichte:

$G_{x,Q} = G_{y,Q} = 1{,}429$ ((III) S. 11) und $G_{x,P} = G_{y,P} = 5{,}259$ ((III') S. 12)

folgen die Normalgleichungen (s. (9) S. 9):

$$0{,}380\,C_1 - 0{,}182 = 0$$
$$0{,}380\,C_2 - 0{,}071 = 0\,.$$

Daraus:

$$C_1 = 0{,}479\,, \qquad C_2 = 0{,}0187\,.$$

Die Verbesserungen:

$$v_{x,Q} = 0{,}186 \qquad v_{x,P} = -0{,}091$$
$$v_{y,Q} = -0{,}025 \qquad v_{y,P} = -0{,}036\,,$$

$$f = \pm\sqrt{\frac{0{,}1008}{2}} = \pm 0{,}224$$

$$m_{x,Q} = m_{y,Q} = \pm\sqrt{\frac{0{,}0504}{1{,}429}} = \pm 0{,}188$$

$$m_{x,P} = m_{y,P} = \pm\sqrt{\frac{0{,}0504}{5{,}259}} = \pm 0{,}098\,.$$

Die endgültigen Werte der Koordinaten der Neupunkte P und Q sind daher:

$x_P = 1131{,}018^m \pm 0{,}098$
$y_P = 1880{,}121^m \pm 0{,}098$ Mittlerer Punktfehler bei $Q = \pm\,0{,}139^m$,

$x_Q = 1568{,}531^m \pm 0{,}188$
$y_Q = 1876{,}392^m \pm 0{,}188$ Mittlerer Punktfehler bei $Q = \pm\,0{,}266^m$.

Vergleicht man diese mittleren Punktfehler mit jenen, welche sich nach der punktweisen Ausgleichung ergeben haben, so zeigt es sich, daß

durch die Simultanausgleichung der Größenunterschied der beiden Punktfehler geringer geworden ist, sie also einander relativ genähert wurden. Der Fehler in P ist ungefähr dreimal kleiner, jener in Q beiläufig doppelt so groß geworden. Die durch den zweiten Ausgleichungsakt erzielte Verschärfung der Genauigkeit spricht sich daher in diesem speziellen Falle nicht in einer Verminderung der absoluten Werte der Punktfehler, sondern in einer solchen ihres Größenunterschiedes aus.

II.

Das Problem von SNELLIUS.

Wie schon eingangs erwähnt wurde, soll hier die Lösung dieses Problems unter tunlichster Anlehnung an die Aufgabe von HANSEN angestrebt werden.

Die Unterschiede sind leicht zu übersehen: der Punkt Q in Fig. 1 S. 4 ist gegeben und der Winkel γ ist unbekannt. Indem wir P als rückwärts eingeschnittenen Punkt betrachten, werden die Gleichungen (2) S. 5 zu seiner Berechnung verwendet, während die Gleichungen (3) S. 5 zur Ermittlung der unbekannten Hilfsgröße L und damit auch zur Bestimmung des Winkels γ zur Verfügung stehen.

So folgt z. B. aus der ersten der Gleichungen (3) S. 5:

$$(L \cos \delta - 1)\, \varDelta x_Q - L \sin \delta\, \varDelta y_Q + \varDelta x_1 = 0$$

ohne weiteres:

$$L = \frac{\varDelta x_Q - \varDelta x_1}{\varDelta x_Q \cos \delta - \varDelta y_1 \sin \delta} = \frac{x_Q - x_1}{R(\cos \psi \cos \delta - \sin \psi \sin \delta)},$$

$$L = \frac{\tau_1 \cos (A_1 Q)}{R \cos (\psi + \delta)}.$$

Da nun $\delta = (A_1 Q) - \psi$ ist, ergibt sich L einfach als das Verhältnis der beiden bekannten Seiten, die in jenem Punkte zusammentreffen, der zugleich Scheitel des unbekannten Winkels γ ist:

$$L = \frac{\tau_1}{R}.$$

Es ist jetzt die goniometrische Gleichung:

$$\frac{\tau_1}{R} = \frac{\sin (\alpha + \beta + \gamma) \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta) \sin (\beta + \gamma + \delta)} \quad \text{(s. (II) S. 5)}$$

nach γ aufzulösen. Wir ordnen:

$$\frac{\sin (\alpha + \beta + \gamma)}{\sin (\beta + \gamma + \delta)} = \frac{\tau_1 \cdot \sin (\alpha + \beta)}{R \cdot \sin \beta}$$

und setzen für die bekannte rechte Seite das Zeichen G:

$$\frac{r_1 \sin(\alpha+\beta)}{R\sin\beta} = L\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta} = G\,.$$

Wir nennen ebenso verkürzend:

$$\alpha + \beta = u$$
$$\beta + \delta = v$$

und erhalten:

$$\frac{\sin(u+\gamma)}{\sin(v+\gamma)} = G\,.$$

Die Entwicklung der beiden Sinus ergibt:

$$\sin u \cos\gamma + \cos u \sin\gamma = G \sin v \cos\gamma + G \cos v \sin\gamma$$

oder

$$(\sin u - G \sin v)\cos\gamma = (G\cos v - \cos u)\sin\gamma$$

und daraus

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\sin u - G\sin v}{G\cos v - \cos u}\,.$$

Führen wir für G wieder ein: $G = L\frac{\sin u}{\sin\beta}$, so entsteht:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\sin u \sin\beta - L \sin u \sin v}{L\sin u \cos v - \sin\beta\cos u}\,.$$

Dividieren wir Nenner und Zähler durch $L \sin u \cos v$ und setzen unter Einführung des Hilfswinkels ε

(11) $$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\sin\beta}{L\cos v} = \frac{R\sin\beta}{r_1\cos v}\,,$$

so folgt nach einfacher Reduktion

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\operatorname{tg}\varepsilon - \operatorname{tg} v}{1 - \operatorname{tg}\varepsilon \operatorname{cotg} u}$$

oder, indem dieser Bruch logarithmisch brauchbar gemacht wird,

(12) $$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\sin(\varepsilon - v)\cdot\sin u}{\sin(u-\varepsilon)\cdot\cos v}\,.$$

In einem speziellen Falle ist daher zuerst nach (11) der Hilfswinkel ε und hierauf nach (12) der Winkel γ zu rechnen. Es braucht nicht hervorgehoben zu werden, daß die Vorzeichen von Zähler und Nenner in (11), bezw. in (12) den Quadranten bestimmen, in welchem der Winkel ε, bzw. γ liegt.

Bemerkung.

Wollte man den Einfluß untersuchen, den ein Fehler in ε auf den Wert von γ ausübt, so wäre $\operatorname{tg}\gamma$ als Funktion von ε zu betrachten und

darnach zu differentiieren. Der Gang der Rechnung gestaltet sich einfacher, wenn man vorerst logarithmiert:

$$l \operatorname{tg} \gamma = l \sin(\varepsilon - v) + l \sin u - l \sin(u - \varepsilon) - l \cos v .$$

Die Differentiation ergibt:

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \gamma} \cdot \frac{1}{\cos^2 \gamma} d\gamma = \left(\frac{\cos(\varepsilon - v)}{\sin(\varepsilon - v)} + \frac{\cos(u - \varepsilon)}{\sin(u - \varepsilon)}\right) d\varepsilon .$$

Somit

$$d\gamma = \frac{\sin 2\gamma \cdot \sin(u - v)}{2 \sin(\varepsilon - v) \sin(u - \varepsilon)} d\varepsilon$$

oder, da $u - v = \alpha - \delta$:

$$d\gamma = \frac{\sin 2\gamma \cdot \sin(\alpha - \delta)}{2 \sin(\varepsilon - v) \sin(u - \varepsilon)} d\varepsilon .$$

Zahlenbeispiel für mehrfache Punktbestimmung.

Hierzu Fig. 3.

In einem durch Rückwärtseinschnitt mit Koordinaten zu bestimmenden Punkte P der Plattform der deutschen technischen Hochschule in Prag wurden zwischen den nachstehend durch rechtwinklige Koordinaten gegebenen Triangulierungspunkten

Name des Punktes	Gekürzte Bezeichnung	y^m	x^m
Schloßkirche (St. Veit)	V	4578,60	5046,59
Nördlicher Turm der Teinkirche	T	3011,99	5370,97
St. Heinrichsglockenturm	H	2462,38	5663,15
Katharinenkirche	K	2816,71	6943,77
Nördlicher Turm der Laurenzikirche	L	4899,39	5885,07

die folgenden Winkel gemessen:

$$\begin{aligned}
\sphericalangle VPT &= 108^0\ 18'\ 57'' \\
\sphericalangle TPH &= 38^0\ 52'\ 12'' \\
\sphericalangle HPK &= 68^0\ 06'\ 19'' \\
\sphericalangle KPL &= 108^0\ 51'\ 34{,}2'' \\
\sphericalangle LPV &= 35^0\ 50'\ 45{,}6''.
\end{aligned}$$

Als Unbekannte werden z. B. die Koordinatenunterschiede von V gegen P, d. h. $\varDelta x_P = x_P - x_V$ und $\varDelta y_P = \varDelta y_P - y_V$ eingeführt.

Wir betrachten an erster Stelle die Kombination VTH s. Fig. 3, weil hier die Verhältnisse am einfachsten liegen.

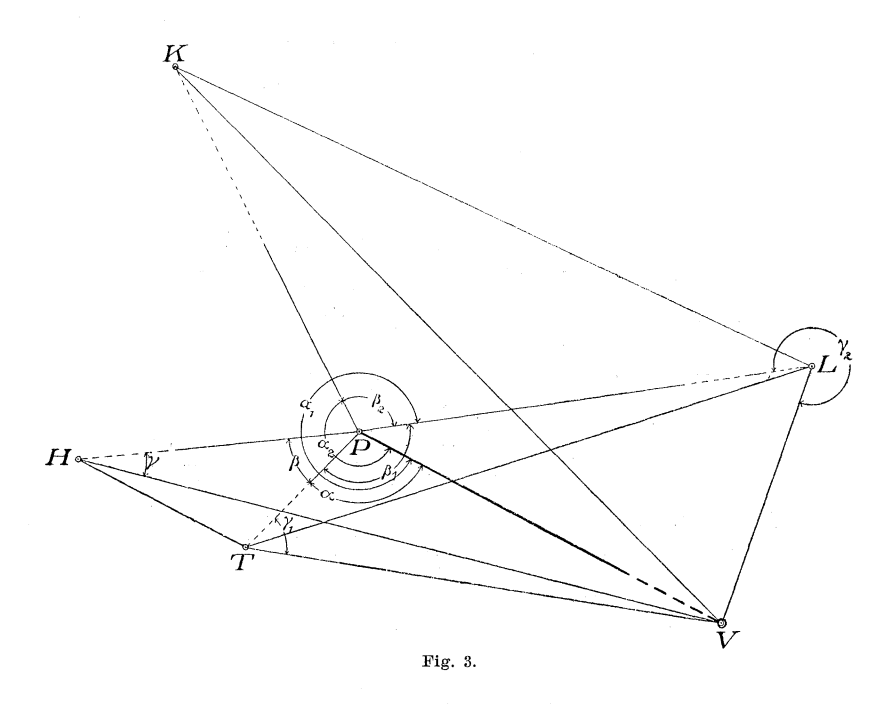


Fig. 3.

Aus den Richtungen:

$$(HV) = 106^0\ 14'\ 35{,}8''$$
$$(TH) = 297^0\ 59'\ 44''$$
$$(VT) = 281^0\ 41'\ 53{,}8''$$

folgen die Winkel im Dreiecke VTH:

$$\sphericalangle V = 4^0\ 32'\ 42{,}0''$$
$$\sphericalangle T = 163^0\ 42'\ 9{,}8''$$
$$\sphericalangle H = 11^0\ 45'\ 8{,}2'' = \delta.$$

Da ferner:

$$\alpha = 108^0\ 18'\ 57''$$
$$\beta = 38^0\ 52'\ 12'',$$

so folgt:

$$u = 147^0\ 11'\ 9'' = \alpha + \beta$$
$$v = 50^0\ 37'\ 20{,}2'' = \beta + \delta.$$

Berechnung von ε nach (11) S. 15:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\sin T \cdot \sin \beta}{\sin V \cdot \cos v}$$

log von:

$\log \operatorname{tg} \varepsilon = 0{,}54443$ — $\sin T = 9{,}44812$

$\varepsilon = 74^0\ 04'\ 02{,}5''$ — $\sin \beta = 9{,}79765$

$\varepsilon - v = 23^0\ 26'\ 42{,}3''$ — $\sin V = 8{,}89895$

$u - \varepsilon = 73^0 07'\ \ 6{,}5''$ — $\sin v = 9{,}80239$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\sin(\varepsilon - v) \sin u}{\sin(u - \varepsilon) \cos v} \text{ (s. (12) S. 15)},$$

log von:

$\sin(\varepsilon - v) = 9{,}59974$

$\sin u = 9{,}73393$ — $\log \operatorname{tg} \gamma = 9{,}55041$

$\sin(u - \varepsilon) = 9{,}98087$ — $\gamma = 19^0\ 33'\ 09''$

$\cos v = 9{,}80239$ — $d\gamma = \pm 0{,}823\, d\varepsilon$.

Hilfsgröße

$$K = \frac{\sin(\alpha + \beta + \gamma) \sin(\gamma + \delta)}{\sin(\beta + \gamma + \delta) \sin \gamma} \text{ (s. (I) S. 4)}.$$

$\log \sin(\alpha + \beta + \gamma) = \log \sin 166^0\ 44'\ 18'' = 9{,}36059$

$\log \sin(\gamma + \delta) = \log \sin 31^0\ 18'\ 17{,}2'' = 9{,}71566$

$\log \sin(\beta + \gamma + \delta) = \log \sin 70^0\ 10\ 29{,}2'' = 9{,}97346$

$\log \sin \gamma = \log \sin 19^0\ 33'\ 09'' = 9{,}52461$

$\log \cos \alpha = 9{,}49728_n$

$\log K = 9{,}57818$ — $K \cos \alpha = -0{,}119$

$\log \sin \alpha = 9{,}97742$. — $K \sin \alpha = 0{,}359$.

Zweite Kombination: VLT (in Fig. 3 S. 17 sind die zugehörigen Winkel mit dem Zeiger 1 versehen):

Richtungen: — Winkel im Dreiecke VLT:

$(TV) = 101^0\ 41'\ 53{,}8''$ — $\sphericalangle L' = 53^0\ 49'\ 37{,}3''$

$(TL) = 74^0\ 45'\ 47''$ — $\sphericalangle T' = 26^0\ 56'\ 06{,}8''$, $\delta = 333^0\ 03'\ 53{,}2''$

$(VL) = 20^0\ 56'\ \ 9{,}7''$, — $\sphericalangle V' = 99^0\ 14'\ 15{,}9''$,

$\sphericalangle \alpha_1 = 324^0\ 09'\ 14{,}4''$

$\sphericalangle \beta_1 = 144^0\ 09'\ 42{,}6''$

$\sphericalangle u_1 = 108^0\ 18'\ 57{,}0''$

$\sphericalangle v_1 = 117^0\ 13'\ 35{,}8''$,

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \frac{\sin L' \sin \beta_1}{\sin V' \cos v_1},$$

log von

$\log \operatorname{tg} \varepsilon_1 = 0_n\ 01978$ — $\sin L' = 9{,}90700$

$\varepsilon_1 = 133^0\ 41'\ 44''$ — $\sin \beta_1 = 9{,}76752$

$\varepsilon_1 - v_1 = 16^0\ 28'\ \ 8{,}2''$ — $\sin V' = 9{,}99434$

$u_1 - \varepsilon_1 = 334^0\ 37'\ 13''$, — $\cos v_1 = 9_n 66040$.

Berechnung von γ_1:

log von:

$\sin(\varepsilon_1 - v_1) = 9{,}45255$ $\qquad$ $\log \operatorname{tg} \gamma_1 = 0{,}13750$

$\sin u_1 = 9{,}97742$ $\qquad$ $\gamma_1 = 53^0\ 55'\ 20''$

$\sin(u_1 - \varepsilon_1) = 9_n\,63207$ $\qquad$ $d\gamma_1 = \pm\, 0{,}195\, d\varepsilon,$

$\cos v_1 = 9_n\,66040.$

Hilfsgröße: K

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 162^0\ 14'\ 17''$$
$$\beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = 171^0\ 08'\ 55{,}8''$$
$$\gamma_1 + \delta_1 = 26^0\ 59'\ 13{,}2''.$$

$\log \sin(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) = 9{,}48439$ $\qquad$ $\log \sin(\beta_1 + \gamma_1 + \delta_1) = 9{,}18715$

$\log \sin(\gamma_1 + \delta_1) = 9{,}65685,$ $\qquad$ $\log \sin \gamma_1 = 9{,}90753,$

$\log \cos \alpha_1 = 9{,}90880$

$\log K_1 = 0{,}04656$ $\qquad$ $K_1 \cos \alpha_1 = 0{,}902$

$\log \sin \alpha_1 = 9{,}76761_n,$ $\qquad$ $K_1 \sin \alpha_1 = -\,0{,}652.$

Dritte Kombination: VKL (in Fig. 3 S. 17 sind die zugehörigen Winkel mit dem Zeiger 2 bezeichnet):

Richtungen:

$(KV) = 137^0\ 07'\ 03''$ $\qquad$ $\sphericalangle V'' = 63^0\ 49'\ 06{,}7''$

$(VL) = 20^0\ 56'\ 09{,}7''$ $\qquad$ $\sphericalangle K'' = 20^0\ 10'\ 18{,}4''$

$(KL) = 116^0\ 56'\ 44{,}6'',$ $\qquad$ $\sphericalangle L'' = 96^0\ 0'\ 34{,}9'' = \delta.$

$\sphericalangle \alpha_2 = 215^0\ 17'\ 28''$ $\qquad$ $\sphericalangle u_2 = 324^0\ 09'\ 02{,}2''$

$\sphericalangle \beta_2 = 108^0\ 51'\ 34{,}2''$ $\qquad$ $\sphericalangle v_2 = 204^0\ 52'\ 09{,}1'',$

$$\operatorname{tg} \varepsilon_2 = \frac{\sin K'' \cdot \sin \beta_2}{\sin V'' \cos v_2},$$

$\log \operatorname{tg} \varepsilon_2 = 9_n\,60292$

$\varepsilon_2 = 158^0\ 09'\ 34''$

$\varepsilon_2 - v_2 = 313^0\ 17'\ 24{,}9''$

$u_2 - \varepsilon_2 = 165^0\ 59'\ 28{,}2'',$

log von

$\sin K'' = 9{,}53761$

$\sin \beta_2 = 9{,}97604$

$\sin V'' = 9{,}95299$

$\cos v_2 = 9{,}95774_n.$

log von:

$\sin(\varepsilon_2 - v_2) = 9{,}86206_n$ $\qquad$ $\log \operatorname{tg} \gamma_2 = 0{,}28802_n$

$\sin u_2 = 9{,}76764_n$ $\qquad$ $\gamma_2 = 360^0 - 62^0\ 44'\ 33''$

$\sin(u_2 - \varepsilon_2) = 9{,}38394$ $\qquad$ $\gamma_2 = 297^0\ 15'\ 27''$

$\cos v_2 = 9{,}95774_n,$ $\qquad$ $d\gamma_2 = \pm\, 2{,}015\, d\varepsilon_2.$

$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 261^0\ 24'\ 29{,}2''$ $\qquad$ $\log \sin(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) = 9{,}99510_n$

$\beta_2 + \gamma_2 + \delta_2 = 142^0\ 07'\ 36{,}1''$ $\qquad$ $\log \sin(\gamma_2 + \delta_2) = 9{,}73922$

$\gamma_2 + \delta_2 = 33^0\ 16'\ 01{,}9'',$ $\qquad$ $\log \sin(\beta_2 + \gamma_2 + \delta_2) = 9{,}78811$

$\log \sin \gamma_2 = 9{,}94888_n,$

$$\log\cos\alpha_2 = 9{,}91181_n$$
$$\log K_2 = 9{,}99733 \qquad K_2\cos\alpha_2 = -0{,}811$$
$$\log\sin\alpha_2 = 9{,}76172_n, \qquad K_2\sin\alpha_2 = -0{,}574\,.$$

Wir führen nunmehr die Ausgleichung durch, indem wir in die Bestimmungsgleichungen nach (2) S. 5:

$$\left.\begin{aligned}-1{,}119\,\varDelta x^{1)} - 0{,}359\,\varDelta y + 324{,}38 &= 0\\ 0{,}359\,\varDelta x - 1{,}119\,\varDelta y - 1566{,}61 &= 0\end{aligned}\right\}\ \text{(Kombination } VTH \text{ S. 18)}$$
$$\left.\begin{aligned}-0{,}098\,\varDelta x + 0{,}652\,\varDelta y + 838{,}48 &= 0\\ -0{,}652\,\varDelta x - 0{,}098\,\varDelta y + 320{,}79 &= 0\end{aligned}\right\}\ \text{(Kombination } VLT \text{ S. 18)}$$
$$\left.\begin{aligned}-1{,}811\,\varDelta x - 0{,}574\,\varDelta y + 1897{,}18 &= 0\\ -0{,}574\,\varDelta x - 1{,}811\,\varDelta y - 1761{,}91 &= 0\end{aligned}\right\}\ \text{(Kombination } VKL \text{ s. o.)}$$

die Näherungswerte $\varDelta x' = 670{,}4$ und $\varDelta y' = -1185{,}0$ einführen.

Es entstehen dann die folgenden Fehlergleichungen:

$$\begin{aligned}v_1 &= -1{,}119\,dx - 0{,}359\,dy + 0{,}210\\ v_2 &= 0{,}359\,dx - 1{,}119\,dy + 0{,}414\\ v_3 &= -0{,}098\,dx + 0{,}652\,dy + 0{,}161\\ v_4 &= 0{,}652\,dx - 0{,}098\,dy - 0{,}180\\ v_5 &= -1{,}811\,dx + 0{,}574\,dy + 2{,}896\\ v_6 &= -0{,}574\,dx - 1{,}811\,dy - 0{,}665\,.\end{aligned}$$

Die Normalgleichungen:

$$5{,}425\,dx - 4{,}848 = 0 \qquad dx = +0{,}894$$
$$5{,}425\,dy + 2{,}449 = 0 \qquad dy = -0{,}451,$$
$$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{6-2}} = \pm\sqrt{\frac{3{,}6575}{4}} = \pm 0{,}956_3$$
$$m_x = m_y = \frac{m}{\sqrt{g}} = \frac{0{,}956}{\sqrt{5{,}425}} = \pm 0{,}411,$$
$$\varDelta x = 670{,}4 + 0{,}894 = 671{,}294\ m$$
$$\varDelta y = -1185{,}0 - 0{,}451 = -1185{,}451\ m.$$

Schlußergebnis:

$$\left.\begin{aligned}x_P &= 5717{,}884 \pm 0{,}411\ m\\ y_P &= 3393{,}149 \pm 0{,}411\ m\end{aligned}\right. \qquad \text{Mittlerer Punktfehler bei } P = \pm 0{,}581^m.$$

---

1) Da eine Verwechslung ausgeschlossen ist, konnte bei $\varDelta x$ und $\varDelta y$ der Index P wegbleiben.

Euler, Leonhard. Festschrift zur Feier des 200. Geburtstages Leonhard Eulers. Herausgegeben vom Vorstande der Berliner Mathematischen Gesellschaft [IV u. 137 S.] gr. 8. 1907. Geh. n. ℳ 5.—

Galilei, Galileo, Dialog über die beiden hauptsächlichsten Weltsysteme, das Ptolemäische und das Kopernikanische. Aus dem Italienischen übersetzt und erläutert von Emil Strauß. [LXXXIV u. 586 S.] gr. 8. 1891. Geh. n. ℳ 16.—

Gauß, Carl Friedrich, Werke. Herausgegeben von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen. 10 Bände. gr. 4. Kart.

Band I: Disquisitiones arithmeticae. 2. Abdr. [478 S.] 1870. n. ℳ 20.—
— II: Höhere Arithmetik. 2 Abdr. [528 S.] 1876. n. ℳ 20.— Nachtrag zum ersten Abdr. des 2. Bandes. [33 S.] 1876. n. ℳ 2.—
— III: Analysis. 2. Abdr. [499 S.] 1876. n. ℳ 20.—
— IV: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Geometrie. 2. Abdr. [492 S.] 1880. n. ℳ 25.—
— V: Mathematische Physik. 2. Abdr. [642 S.] 1877. n. ℳ 25.—
— VI: Astronomische Abhandlungen. 2. Abdr. [664 S.] 1874. n. ℳ 33.—
— VII: Theoria motus und Theoretisch-Astronomischer Nachlaß. [650 S.] 1906. n. ℳ 30.—
— VIII: Fundamente der Geometrie usw. [III u. 458 S.] 1900. n. ℳ 24.—
— IX: Geodätische Nachträge zu Band IV; insbesondere Hannoversche Gradmessung. [IV u. 528 S.] 1903. n. ℳ 26.—
Band X [in Vorbereitg.] wird biographische Angaben u. interessante Stücke des Briefwechsels bieten.

Gauß, C. F., und Wolfg. Bolyai, Briefwechsel. Mit Unterstützung der Königl. Ungarischen Akademie der Wissenschaften herausgeg. von Franz Schmidt und Paul Stäckel. [XVI u. 208 S.] 4. 1899. In Halbkalblederband n. ℳ 16.—

Hering, K., Ingenieur in Darmstadt, das 200jährige Jubiläum der Dampfmaschine 1706—1906. Eine historisch-technisch-wirtschaftliche Betrachtung. Mit 13 Figuren im Text. [IV u. 58 S.] gr. 8. 1907. geh. n. ℳ 1.60.

Jacobi, C. G. J., und M. H. Jacobi, Briefwechsel. Herausgegeben von Dr. W. Ahrens in Magdeburg. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. XXII. Heft. Mit 2 Bildnissen. [XX u. 282 S.] gr. 8. 1907. Geh. n. ℳ 6.90, in Leinwand geb. n. ℳ 7.50.

Koenigsberger, Geh.-Rat Dr. **Leo,** Professor an der Universität Heidelberg, Carl Gustav Jacob Jacobi. Festschrift zur Feier der hundertsten Wiederkehr seines Geburtstages. Mit einem Bildnis und dem Faksimile eines Briefes. [XVIII u. 554 S.] gr. 8. 1904. In Leinwand geb. n. ℳ 16.—

Leibniz, G. W., nachgelassene Schriften physikalischen, mechanischen und technischen Inhalts. Herausgegeben und mit erläut. Anmerk. versehen von Dr. E. Gerland, Professor an der Kgl. Bergakademie zu Clausthal. Mit 200 Figuren im Text. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. XXI. Heft. [VI u. 256 S.] gr. 8. 1906. Geh. n. ℳ 10.—

Lobatschefskij, N. I., imaginäre Geometrie und Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale. Aus dem Russischen übersetzt und mit Anmerkungen herausgegeben von Dr. Heinrich Liebmann, Professor an der Universität Leipzig. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. Heft XIX. Mit 39 Figuren im Text und auf einer Tafel. [XI u. 187 S.] gr. 8. 1904. Geh. n. ℳ 8.—

Müller, Dr. **Felix,** Professor in Dresden, Zeittafeln zur Geschichte der Mathematik, Physik und Astronomie bis zum Jahre 1500, mit Hinweis auf die Quellen-Literatur. [IV u. 104 S.] gr. 8. 1892. In Leinwand geb. n. ℳ 2.40.

—— Vocabulaire Mathématique, français-allemand et allemand-français. Mathematisches Vokabularium, französisch-deutsch und deutsch-französisch. Enthaltend die Kunstausdrücke aus der reinen und angewandten Mathematik. [XV u. 316 S.] Lex.-8. 1900/1901. In Leinwand geb. n. ℳ 20.—




Hosted by Google

ABHANDLUNGEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN
WISSENSCHAFTEN MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN
BEGRÜNDET VON MORITZ CANTOR · HEFT XXVI. 2

ÜBER DAS LETZTE FERMATSCHE THEOREM

VON

BENNO LIND

IN FRANKFURT A. M.

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1910



ABHANDLUNGEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN
WISSENSCHAFTEN MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN
BEGRÜNDET VON MORITZ CANTOR · HEFT XXVI.2

ÜBER DAS LETZTE FERMATSCHE THEOREM

VON

BENNO LIND
IN FRANKFURT A. M.

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1910




Hosted by Google

Einleitung.

Im Jahre 1670 gab der Sohn PIERRE FERMATS, SAMUEL FERMAT, eine neue Ausgabe des Diophant (L 43)[1]) mit den von seinem Vater zur BACHETchen Diophantausgabe bemerkten Randnotizen heraus. Für die in diesen Randbemerkungen enthaltenen Sätze, die wohl zu den schönsten der Zahlentheorie gehören, hatte FERMAT vorgegeben, die Beweise zu besitzen, ohne sie jedoch jemals veröffentlicht zu haben.[2]) Erst allmählich ist man dazu gelangt, die Richtigkeit dieser Sätze exakt nachzuweisen. Nur die erste der Randbemerkungen, das sogenannte letzte FERMATsche Theorem, ist bis jetzt der vollständigen Durchführung eines allgemeinen Beweises entgangen. Es ist dies der Satz, daß die Summe zweier ganzzahligen n^{ten} Potenzen $(n > 2)$ niemals gleich der n^{ten} Potenz einer ganzen Zahl sein könne. Die betreffende Randbemerkung hat bei FERMAT folgenden Wortlaut:

„Cubum autem in duos cubos, aut quadrato-quadratum in duos quadratos, et generaliter nullam in infinitam ultra quadratum, potestam in duas ejusdem nominis fas est dividere, cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.“

FERMAT hatte also behauptet, hierfür einen „wahrhaft wunderbaren“ Beweis zu besitzen. Ob dies wirklich der Fall gewesen ist, oder ob sich der geniale Mathematiker hierbei getäuscht hat, möge dahingestellt bleiben (s. L 124). Jedenfalls besitzen wir bis heute keinen exakten Beweis, trotzdem FERMAT im siebzehnten Jahrhundert gelebt hat und wir heute über ein viel größeres Untersuchungsmaterial verfügen, als es bei ihm der Fall gewesen sein kann, trotzdem die Pariser Akademie das FERMATsche Problem zweimal, 1823 und 1850, und die Brüsseler Akademie 1883 zum Gegenstand eines Preisausschreibens gewählt haben. Wie aus den Compt. Rend.

---

[1]) Diese Angaben beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Abhandlung.

[2]) Der Satz, das $2^{2^k} + 1$ immer eine Primzahl sei, macht eine Ausnahme, da FERMAT hierfür keinen Beweis besaß, obgleich er an dessen Richtigkeit nicht zweifelte. Dieser Satz trifft auch nicht zu, denn, wie EULER gezeigt hat, ist schon $2^{2^5} + 1 = 4294967297 = 6700417 \cdot 641$ keine Primzahl mehr.

zu ersehen ist, erhielt die französische Akademie 1850 elf Zuschriften, von denen wohl nur die KUMMERsche verdient, einer eingehenden Betrachtung unterworfen zu werden, während fast alle anderen sogenannte „Beweise" enthielten, die zwar keine richtigen Beweise des FERMATschen Satzes waren, wohl aber Beweise dafür, daß den Herren Verfassern mehr an der Einlösung von 3000 Frs. lag, als an der Lösung eines wissenschaftlichen Problems. Noch mehr zeigte sich dieses Moment, da durch die große Summe der Dr. WOLFSKEHLschen Stiftung die Kenntnis des Problems in die weitesten Kreise drang und hier zu tätiger Mitarbeit anregte. Aus allen Gegenden, von allen Ständen, Bauräten, Buchhaltern, Pastoren, Apothekern, Lehrern usw. trafen Lösungen ein. Alle hatten sie einen Beweis gefunden, jeder einen andern, keiner einen richtigen. Mit Recht sagt Herr NEUBERG (L 136): „La race des quadrateurs est loin d'être éteinte. En est-il de même des FERMATistes?" — Die Zeiten der Kreisquadratur scheinen wiederkommen zu wollen. Es ist noch nicht abzusehen, welchen Aufschwung diese große kleine Literatur nehmen wird. Und dazu diese triviale Naivetät, mit der die Verfasser das Thema bearbeiten. In L 183 wird in einer Anmerkung gesagt: „Die meisten Autoren fallen mit der Tür ins Haus. Die Art, wie sie die Behandlung eines Gegenstandes beginnen, läßt den nicht unterrichteten Leser glauben, daß noch nie vorher jemand über diesen Gegenstand geschrieben habe." Das Gleiche bemerkt Herr NEUBERG an genannter Stelle. — Mit welchen bahnbrechenden Theorien diese Herrn Autoren kommen, zeigt L 66. Wie sich der Verfasser in einem Vorwort ausdrückt, stützt sich der dargebotene Beweis auf folgenden Grundgedanken: „Soll die Gleichung $ap + q = as$ für ganze Zahlen bestehen, so muß auch die Zahl q durch a teilbar sein. Kann man nachweisen, daß q die Zahl a als Faktor nicht enthalten kann, so hat man dadurch bewiesen, daß jene Gleichung für ganze Zahlen unmöglich bestehen kann." Solchen Ausführungen gegenüber ist es wirklich an der Zeit, klarzumachen, was das FERMATsche Problem, wenigstens in seiner elementaren Ausdehnung, bedeutet. Der Zweck der vorliegenden Abhandlung soll sein, alles auf diesem Gebiete in elementarer Hinsicht Geleistete, das ich in möglichst vereinfachter Form darstelle, und dem ich meine eigenen Untersuchungen[1]) beifüge, zusammenzufassen und einen Überblick zu geben, auf welchem Stand heute das FERMATsche Problem angelangt ist, und wo Wege zu einem Beweise offenstehen oder zum Teil angebahnt sind. Wie wir in dem anschließenden geschichtlichen Teil sehen werden, wäre oft viel Arbeit erspart worden, wenn die Bearbeiter des Themas Kenntnis von früheren

---

[1]) Dieselben sind, sofern sie nicht schon in einer früheren Abhandlung enthalten sind, mit * versehen.

Untersuchungen gehabt hätten. In diesem Teile berichtige ich auch verschiedene mir zur Hand gekommene „Beweise", muß jedoch, wie auch im ausführenden Teil, auf die eingehende Betrachtung der mittels der Theorie der n^{ten} Einheitswurzeln und der komplexen Zahlen gewonnenen Methoden, insbesondere auf die klassischen Arbeiten KUMMERS, verzichten, da diese einen zu großen Raum erforderten (ich verweise hier auf L 64). Leider konnten auch in diesem Teile nicht alle im Literaturverzeichnis enthaltenen Abhandlungen aufgenommen werden, da es mir nicht möglich war, sämtliche bezügliche Schriften zu erhalten.

Frankfurt am Main, 11. April 1909.

1. Über die Gleichung $x^n + y^n = z^n$.

I. Ist die Existenz der Gleichung

(1) $$x^n + y^n = z^n$$

in ganzen positiven Zahlen zu untersuchen, so kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit x, y und z als relativ prim annehmen; denn hätten zwei dieser Zahlen einen gemeinschaftlichen Faktor, so müßte ihn auch die dritte enthalten, und die Gleichung wäre durch die n^{te} Potenz dieses Faktors teilbar. Ferner kann man n als Primzahl annehmen, da jede Potenz von der Form a^{mn} gleich $(a^m)^n$ ist, und zwar muß n, wie wir im folgenden sehen werden, eine ungrade Primzahl sein. Aus (1) ist weiterhin ersichtlich, daß eine der Unbekannten grade und die beiden andern ungrade sein müssen. Nun besteht der Satz, dessen Herleitung hier wohl unnötig sein wird:

(2) Sind x und y teilerfremd und n eine ungrade Primzahl, so sind die beiden Faktoren von $x^n \pm y^n$, $x \pm y$ und $\frac{x^n \pm y^n}{x \pm y} = x^{n-1} \mp x^{n-2} y + \cdots + y^{n-1}$, entweder relativ prim, oder sie haben den größten gemeinschaftlichen Teiler n, der in $\frac{x^n \pm y^n}{x \pm y}$ nur in der ersten Potenz enthalten ist.

Angenommen, es sei $x^n + y^n = z^n$, so ist das Produkt der beiden Faktoren $x + y$ und $\frac{x^n + y^n}{x + y}$ gleich z^n. Es muß also, wenn keiner dieser Faktoren durch n teilbar ist, jeder von ihnen eine n^{te} Potenz sein. Im andern Falle wäre $x + y$ von der Form $n^{n-1} c^n$ und $\frac{x^n + y^n}{x + y}$ von der Form $n \gamma^n$. Dasselbe gilt für $z - x$ und $\frac{z^n - x^n}{z - x}$ und für $z - y$ und $\frac{z^n - y^n}{z - y}$, so daß wir den Satz aufstellen können:

(3) Ist die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ in ganzen Zahlen lösbar, und gelten die oben gestellten Bedingungen, so sind die Unbekannten x, y, z durch eine der folgenden drei[1]) Relationsgruppen darstellbar, wobei $\varphi(x, y)$, $\varphi(z, x)$,

[1]) Wegen der Homogenität von (1) in x und y wird der Fall, daß y durch n teilbar ist, gar nicht erwähnt.



$\varphi(z, y)$ die entsprechenden Ausdrücke für $\frac{x^n + y^n}{x + y}$, $\frac{z^n - x^n}{z - x}$, $\frac{z^n - y^n}{z - y}$ bezeichnen:

$$
\text{(I)} \begin{cases}
\text{(a)} & z - y = a^n, \quad z - x = b^n, \quad x + y = c^n, \\
\text{(b)} & \varphi(z, y) = \alpha^n, \quad \varphi(z, x) = \beta^n, \quad \varphi(x, y) = \gamma^n, \\
\text{(c)} & x = a\alpha, \quad y = b\beta, \quad z = c\gamma, \\
& x = \tfrac{1}{2}(c^n - b^n + a^n), \\
\text{(d)} & y = \tfrac{1}{2}(c^n + b^n - a^n), \\
& z = \tfrac{1}{2}(c^n + b^n + a^n);
\end{cases}
$$

$$
\text{(II)} \begin{cases}
\text{(a)} & z - y = n^{n\lambda - 1}a^n, \quad z - x = b^n, \quad x + y = c^n, \\
\text{(b)} & \varphi(z, y) = n\alpha^n, \quad \varphi(z, x) = \beta^n, \quad \varphi(x, y) = \gamma^n, \\
\text{(c)} & x = n^\lambda a\alpha, \quad y = b\beta, \quad z = c\gamma, \\
& x = \tfrac{1}{2}(c^n - b^n + n^{n\lambda - 1}a^n), \\
\text{(d)} & y = \tfrac{1}{2}(c^n + b^n - n^{n\lambda - 1}a^n), \\
& z = \tfrac{1}{2}(c^n + b^n + n^{n\lambda - 1}a^n);
\end{cases}
$$

$$
\text{(III)} \begin{cases}
\text{(a)} & z - y = a^n, \quad z - x = b^n, \quad x + y = n^{n\lambda - 1}c^n, \\
\text{(b)} & \varphi(z, y) = \alpha^n, \quad \varphi(z, x) = \beta^n, \quad \varphi(x, y) = n\gamma^n, \\
\text{(c)} & x = a\alpha, \quad y = b\beta, \quad z = n^\lambda c\gamma \\
& x = \tfrac{1}{2}(n^{n\lambda - 1}c^n - b^n + a^n), \\
\text{(d)} & y = \tfrac{1}{2}(n^{n\lambda - 1}c^n + b^n - a^n), \\
& z = \tfrac{1}{2}(n^{n\lambda - 1}c^n + b^n + a^n).
\end{cases}
$$

Hierbei sind a, b, c, α, β, γ zu zweien untereinander und zu n relativ prim. Eine der Größen a, b, c ist grade, die beiden andern sind ungrade, während α, β, γ alle drei ungrade sind. n^λ stellt die höchste Potenz von n dar, die in x bzw. z enthalten ist, die, wie sich später zeigen wird, den Mindestwert n^2 besitzt (s. III.).

Im folgenden wird allgemein der Fall (I) betrachtet. Nur wo die beiden andern Fälle bemerkenswerte Abweichungen bieten, werden diese besonders untersucht. —

II. Nach dem kleinen FERMATschen Satze bestehen die Kongruenzen:

$$x^n \equiv x, \; y^n \equiv y, \; z^n \equiv z \pmod{n}.$$

Da nach (1)

$$x^n + y^n - z^n \equiv 0 \pmod{n}$$

ist, so ist auch:

(4) $\quad k = x + y - z \equiv 0 \pmod{n}$. $\quad$ (L 6, 20, 103, 106, 107, 151, 156, 160)

Da aber

$$(5) \qquad 2k = c^n - b^n - a^n$$

ist, so muß ebenso die Kongruenz statthaben:

$$(6) \qquad c - b - a \equiv 0 \pmod{n}.$$

Nun findet man aus (Id), (4) und (5)

$$(7) \qquad \begin{cases} x \equiv a^n \equiv a \pmod{n} \\ y \equiv b^n \equiv b \quad " \\ z \equiv c^n \equiv c \quad " \end{cases} \qquad \text{(L 6, 103, 106, 107)}$$

und hieraus durch Potenzieren:

$$x^n \equiv a^n \pmod{n^2}$$
$$y^n \equiv b^n \quad "$$
$$z^n \equiv c^n \quad "$$

Durch Addition erhält man dann mit (1):

$$(8) \qquad \frac{c^n - b^n - a^n}{2} = k = x + y - z \equiv 0 \pmod{n^2}. \qquad \text{(L 6, 103, 106, 107)}$$

Nimmt man jetzt allgemein an, es sei

$$(9) \qquad k \equiv 0 \pmod{n^\lambda},$$

wobei λ eine ganze positive Zahl $\geqq 2$ bedeutet, so ergibt sich aus:

$$(10) \qquad \begin{cases} 2x = 2a\alpha = c^n - b^n + a^n = 2a^n + (c^n - b^n - a^n), \\ 2y = 2b\beta = c^n + b^n - a^n = 2b^n + (c^n - b^n - a^n), \\ 2z = 2c\gamma = c^n + b^n + a^n = 2c^n - (c^n - b^n - a^n), \end{cases} \qquad \text{(L 107)}$$

daß:

$$(11) \qquad \begin{cases} x \equiv a^n \pmod{n^\lambda} \\ y \equiv b^n \quad " \\ z \equiv c^n \quad " \quad . \end{cases} \qquad \text{(L 107)}$$

Jetzt verallgemeinere man die Kongruenzen (7) auf mod n^μ, dann erhält man durch Potenzieren:

$$(12) \qquad x^n \equiv a^n, \; y^n \equiv b^n, \; z^n \equiv c^n \pmod{n^{\mu+1}}.$$

(Man sieht leicht, daß die Modulpotenz $\mu + 1$ bei diesen drei Kongruenzen gleich sein muß.) Dadurch wird aber auch

$$c^n - b^n - a^n \equiv 0 \pmod{n^{\mu+1}}$$

und man erkennt, daß $\mu + 1 = \lambda$ sein muß. Es ergibt sich dann aus (11) und (12)

$$x^n \equiv x \pmod{n^\lambda}$$

und man hat allgemein die wichtigen Kongruenzen:

(13)*
$$\begin{aligned} x^{n-1} &\equiv 1 \pmod{n^\lambda} \\ y^{n-1} &\equiv 1 \quad \text{„} \\ z^{n-1} &\equiv 1 \quad \text{„} \;, \end{aligned}$$

wobei also λ mindestens gleich 2 ist. Ebenso erhält man aus (11) und (13):

(14)*
$$\begin{aligned} a^{n(n-1)} &= (z-y)^{n-1} \equiv 1 \pmod{n^\lambda} \\ b^{n(n-1)} &= (z-x)^{n-1} \equiv 1 \quad \text{„} \\ c^{n(n-1)} &= (x+y)^{n-1} \equiv 1 \quad \text{„} \;. \end{aligned}$$

Nun ist nach dem Vorhergehenden identisch:

(15)
$$\begin{aligned} k &= x + y - z \\ &= x - a^n \\ &= y - b^n \\ &= c^n - z \;; \end{aligned}$$
(L 6)

nach (I c) wird also k durch a, b und c teilbar sein, und man kann setzen:

(16)
$$c^n - b^n - a^n = 2k = 2n^\lambda abcd,$$

folglich wird:

(17)
$$\begin{aligned} x &= a^n + n^\lambda abcd, \\ y &= b^n + n^\lambda abcd, \\ z &= c^n - n^\lambda abcd, \end{aligned}$$

oder nach Teilung durch a, bzw. b und c:

(18)
$$\begin{aligned} \alpha - a^{n-1} &= n^\lambda bcd, \\ \beta - b^{n-1} &= n^\lambda acd, \\ \gamma - c^{n-1} &= -n^\lambda abd. \end{aligned}$$

Nach (12) besteht dann wegen Satz (2) die Kongruenz:

$$x \equiv a \pmod{n^{\lambda-1}},$$

in der man durch a dividieren kann. So entstehen die neuen bemerkenswerten Formeln:

(19)*
$$\begin{aligned} \alpha &\equiv 1 \pmod{n^{\lambda-1}}, \\ \beta &\equiv 1 \pmod{n^{\lambda-1}}, \\ \gamma &\equiv 1 \pmod{n^{\lambda-1}}, \end{aligned}$$

und:

(20)*
$$a^{n-1} \equiv b^{n-1} \equiv c^{n-1} \equiv 1 \pmod{n^{\lambda-1}},$$

welch letztere durch Potenzieren die Kongruenzen (14) bestätigen. —

III.* Bei den vorangegangenen Formeln war angenommen worden, es sei keine der Zahlen x, y, z durch n teilbar. Für den Fall, daß eine der-

selben durch n teilbar ist, für den wir (III) wählen, setze man an die Stelle von c^n, γ^n, $c\gamma$ resp. $n^{n\lambda-1}c^n$, $n\gamma^n$, $n^\lambda c\gamma$. Die Formeln für x und y, bzw. a und b ändern sich überhaupt nicht. Dagegen gilt bei (13) nur $z^n \equiv z \pmod{n^\lambda}$[1], was ja selbstverständlich ist; ebenso bei den entsprechenden Kongruenzen in (14) und (20). Da nun $k = n^{n\lambda-1}c^n - n^\lambda c\gamma$ ist, so kann z durch keine höhere Potenz von n teilbar sein als k und umgekehrt. — Kongruenzen wie

(21) $$a^n + b^n \equiv 0 \pmod{n^\lambda}$$

verstehen sich von selbst.

Nun steht es in Frage, ob (19) für γ auch hier gilt. Zum Zwecke dieser Untersuchung setze man die Werte von (IIId) in (1) ein:

$$[(a^n + b^n) + n^{n\lambda-1}c^n]^n = [n^{n\lambda-1}c^n + (b^n - a^n)]^n + [n^{n\lambda-1}c^n - (b^n - a^n)]^n$$

und entwickele dies in:

(1b) $$\begin{aligned}&(a^n + b^n)^n + (a^n + b^n)^{n-1} n^{n\lambda} c^n + n^{2n\lambda-1}P_1 \\ &= 2\,(b^n - a^n)^{n-1} n^{n\lambda} c^n + n^{2n\lambda-1}(P_2 + P_3),\end{aligned}$$

wobei $n^{2n\lambda-1}P_1$, $n^{2n\lambda-1}P_2$, $n^{2n\lambda-1}P_3$ die Fortsetzungen der Binomialentwicklungen darstellen. Da nun:

$$a^n + b^n = 2n^\lambda c\gamma - n^{n\lambda-1}c^n,$$

so ist die linke Seite von (1b) $\equiv 2^n n^{n\lambda} c^n \gamma^n \pmod{n^{\lambda(2n-1)}}$, woraus für (1b) hervorgeht:

$$2\,(b^n - a^n)^{n-1} n^{n\lambda} c^n \equiv 2^n n^{n\lambda} c^n \gamma^n \pmod{n^{\lambda(2n-1)}},$$

oder

$$2\,(b^n - a^n)^{n-1} \equiv 2^n \gamma^n \pmod{n^{n\lambda-\lambda}}.$$

Da aber

$$b^n - a^n = y - x$$

und nach (IIIa)

$$y \equiv -x \pmod{n^{n\lambda-1}},$$

so kann man y für $-x$ setzen und erhält

$$2(2y)^{n-1} \equiv 2^n \gamma^n \pmod{n^\lambda}$$

und folglich nach (13)

$$\gamma^n \equiv 1 \pmod{n^\lambda}$$

und wegen (2)

$$\gamma \equiv 1 \pmod{n^{\lambda-1}},$$

wodurch das in (19) erhaltene Resultat auch für den Fall (III) Gültigkeit erlangt. —

(22) Ist $x + y$ durch $n^{n\pi}$, so ist es auch durch $n^{n(\pi+1)-1}$ teilbar. (L 20, 21).

---

[1]) Nicht $z^{n-1} \equiv 1 \pmod{n^\lambda}$!

Es sei

$$x + y = n^{n\pi} e$$
$$z = n^{\pi} e',$$

so wird aus (1):

$$(n^{n\pi} e - y)^n + y^n = n^{n\pi} e'^n$$

oder

$$n^{2n\pi+1} e^2 \cdot P_1 + n^{n\pi+1} e \cdot y^{n-1} = n^{n\pi} e'^n,$$
$$n^{n\pi+1} e^2 \cdot P_1 + n e y^{n-1} = e'^n.$$

Es müßte also e' den Faktor n noch einmal enthalten, und man hätte, wenn man $e' = n e''$ setzt:

$$n^{n\pi+1} e^2 P_1 + n e y^{n-1} = n^n e''^n;$$

folglich wäre

$$e \equiv 0 \pmod{n^{n-1}}$$

d. h.:

$$x + y \equiv 0 \pmod{n^{n(\pi+1)-1}}.$$

(22) kann man auch aus der Tatsache herleiten, daß $x + y$ von der Form $n^{n-1} (n^{\pi} c)^n$ sein muß.

Durch gleichen Beweis erhält man:

(23) Ist $x + y$ durch $p^{n\pi+1}$ teilbar, wobei p eine von n verschiedene Primzahl ist, so ist es auch teilbar durch $p^{n(\pi+1)}$. (s. L. 20).

Dieser Satz folgt auch direkt aus (Ia)—(IIIa). —

IV. (24)* Ist $n = 2rm + 1$, und ist $p = 2r + 1$ eine Primzahl, so besteht für jede Zahl x immer die Kongruenz

(24) $$x^n \equiv x \pmod{p}.$$

Sei nämlich x nicht durch p teilbar, so ist nach dem FERMATschen Lehrsatz:

$$(x^m)^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

oder

$$x^{n-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Für eine durch p teilbare Zahl ist (24) selbstverständlich.

Ist nun $r = 1$, so kann n immer eine Primzahl sein. Es besteht demnach für jede ungerade Primzahl n die Kongruenz:

(25) $$x^n \equiv x \pmod{3}.$$ (L 6)

Hieraus kann man wie bei (4) folgern, daß wegen (1) die Kongruenz statt hat:

(26) $$x + y - z \equiv 0 \pmod{3},$$ (L 6)

und auf die gleiche Art und Weise, wie in II. geschildert worden ist, kann man dann die Kongruenzen herleiten:

(27)* $$k \equiv 0 \pmod{9}$$

(28)* $$\begin{cases} x \equiv a^n \pmod 9 \\ y \equiv b^n \quad " \\ z \equiv c^n \quad " \end{cases}$$

(29)* $$\begin{cases} x^n \equiv x \quad " \\ y^n \equiv y \quad " \\ z^n \equiv z \quad " \end{cases}$$

(30)* $$\begin{cases} (x+y)^n \equiv x+y \pmod 9 \\ (z-x)^n \equiv z-x \quad " \\ (z-y)^n \equiv z-y \quad " \end{cases}$$

(31)* $$\alpha \equiv \beta \equiv \gamma \equiv 1 \pmod 3.$$

Auch diese Kongruenzen können, wie in II., auf mod 3^λ erweitert werden.

Die hier für $r = 1$, also für $p = 3$ entwickelten Kongruenzen gelten für alle den in (24) gestellten Bedingungen genügenden Primzahlen p und n.

V.* (32)* Die Unbekannten müssen größer als das 54 fache Quadrat des Exponenten sein.

Stellt man den Ausdruck k nach (16), wobei $\lambda = 2$ angenommen wird, in die Gleichung

(33) $$x + y = z + n^2 abcd,$$

so sieht man unter der Annahme $y > x$, daß x nicht kleiner als $n^2 abcd$ sein kann, da sonst die rechte Seite größer als die linke ist. Es muß also x und a fortiori y und $z > n^2 abcd$ sein. Unter diesen Annahmen kann man mit Berücksichtigung von (16) und (27) folgende Skala aufstellen:

(34)* $$x + y > z > y > \frac{x+y}{2} > x > 9abcn^2 \geqq 9 \cdot 6n^2. —$$

(35)* $y - x$ muß größer als $2^n - 1$ sein.

Nach (Ia) ist

(36) $$y - x = b^n - a^n.$$

Der Mindestwert von a ist 1, der von $b > a$ ist 2. Es wäre demnach bei kleinsten a und b:

$$y - x = 2^n - 1,$$

während bei den andern Fällen die Differenz von y und x größer als die genannte sein muß. —

(37)* z liegt zwischen x und $x\frac{n}{n-1}$ oder zwischen y und $y\frac{n}{n-1}$. x und y liegen zwischen z und $\frac{n-1}{n}z$.

Besteht die Gleichung (1), so kann man durch Division eine ähnliche Gleichung in Brüchen erhalten. Angenommen, wir hätten die Gleichung[1])

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n + \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^n = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{u_1}{u_2}\right)^n = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n + \binom{n}{1}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{n-1}\frac{u_1}{u_2} + \cdots + \left(\frac{u_1}{u_2}\right)^n,$$

und es sei darin $\frac{x_1}{x_2} > n$, so folgt bei der Annahme

$$\frac{u_1}{u_2} \geqq 1$$

aus der Gleichung

$$\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^n = n\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{n-1}\frac{u_1}{u_2} + \cdots,$$

daß:

$$\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^n > n\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{n-1} > n \cdot n^{n-1}$$

d. h.

$$\frac{y_1}{y_2} > n.$$

Ist $\frac{x_1}{x_2}$ aber $\gtreqless n$, so muß nach:

$$\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^n > n\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{n-1} > \frac{x_1}{x_2} \cdot \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{n-1}$$

auch

$$\frac{y_1}{y_2} > \frac{x_1}{x_2} \quad \text{sein.}$$

Ist nun $\frac{y_1}{y_2} \gtreqless n$, so muß nach dem gleichen Verfahren $\frac{x_1}{x_2} > \frac{y_1}{y_2}$ und nach dem Vorhergehenden $\frac{y_1}{y_2} > \frac{x_1}{x_2}$ sein. Es kann daher nur eine dieser Zahlen $\gtreqless n$ sein, die andere aber $> n$. Daraus folgt wiederum, daß auch die erste $> n$ sein muß.

Dies kann aber nur gelten, wenn $\frac{u_1}{u_2} \geqq 1$ ist. Kann man nun (1) durch eine Zahl so dividieren, daß die erhaltenen Brüche $\leqq n$ sind und $\frac{z_1}{z_2} - \frac{x_1}{x_2}$ oder $\frac{z_1}{z_2} - \frac{y_1}{y_2} \geqq 1$ ist, so ist die ursprüngliche Gleichung unmöglich. Damit nun $\frac{u_1}{u_2}$ möglichst groß werde, sei der größte der Brüche $= n$, d. h., man hat die Gleichung durch $\frac{z}{n}$ zu dividieren. Damit jetzt die Gleichung möglich ist, muß z. B. $\frac{z_1}{z_2} - \frac{x_1}{x_2} < 1$ sein. Nun heißt die gefundene Gleichung:

$$\left(\frac{xn}{z}\right)^n + \left(\frac{yn}{z}\right)^n = n^n.$$

---

1) Der erste Teil des folgenden Verfahrens ist L 59 entnommen.

Es muß daher

$$n - \frac{xn}{z} < 1 \tag{37a}$$

oder

$$z < \frac{xn}{n-1}$$

sein, damit die Gleichung (1) möglich sei. Da $z > x$ ist, kann man die Grenzen für z ziemlich genau aus x und n bestimmen, denn man hat:

$$x\frac{n}{n-1} > z > x\frac{n}{n}. \tag{38)*$$

Umgekehrt lassen sich ebenso enge Grenzen für x ziehen, denn aus (37a) folgt auch:

$$z\frac{n}{n} > x > z\frac{n-1}{n}. \tag{39)*$$

Die entsprechenden Relationen lassen sich in gleicher Weise für y ableiten.

Aus (37a) gehen folgende Ungleichungen hervor:

$$\begin{aligned} z &> n(z-x) = nb^n \\ y &> nb^n - a^n \\ x &> (n-1)\,b^n. \end{aligned} \tag{40)*$$

Setzt man hier die kleinsten Werte von a und b, nämlich 1 und 2 ein, so erhält man:

$$z > n\,2^n; \qquad y > n\,2^n - 1; \qquad x > (n-1)\,2^n. \tag{41)*$$

So hat man z. B. bei $n = 101$ für die kleinste Zahl:

$$x > 253530120045645880299340641075200,$$

während aus (34) nur $x > 550854$ hervorgeht. Für die Fälle (II) und (III) sieht man leicht, daß sogar $x > n^{2n}$ sein muß. —

VI. Man kann immer drei Zahlen x, y, z folgendermaßen in Summen von drei anderen zerlegen:

$$z = c' + b' + a', \quad y = c' + b', \quad x = c' + a' \qquad \text{(L 15, 179)} \tag{42}$$

wobei c', b', a' die Werte besitzen:

$$a' = a^n, \qquad b' = b^n, \qquad c' = k. \tag{43}$$

Drückt man z durch diese Werte in (1) aus, so wird:

$$(z - b')^n + (z - a')^n = z^n \tag{44}$$

oder

$$z^n - \binom{n}{1} z^{n-1}(b' + a') + \cdots - (b'^n + a'^n) = 0.$$

Ebenso kann man (1) durch y und x darstellen und erhält zwei (44) ähnliche Gleichungen, aus denen man erkennt, daß:

$$\begin{aligned} b'^n + a'^n &\equiv 0 \pmod{z} \\ (b' - a')^n + a'^n &\equiv 0 \pmod{y} \\ (b' - a')^n - b'^n &\equiv 0 \pmod{x}. \end{aligned} \tag{45}$$ — (L 15)

Da x, y und z keinen gemeinschaftlichen Teiler haben, so kann man annehmen, daß:

(46) $$z = a_1 x + b_1 y,$$ (L 126)

und man erhält aus $x^n + y^n = (a_1 x + b_1 y)^n$ oder:

$$(a_1^n - 1) x^n + (b_1^n - 1) y^n + \binom{n}{1} a_1^{n-1} x^{n-1} b_1 y + \cdots = 0,$$

daß:

(47) $$\begin{aligned} a_1^n &\equiv 1 \pmod{y} \\ b_1^n &\equiv 1 \pmod{x}. \end{aligned}$$ (L 126)

(47) gilt auch für Brüche a_1 und b_1, wenn man z. B. in der Gleichung:

(48) $$c_1 z = a_1 x + b_1 y$$

durch c_1 dividiert. Solche Gleichungen wie (45) und (48) kann man leicht aus (I) usw. finden. Es genügt auch, wenn man durch beliebige Werte von a_1 und b_1 in der Gleichung

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$

die Größe c_1 feststellt und dann aus

$$\left(\frac{a_1 z}{c_1}\right) x + \left(\frac{b_1 z}{c_1}\right) y = z$$

die entsprechende Relation (47) ableitet. —

Aus der Entwickelung der Gleichung

$$x^n + (c^n - x)^n = c^n \gamma^n$$

erhält man die Kongruenz:

(49)* $$\gamma^n - n x^{n-1} \equiv 0 \pmod{c^n}$$

und ebenso

$$\gamma^n - n y^{n-1} \equiv 0 \pmod{c^n}.$$

Auf ähnliche Weise erhält man:

(50)* $$\begin{aligned} \alpha^n - y^{n-1} &\equiv 0 \pmod{z}, \\ \beta^n - x^{n-1} &\equiv 0 \quad \text{„} \quad . \end{aligned}$$

Aus (49) und (50) gehen wieder nacheinander hervor:

(51)* $$\gamma^n - n\alpha^n \equiv \gamma^n - n\beta^n \equiv 0 \pmod{c},$$

(52)* $$\beta^n - \alpha^n \equiv 0 \quad \text{„}$$

(53)* $$\beta^n - y^{n-1} \equiv \alpha^n - x^{n-1} \equiv 0 \pmod{c},$$

(54)* $$x \equiv -y \equiv a^n \equiv -b^n \quad ,, \quad .$$

Analoge Kongruenzen kann man mod a und mod b aufstellen.

Im Falle (III) ändern sich einige dieser Kongruenzen wie:

(49a)* $$\gamma^n - x^{n-1} \equiv 0 \pmod{n^{n\lambda-1} c^n},$$

(51a)* $$\gamma^n - \alpha^n \equiv 0 \pmod{n^\lambda c}. \text{ —}$$

VII. Seien $x, y, -z$ die drei Wurzeln der Gleichung:

(55) $$x^3 - kx^2 + k_2 x - k_3 = 0, \qquad \text{(L 103)}$$

wobei die Koeffizienten k, k_2, k_3 dargestellt werden durch:

(56) $$\begin{aligned} k &= x + y - z, \text{ grade,} \\ k_2 &= xy - yz - xz, \text{ ungrade,} \\ k_3 &= -xyz, \text{ grade,} \end{aligned} \qquad \text{(L 103, 104)}$$

und setzt man:

(57) $$s_n = x^n + y^n + (-z)^n,$$

so ist bekanntlich:

(58) $$s_n - ks_{n-1} + k_2 s_{n-2} - k_3 s_{n-3} = 0.$$

Wegen (57) und (1) wird dann:

(59) $$-ks_{n-1} + k_2 s_{n-2} - k_3 s_{n-3} = 0.$$

Da nun wiederum:

(60) $$k(s_{n-1} - ks_{n-2} + k_2 s_{n-3} - k_3 s_{n-4}) = 0,$$

so ergeben (59) und (60):

(61)* $$(k_2 - k^2) s_{n-2} + (k k_2 - k_3) s_{n-3} - k k_3 s_{n-4} = 0.$$

LEGENDRE gibt für s_n die WARINGsche Formel:

(62) $$\begin{aligned} s_n = k^n - n k_2 k^{n-2} + n k_3 k^{n-3} + \frac{n(n-3)}{2} k_2{}^2 k^{n-4} - \frac{n(n-4)}{2} 2 k_2 k_3 k^{n-5} \\ + \frac{n(n-5)}{2} k_3{}^2 k^{n-6} - \frac{n(n-4)(n-5)}{2\cdot 3} k_2{}^3 k^{n-6} + \frac{n(n-5)(n-6)}{2\cdot 3} 3 k_2{}^2 k_3 k^{n-7} \\ - \frac{n(n-6)(n-7)}{2\cdot 3} 3 k_2 k_3{}^2 k^{n-8} + \frac{n(n-7)(n-8)}{2\cdot 3} k_3{}^3 k^{n-9} + \cdots. \end{aligned}$$

MUIR stellt die gleiche Formel unter die Form:

(63) $$s_n = k^n - \sum (-1)^{r+s+t-1} \cdot \frac{n(r+s+t-1)!}{r!\, r!} (-\beta)^r \cdot (\gamma)^s \cdot (\delta)^t, \qquad \text{(L 135)}$$

wobei r, s, t der Bedingung $2r + 3s + 4t = n$ genügen müssen, und β, γ, δ die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \beta &= x^2 + xy + y^2 - xz - yz + z^2, \\ \gamma &= x^2 y + xy^2 - x^2 z + xz^2 - y^2 z + yz^2 - 2xyz, \\ \delta &= -xyz(x + y - z) \quad \text{bezeichnen. —} \end{aligned}$$

Sei

(64)* $$x = fn^2 + f', \quad y = gn^2 + g', \quad z = hn^2 + h',$$

so kann man nach (8) setzen:

$$f' + g' - h' = m_1 n^2,$$

und die Gleichung (1) erhält die Form:

(65)* $$(fn^2 + f')^n + (gn^2 + g')^n = [(h - m_1) n^2 + f' + g']^n.$$

Durch Entwicklung dieses Ausdrucks erhält man dann:

(66)* $$(f' + g')^n - f'^n - g'^n \equiv 0 \pmod{n^3}.$$

Wählt man statt (64) die Gleichung (17), so wird:

(67) $$(a^n + b^n)^n - a^{n^2} - b^{n^2} \equiv 0 \pmod{n^{\lambda+1}}.$$ (s. L 160)

Nimmt man jetzt

$$x + y \equiv z \pmod{n^\lambda},$$

so wird durch Potenzieren

$$(x + y)^n \equiv z^n \pmod{n^{\lambda+1}}$$

oder

(68) $$(x + y)^n - x^n - y^n \equiv 0 \pmod{n^3}.$$ (L 6)

Nun ist aber

(69) $$(x + y)^n - x^n - y^n = nxy(x + y)P.$$ (L 20, 23, 114, 129)

Ist dann keine der Zahlen x, y, $z \equiv x + y$ durch n teilbar, so muß P durch n^2 teilbar sein. Kann man nun nachweisen, daß dieses in x und y homogene Polynom P vom Grade $n - 3$ nicht durch n oder gar n^2 teilbar sein kann, so muß der Faktor n^2 in einer der Zahlen x, y, z enthalten sein. (s. L 129)

Der Ausdruck (69) ist besonders von Cauchy, Glaisher, Muir, Catalan untersucht worden. Diese Untersuchungen in ihren Einzelheiten nochmals zu beschreiben, würde hier zu weit führen. Ich gebe daher nur die einschlägigen Resultate an:

(70) $$P \equiv 0 \pmod{x^2 + xy + y^2},$$ (L 23)

und wenn n von der Form $6m + 1$ ist, so ist P sogar durch $(x^2 + xy + y^2)^2$ teilbar. (L 23)

(71) $$Q_r = (x + y)^r + (-x)^r + (-y)^r,$$

(72) $$6\, Q_r = 3\, Q_2 Q_{r-2} + 2\, Q_3 Q_{r-3}.$$ (L 57, 135)

Da

(73) $$\begin{aligned} xy(x + y) &= \tfrac{1}{3}[(x + y)^3 + (-x)^3 + (-y)^3], \\ x^2 + xy + y^2 &= \tfrac{1}{2}[(x + y)^2 + (-x)^2 + (-y)^2], \\ (x^2 + xy + y^2)^2 &= \tfrac{1}{2}[(x + y)^4 + (-x)^4 + (-y)^4], \end{aligned}$$ (L 56, 57, 135)

so ist Q_n immer durch $Q_2\, Q_3$ teilbar, und wenn $n = 6m + 1$ ist, durch Q_4.

(74) $$P = H_1 x^{n-3} + H_2 x^{n-4} y + \cdots + H_1 y^{n-3},$$ (L 19, 20, 21)

$$H_r = \frac{1}{n}\left[\binom{n-r}{r} \pm 1\right],$$ wobei das Zeichen + bei ungeradem r gilt.

(75)* $$Q_n \equiv 0 \pmod{k}.$$

MUIR gibt für Q_n die Formel: (L 135)

(76) $$(x+y)^{2m+1} - x^{2m+1} - y^{2m+1} = \frac{2m+1}{1}\beta^{m-1}\gamma + \frac{2m+1}{3}\cdot\frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}\beta^{m-4}\gamma^3 + \frac{2m+1}{5}\cdot\frac{(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\beta^{m-7}\gamma^5 + \cdots +,$$

wobei $\beta = x^2 + xy + y^2$ und $\gamma = xy(x+y)$ ist.

Setzt man in (62) z und daher auch k_3 gleich Null, so erhält man $k^n - s_n = Q_n$ unter der Form:

(77) $$Q_n = \sum_{r=1}^{r=\frac{n-1}{2}} (-1)^{r+1}\frac{n}{r}\binom{n-r-1}{r-1}(x+y)^{n-2r} y^r y^r.$$ (L 84, 103, 106, 107, 151, 152)

$(x+y-z) - x^n$ ist durch $z-y$, ebenso $(x+y-z)^n - y^n$ durch $z-x$ und $(x+y-z)^n + z^n$ durch $x+y$ teilbar. Da aber $(x+y-z)^n - x^n - y^n + z^n = (x+y-z)^n$ ist, so muß man die Gleichung aufstellen können:

(78) $$(x+y-z)^n = (x+y)(z-x)(z-y)P_1.$$ (L 19, 25, 94, 95)

Kann man nachweisen, daß $(x+y-z)^n$ nie durch $x+y$, $z-x$ und $z-y$ zugleich teilbar sein kann, so ist dadurch das FERMATsche Theorem bewiesen. —

Ich gebe auch hier wieder nur die Resultate über den Ausdruck

(79) $$(x+y+z)^n - x^n - y^n - z^n:$$

(80) $$\begin{cases}(x+y+z)^n - x^n - y^n - z^n \text{ ist immer teilbar durch} \\ \frac{1}{3}[(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3].\end{cases}$$ (L 57, 135)

Nehmen wir an $(k = x+y+z)$, es sei:

(81) $$(x+y+z)^n - x^n - y^n - z^n = (x+y)(y+z)(z+x)P_1,$$

so ist:

(82) $$\begin{aligned}P_1 = {} & k^{n-3} + R_1 k^{n-4} + R_2 k^{n-5} + \cdots + R_{n-3} \\ & + y^{n-3} + T_1(x^2, z^2) y^{n-5} + T_2(x^2, z^2) y^{n-7} + \cdots + T_{\frac{n-3}{2}}(x^2, z^2) \\ & + x^{n-3} + T_1(y^2, z^2) x^{n-5} + T_2(y^2, z^2) x^{n-7} + \cdots + T_{\frac{n-3}{2}}(y^2, z^2),\end{aligned}$$ (L 19)

wobei 1) R_r die Summe aller in x, y, z möglichen Kombinationen von der r^{ten} Dimension darstellt, 2) $T_r(x, z) = x^r + zx^{r-1} + \cdots + z^{r-1}x + z^r$.

Der entwickelte Ausdruck (79) wird in (62) und (63) durch $k^n - s_n$ dargestellt.

Auf Grund einer ähnlichen Formel findet Herr WENDT, daß:

$$(83)\quad (c^n - b^n - a^n)^n = 2^2 n c^n b^n a^n \sum_{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=\frac{n-3}{2}} \frac{(n-1)!}{(2\alpha_1+1)!\,(2\beta_1+1)!\,(2\gamma_1+1)!} c^{2n\alpha_1} b^{2n\beta_1} a^{2n\gamma_1}. \quad \text{(L 176)}$$

VIII.* Man betrachte nochmals die Gleichung:

$$(44)\quad z^n - \binom{n}{1} z^{n-1}(a' + b') + \binom{n}{2} z^{n-2}(a'^2 + b'^2) - \cdots - (a'^n + b'^n) = 0.$$

Diese Gleichung hat die Form:

$$(84)\qquad z^n - C_1 z^{n-1} + C_2 z^{n-2} - \cdots - C_n = 0,$$

worin
$$C_r = \binom{n}{r}(a^r + b^r).$$

Setzt man
$$S_r = z_1{}^r + z_2{}^r + z_3{}^r + \cdots + z_n{}^r,$$

so besteht für jedes $r \geqq 0$ die Kongruenz:

$$(85)^*\qquad S_r \equiv 0 \pmod{n}.$$

Denn alle C_r bis $r = n - 1$ sind durch n teilbar, folglich ist auch:

$$S_1 = C_1 \equiv 0 \qquad \pmod{n}$$
$$S_2 = C_1 S_1 - 2\,C_2 \equiv 0 \quad ,,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und ebenso $S_n = C_1 S_{n-1} - C_2 S_{n-2} + \cdots + n\,C_n \equiv 0 \pmod{n}$.
Für ein $r > n$ hat man

$$S_r = C_1 S_{r-1} - C_2 S_{r-2} + \cdots \pm S_{r-n} C_n.$$

Alle Glieder der rechten Seite bis auf $S_{r-n}C_n$ sind durch n teilbar. Ist nun $r - n < n$ (d. h. r noch nicht größer als $2n$), so ist auch

$$S_{r-n} \equiv 0 \pmod{n},$$

und (85) gilt für alle r von 1 bis $2n$. Durch den gleichen Schluß gelangt man dazu, daß (85) auch für alle r von $2n$ bis $3n$, von $3n$ bis $4n$ usw., d. h. für alle $r \geqq 0$ Geltung hat. —

IX. Bekanntlich ist immer

$$4\,\varphi(x, y) = X^2 \pm n\,Y^2. \qquad \text{(L 103)}$$

Auf (1) angewandt, wird daraus:

$$(86)\quad \begin{aligned} 4\,\gamma^n &= X^2 + n\,Y^2, \text{ wenn } n = 4m - 1, \\ 4\,\gamma^n &= X^2 - n\,Y^2, \text{ wenn } n = 4m + 1. \end{aligned}$$



Im Falle (I) darf X nicht durch n teilbar sein. Im Falle (III) muß n in X enthalten sein, und man hat:

$$4\,n\gamma^n = (X_1 n)^2 \pm n\,Y^2,$$

woraus wieder hervorgeht:

$$4\,\gamma^n = n\,X_1{}^2 \pm Y^2.$$

Gleiches gilt für $\varphi(z, x)$ und $\varphi(z, y)$. (S. auch *Journ. für Math.* 27, 1844 p. 88 und L 25.) —

X. Multipliziert man jede der Gleichungen (15) entsprechend mit x^n, y^n, z^n und addiert sie, so erhält man:

$$k(x^n + y^n - z^n) = z^n(z - c^n) + x^n(x - a^n) + y^n(y - b^n),$$

und nach (1) ergibt sich:

(87) $$z^{n+1} + x^{n+1} + y^{n+1} = (zc)^n + (xa)^n + (yb)^n. \qquad \text{(L 6)}$$

Kann man die Unmöglichkeit einer solchen Gleichung in ganzen positiven Zahlen > 1 nachweisen, so geht daraus auch die Unmöglichkeit von (1) hervor.

Hätte die Gleichung (1) Bestand, und setzte man darin:

(88) $$x^n = x_1, \quad y^n = y_1, \quad z^n = x^n + y^n = x_1 + y_1,$$

so müßte die Gleichung existieren:

(89) $$x_1 y_1 (x_1 + y_1) = z_1{}^n \qquad \text{(L 6)}$$

aus deren Möglichkeit man wiederum Folgerungen auf die Möglichkeit von (1) ziehen kann. —

Nach (1) ist $x = \sqrt[n]{z^n - y^n}$ oder $\frac{x}{z} = \sqrt[n]{1 - \left(\frac{y}{z}\right)^n}$. Es muß daher der Satz bestehen:

(90)* Besitzt $\sqrt[n]{1 - x_1{}^n}$ keine rationalen Wurzeln, dann hat auch (1) keine ganzzahligen Lösungen und umgekehrt. —

XI. (91)* Ist (1) in ganzen Zahlen unmöglich, dann auch in gebrochenen.

Denn wäre:

$$\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \left(\frac{y}{y_1}\right)^n = \left(\frac{z}{z_1}\right)^n,$$

so wäre auch:

$$(xy_1z_1)^n + (x_1yz_1)^n = (x_1y_1z)^n. \text{ —}$$

(92) Ist (1) für einen positiven Exponenten n unmöglich, dann auch für denselben Exponenten mit negativem Vorzeichen. (L 172)

Aus $$x^{-n} + y^{-n} = z^{-n}$$

geht hervor, daß auch:

$$(yz)^n + (xz)^n = (xy)^n. \text{ —}$$



XII.* Eine der Unbekannten muß, wie schon gesagt, grade und die beiden andern von einer der Formen $4m \pm 1$ sein. Da nun eine Gleichung wie

$$(4\alpha_1 \pm 1)^n + (4\beta_1 \pm 1)^n = (2\gamma_1)^n$$

auf der linken Seite nur durch 2, aber nicht durch 4 teilbar ist, so kann sie nicht bestehen; ebenso $(4\gamma_1 \pm 1)^n - (4\beta_1 \mp 1)^n = (2\alpha_1)^n$. Es sind daher nur folgende Formeln möglich:

(93)*
$$\begin{aligned}(4\alpha_1 + 1)^n + (4\beta_1 - 1)^n &= (2\gamma_1)^n,\\ (4\gamma_1 + 1)^n - (4\beta_1 + 1)^n &= (2\alpha_1)^n,\\ (4\gamma_1 - 1)^n - (4\beta_1 - 1)^n &= (2\alpha_1)^n,\end{aligned}$$

und aus (Ia) folgt, daß z. B. für die erste dieser Gleichungen:

(94)* $$\alpha_1 + \beta_1 \equiv 0 \pmod{2^{n-2}}.$$

Ebenso sind wegen (27) nur die Formen möglich:

(95)*
$$\begin{cases}(3\alpha_1 + 1)^n + (3\beta_1 - 1)^n = (9\gamma_1)^n,\\ (3\gamma_1 + 1)^n - (3\beta_1 + 1)^n = (9\alpha_1)^n,\\ (3\alpha_1 + 1)^n + (3\beta_1 + 1)^n = (3\gamma_1 - 1)^n,\\ (3\alpha_1 - 1)^n + (3\beta_1 - 1)^n = (3\gamma_1 + 1)^n.\end{cases}$$

Und auch hier ist nach (Ia) für die erste Gleichung:

(96)* $$\alpha_1 + \beta_1 \equiv 0 \pmod{3^{n-1}}. \text{ —}$$

XIII. (97) Ist m eine beliebige Zahl $\geqq 1$, x' Primzahl, $z' - y' > 1$, so ist die Gleichung $x'^m = z'^n - y'^n$ unmöglich. (s. L 165)

Da $z'^n - y'^n = x'^m$ ist, so muß einer der beiden Faktoren $z' - y'$ und $\varphi(z', y')$ gleich 1 und der andere gleich x'^m sein. Da $\varphi(z', y') = 1$ nicht bestehen kann, so ist nur $z' - y' = 1$ anzunehmen.

Auf gleiche Weise zeigt man:

(98) Ist $m \geqq 1$, z' Primzahl, so ist $z'^m = x'^n + y'^n$ unmöglich. (s. L 165)

Nun ist doch

$$y + z = c^n + b^n, \quad x + z = c^n + a^n, \quad y - x = b^n - a^n.$$

Es folgen daher die Sätze:

(99)* $y + z$ und $x + z$ können nicht gleich einer Primzahl oder gleich der Potenz einer Primzahl sein.

(100)* Ist $b - a > 1$, so kann $y - x$ nicht gleich einer Primzahl oder gleich der Potenz einer Primzahl sein. —

Aus (Ia) kann man direkt den Satz folgern:

(101) Keine der Zahlen $x + y$, $z - y$, $z - x$ kann eine Primzahl sein, mit Ausnahme des Falles $z - y = 1$. — (L 1, 20)



XIV. (102) Die Gleichung

$$x^n \pm y^n = 2^x$$

ist unmöglich für jedes ungrade n. (s. L 9)

Da x und y als relativ prim anzusehen sind, so müssen sie ungrade sein, und $x \pm y$ ist eine grade Zahl. $\varphi(x, y)$ ist aber ungrade. Nun kann doch nicht eine ungrade Zahl Teiler einer Potenz 2^x sein, wenn nicht $\varphi(x, y) = 1$, was ausgeschlossen ist, denn es kann nicht $x^n \pm y^n = x \pm y$ sein. —

(103)* Die Gleichung

$$x^n \pm y^n = n^{n\lambda}$$

ist unmöglich.

Sei

$$x^n + y^n = n^{n\lambda},$$

so hat man nach (IIId), wobei $z = n^\lambda$ ist:

$$2z = 2n^\lambda = n^{n\lambda - 1} + b^n + a^n;$$

es müßte also

$$2n^\lambda > n^{n\lambda - 1}$$

sein, was für jedes λ unmöglich ist, wenn $n \geqq 3$.

Ebenso hat man für $z^n - y^n = n^{\lambda n}$:

$$2n^\lambda = c^n - b^n + n^{n\lambda - 1},$$

worin $c^n - b^n$ positiv ist und man denselben Schluß wie oben ziehen kann.

Aus diesen Beweisen resultiert auch der Satz:

(104)* Keine der Zahlen $x + y$, $z - y$, $z - x$ kann eine Potenz von n sein. —

XV. (105). Ist $y > x$, so kann weder y noch z eine Primzahl oder die Potenz einer Primzahl sein. (s. L 1, 20, 21, 45, 69, 70, 126)

Angenommen, y sei eine Primzahl, so muß, wie bei (97), $z - x = 1$ sein, was aber nicht zutreffen kann, da $z > y > x$, der Unterschied zwischen z und x also mindestens 2 sein muß.

Sei nun z eine Primzahl, so gelangt man durch den bei (97) angewandten Schluß zu der unmöglichen Relation $x + y = 1$.

Nehmen wir jetzt an, x sei eine Primzahl, so gelangen wir wie bei y zu der Relation:

(106a) $$z - y = 1.$$ (L 20, 21, 69, 70)

Unter Berücksichtigung von (8), (16), (27) erhält man dann:

(106b)* $$x \equiv 1 \pmod{9cbn^2}.$$

Ähnliches folgt aus (69) und (70), denn:

(106c) $$x^n - 1 = (y+1)^n - y^n - 1^n \equiv 0 \pmod{nzy(y^2 + y + 1)}. —$$ (L 20)

(106d) Jeder Primfaktor von $z - x$ ist es auch von $x - 1$. (L 20)

Denn sei

$$y^n = (y+1)^n - x^n = (y + 1 - x)E,$$

so muß jeder Primfaktor von $y + 1 - x$ auch ein solcher von y^n oder vielmehr von y sein, d. h. auch von $y - (y + 1 - x) = x - 1$. (106d) geht auch aus (Ia) und (106b) hervor. —

(106e) $2x - 1$ und $2y + 1$ haben keinen gemeinschaftlichen Faktor. (L 20)

Denn $x + y$ und $y + 1 - x$ sind relativ prim und daher auch ihre Summe und Differenz untereinander. —

Aus der Potenzentwickelung von

$$x^n = (y+1)^n - y^n$$

findet man:

(106f)
$$\sqrt[n]{n(y+1)^{n-1}} > x > \sqrt[n]{ny^{n-1}},$$
$$\left(x\sqrt[n-1]{\frac{x}{n}}\right) > y > \left(-1 + x\sqrt[n-1]{\frac{x}{n}}\right),$$ (L 20)

wodurch sich x und y auseinander ziemlich genau bestimmen. —

XVI.* (107)* Die Gleichung $x^n + y^n = (y+2)^n$ ist in teilerfremden Zahlen $x, y, y+2$ unmöglich.

y und $y + 2$ müssen ungrade und x grade sein. Man kann deshalb setzen:

$$(2x_1)^n + y^n = (y+2)^n,$$

oder

$$2^n x_1{}^n = ny^{n-1} \cdot 2 + \binom{n}{2} y^{n-2} \cdot 2^2 + \cdots + 2^n.$$

Alle Glieder bis auf das erste der rechten Seite enthalten den Faktor 2^2. Da aber $2ny^{n-1}$ nicht durch 4 teilbar sein kann, so kann die Gleichung (107) nicht bestehen. — Der Satz (107) geht auch direkt aus (Ia) hervor, und man kann für numerische Bestimmungen (Ia) in der Form ausdrücken, daß in $x^n + y^n = (y + a')^n$ die Zahl a' nicht gleich 3, 4, 5 usw., überhaupt keine Zahl sein kann, die nicht eine n^{te} Potenz ist. — (107) gilt natürlich nicht, wenn x, y, z einen gemeinschaftlichen Teiler haben. Herr Umfahrer glaubt z. B. (L 171), daß der Satz (107) auch für $(2x)^n + (2y)^n = (2y+2)^n$ gilt, was aber hieraus nicht bewiesen werden kann. —

(108)* Die Gleichung $x^n + (x + su)^n = (x + tu)^n$ ist unmöglich.

Wäre diese Gleichung möglich, so hätten $z - y = u(t - s)$ und $z - x = tu$ einen gemeinschaftlichen Faktor, was bei teilerfremden x, y, z mit Ausnahme von $u = 1$ ausgeschlossen ist. Haben aber x, y, z einen gemeinschaftlichen Teiler, so ergeben sie, durch diesen gekürzt, wieder eine Gleichung von der



Form (108) mit relativ primen Unbekannten.[1]) — Der Satz (108) kann auch in der Form ausgesprochen werden:

(109)* Außer der natürlichen Zahlenreihe ($u = 1$) gibt es keine arithmetische Progression, in der drei beliebige Glieder der Gleichung (1) genügen.

Kann man nun nachweisen, daß die drei Zahlen x, y, z Glieder einer arithmetischen Progression mit der Differenz $u > 1$ sein müssen, so ist nach (109) die Unmöglichkeit von (1) erwiesen.

2. Geschichtliche Übersicht.

Der erste bekannte Versuch, das FERMATsche Theorem allgemein zu behandeln, ist in einem Manuskript der Pariser Bibliothek enthalten, das man erst MALEBRANCHE zuschrieb (s. L. 61), dann aber als eine Arbeit CLAUDE JAQUEMETS (1651—1729) erkannte. Die kleine Schrift (L 68) ist insofern bemerkenswert, als darin zum erstenmal der Satz (2) aufgestellt und bewiesen wird, zu dessen Beweis man später die WARINGsche Formel benutzte. Wäre der Verfasser einen Schritt weiter gegangen, so hätte er schon die wichtigen Formeln (I)—(III) erhalten, die erst anderthalb Jahrhunderte später aufgestellt wurden. Bei diesen Formeln ist es eine merkwürdige Tatsache, daß die meisten ihrer Aufsteller sie unabhängig voneinander gefunden haben (ABEL, BARLOW, KUMMER für $n = 2\lambda$, LEGENDRE, LINDEMANN, F. LUCAS, STÄCKEL). Der erste von ihnen ist BARLOW. Er gibt in seiner „Theory of Numbers" (L 5) einen Beweis, der an der Annahme scheitert, daß $\frac{t^{n-1}}{sr} - \frac{s^{n-1}}{tr} - \frac{r^{n-1}}{st}$ keine ganze Zahl sein könne, wenn r, s, t relativ prim sind (siehe L 166). Daß in diesem Beweise die Formeln (I)—(III) und (16) enthalten sind, ist wohl den wenigsten bekannt gewesen, denn die meisten gingen von LEGENDRES oder ABELS grundlegenden Arbeiten aus. LEGENDRE hat eine große Zahl der in I., II. und VII. aufgeführten Formeln gefunden und sie mit ihren Beweisen in L 103 veröffentlicht. ABEL teilt in seinem Briefe an HOLMBOE am 24. Juni 1823 (L 1) ohne Beweise die Formeln (I)—(III) und verschiedene andere Sätze mit, die später zum größten Teil bewiesen worden sind, zum Teil heute noch offen stehen, zum kleinen Teil aber unrichtig sind. — Herr LINDEMANN bezeichnet in der Berichtigung seines ersten Beweises (L 106), bei dem er die ABELschen Formeln (I)—(III) herleitet, die Arbeit insofern als einen Fortschritt, als diese Formeln darin zum erstenmal bewiesen worden seien. Ebenso beweist Herr STÄCKEL 1903 (L 159) zum hundertsten Geburts-

[1]) Natürlich gilt dies nicht, wenn nach der Kürzung drei Zahlen entstehen, die nur in der natürlichen Zahlenreihe vorkommen, und das kann nur der Fall sein, wenn x, y, z durch u teilbar sind.



tage ABELS nochmals diese Formeln, obwohl dieselben fast 100 Jahre vorher, 12 Jahre vor den ABELschen Untersuchungen festgestellt worden sind. — F. LUCAS zeigt in L 114 die Herleitung der Formeln (Ia)—(IIIa) mit Hilfe des Satzes über die Teilbarkeit des Ausdrucks $(x+y)^n - x^n - y^n$. Es mögen hier noch die beiden Versuche RIEKES erwähnt werden, in denen ebenfalls die ABELschen Formeln und einige bemerkenswerte Kongruenzen hergeleitet werden, die aber beide mit unüberbrückbaren Fehlern behaftet sind. — Aus (1) erhält Herr WENDT in L 176 etwas allgemeiner scheinende Formeln, die aber dieselben wie die in I. angegebenen sind. Nach der bei JAQUEMET angewandten Methode leitet 1901 T. R. BENDZ in seiner Dissertation (L 6) die ABELschen Formeln her, sowie verschiedene andere in I.—IV. und X. gefundene Formeln, von denen ich besonders die Kongruenz (26) erwähne, da ich durch dieselbe veranlaßt wurde, die Kongruenzen (27)—(31) aufzustellen. Ferner wird darin der Satz ausgesprochen: „Die notwendige und hinreichende Bedingung, daß die Gleichung $x_1{}^n + y_1{}^n = z_1{}^n$ eine ganzzahlige Lösung besitze, ist die, daß die Gleichung $\alpha^2 = 4\beta^n + 1$ eine rationale Lösung habe und umgekehrt", der leicht aus der Gleichung $\left(\frac{2y^n + x^n}{x^n}\right)^2 = 4\left(\frac{yz}{x^2}\right)^n + 1$ hergeleitet werden kann (vgl. IX.). — In der schon erwähnten Abhandlung des Herrn LINDEMANN findet dieser eine Identität, die aber dieselbe wie die in (77) gegebene WARINGsche Formel ist, die wir schon in fast derselben Form an analoger Stelle bei L 151 sahen. Diese Identität, aus der Herr LINDEMANN z. B. die Kongruenzen (19) modulo n ableitet, findet sich bei KUMMER in L 84, sowie schon bei GRUSON (Abh. Ak. Berlin 1813—15). Auch läßt sie sich, wie in (77) gezeigt worden ist, aus der bei LEGENDRE aufgestellten Formel ableiten. LEGENDRE entwickelte dabei die Summe der n^{ten} Wurzelpotenzen der Gleichung $x^3 - kx^2 + k_2 x - k_3 = 0$, wie ich dies in (62) dargestellt habe, wobei k, k_2 und k_3 die in (56) angegebenen Werte besitzen. In seiner Zahlentheorie, Art. 451 (deutsche Ausg. p. 118—120), bemerkte er noch einige Eigenschaften dieser drei Größen und behauptete dabei, daß ebenso wie $k = x + y - z$ auch $k_3 = -xyz$ durch n^2 teilbar sei. Diese Bemerkung ist zu korrigieren, da es nicht allgemein erwiesen war, daß eine der Unbekannten durch n teilbar sein muß.[1])

Von den andern Sätzen, die ABEL aufgestellt hat, ist wohl der der wichtigste, daß keine der Größen x, y, z, $x+y$, $z-y$ usw. eine Primzahl sein könne. Wieder war es ein Engländer, TALBOT, der 1857 in L 165 die Formeln (97), (98)[2]), (105) und (106a) zum erstenmal bewies, von Späteren aber kaum berücksichtigt wurde. JONQUIÈRES führte 1884 in L 69 unabhängig von ihm

[1]) siehe Nachtrag.

[2]) (97) und (98) bewies TALBOT nur für $m < n$ mittels eines andern als bei (97) angegebenen Beweises.

einen ähnlichen Beweis. In C. R. 1884 (L 70) berichtete er über diese Abhandlung mit dem Hinweis auf ABELS Satz, der bis dahin noch nicht bewiesen worden wäre. Im Anschluß an diese (105) und (106a) enthaltende Untersuchungen gab CATALAN 1866 (L 20) die Sätze (22), (23), (101), (105)—(106f), die er nochmals in L 21 zusammenfaßte. Ein Jahr später versuchte Herr MANSION (L 126) außer dem Unmöglichkeitsbeweis für die beiden größeren Unbekannten als Primzahlen auch den für die kleinste; der letzte Beweis war jedoch falsch, was der Verfasser auch S. 225 berichtigte. Bei diesem Beweise erhielt Herr MANSION die Formel (47) und bemerkte zu der Gleichung $z = a_1 x + b_1 y$, daß er aus dieser für das Studium des FERMATschen Theorems sehr wichtigen Gleichung eine Menge Konsequenzen abgeleitet habe, die er später zu veröffentlichen gedenke. Es ist jedoch meines Wissens keine solche Arbeit von Herrn MANSION erschienen. Im gleichen Jahre bewies nochmals BORLETTI (L 9), daß in der Gleichung (1) z keine Primzahl sein könne, daß in der Gleichung $x^{2n} - y^{2n} = z^{2n}$ keine der Unbekannten eine Primzahl sein könne, sowie die Unmöglichkeit der Gleichung $x^n \pm y^n = 2^{\alpha n}$ (s. (102)). — In einer bibliographischen Arbeit (L 45), in der verschiedene Sätze und Memoiren über das letzte FERMATsche Theorem zusammengefaßt werden, zeigt D. GAMBIOLI die Unmöglichkeitsbeweise für die Primzahlen x, y, z; jedoch ist hier wiederum der Beweis für die kleinste der Unbekannten mißglückt. Noch im Jahre 1905 beweist R. SAUER in seiner Dissertation (L 155), die auch in ihren anderen Teilen nichts Neues enthält, daß die Summe der n^{ten} Potenzen zweier Primzahlen usw. nicht gleich einer n^{ten} Potenz sein könne.

Bei dem Bericht über den LAMÉschen Beweis des Falles $n = 7$ bemerkt CAUCHY (L 23), daß der Ausdruck $(x + y)^n - x^n - y^n$ immer durch $nxy(x + y)(x^2 + xy + y^2)$ teilbar ist, und wenn $n = 6m + 1$, sogar durch $(x^2 + xy + y^2)^2$ (s. VII.). Von welcher Bedeutung die Untersuchung dieses Polynoms ist, zeigt die nach (69) bemerkte Beweismöglichkeit, die von MATHEWS (L 129) ausgesprochen wurde, oder der bereits erwähnte Aufsatz von F. LUCAS (L 114).[1]) GLAISHER, MUIR, MAC MAHON, BINI leiten verschiedene Sätze für den bezeichneten Ausdruck ab, von denen ich einige in VII. wiederholt habe. CATALAN (L 20) macht von CAUCHYS Satz Anwendung auf den Fall, daß x eine Primzahl sei, und erhält die in (106c) angegebenen Resultate. Auch die Untersuchungen über den Ausdruck $(x + y + z)^n - x^n - y^n - z^n$, die in engen Beziehungen zu den eben genannten stehen, hat CATALAN durch schöne Sätze gefördert (L 19).

In seiner ersten Arbeit über den FERMATschen Satz (L 84) behandelt KUMMER den Fall eines graden Exponenten und entwickelt darin verschiedene

---

[1]) siehe auch Nachtrag.

den (I) — (III) analoge Formeln, die wohl nur historischen Wert besitzen, da es ja genügt, den Exponenten als Primzahl anzunehmen. Im fünften Bande des Journ. de Math. beweist LEBESGUE (L 98) den Satz: „Ist die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ unmöglich, so ist es auch die Gleichung $X^{2n} + Y^{2n} = Z^2$"; und LIOUVILLE (L 108) zeigt in demselben Bande, daß unter der gleichen Annahme die Gleichung $Z^{2n} - Y^{2n} = 2X^n$ ebenfalls unmöglich ist. — GRUNERT erhält in L 59 auf nahezu einer Seite das Resultat, daß (1) in positiven ganzen Zahlen $< n$ unmöglich ist. Ich verweise hier auf die Gleichung (33), aus welcher direkt folgt, daß die Unbekannten $> 54\,n^2$ sein müssen. — In (108) habe ich die Gleichung $x^n + (x + su)^n = (x + tu)^n$ als unmöglich erwiesen. Für $s = 1$ und $t = 2$ zeigten die Herren BOTTARI (L 10) und CATTANEO (L 22) die Unmöglichkeit, d. h. daß die Größen x, y, z nicht aufeinanderfolgende Glieder einer arithmetischen Progression sein können, und zwar auf Grund des Beweises, daß x, y, z nicht drei aufeinanderfolgende Zahlen sein können. Der letzte Satz, der besonders bei Herrn BOTTARI ziemlich umständlich behandelt wird, folgt direkt aus (107).

Im Interméd. des Math. (L 179) stellt Herr WORMS DE ROMILLY ohne Beweisangabe die Formeln auf:

$$z = c' + b' + a', \quad y = c' + b', \quad x = c' + a',$$
$$c' = M\frac{n^{n(\nu+1)-1} + a^{n(\nu+1)-1}}{2} n^{\nu+1} q^{\nu+1}, \quad b' = q^{n(\mu+1)}, \quad a' = n^{n(\nu+1)}.$$

Hätte Herr WORMS DE ROMILLY, wie er behauptet, einen Beweis für diese Formeln, so wäre dies auch ein Beweis des FERMATschen Theorems, denn nach (104) kann $z - y = a'$ keine Potenz von n sein. Im Grunde sind diese Formeln dieselben, wie die in (II) gegebenen (vgl. (43)). Und mit Hilfe der letztgenannten sucht Herr WEREBRUSOW 1908 die Frage W. DE ROMILLYS zu beantworten, ob nämlich der Beweis des FERMATschen Satzes mittels dieser Formeln dekannt sei. Jedoch enthält der Beweis WEREBRUSOWS einen Fehler der p. 174—177 von verschiedenen Lesern berichtigt wird. Herr W. DE ROMILLY, der sich auch unter den Berichtigern befindet, nennt nochmals die Formeln (I)—(III) und am Schluß die folgenden:

$$x = \tfrac{1}{2}(n^{n\lambda} - n^{n\lambda}g^n + f^n), \quad y = \tfrac{1}{2}(n^{n\lambda} + n^{n\lambda}g^n - f^n), \quad z = \tfrac{1}{2}(n^{n\lambda} + n^{n\lambda}g^n + f^n),$$

die aber nicht bestehen können, da $x + y$, $z - x$, $z + y$ den gemeinschaftlichen Faktor $n^{n\lambda}$ enthalten.

Ich will hier noch auf die Fehler einiger allgemeiner „Beweise" eingehen, von denen ich keine Berichtigung gelesen habe: PAULET erhielt in (L 137): $[bmx^2 - (p - q)a]\,cr = [ar + (p - q)\,c + s]s$, woraus er den unberechtigten Schluß zog, daß der erste Faktor des linken Gliedes gleich dem ersten des rechten und der zweite des linken Gliedes gleich dem entsprechenden auf der



andern Seite sein müßte. Beim zweiten Beweis wurden dadurch willkürliche Werte angenommen, daß der Verfasser verschiedene Summanden gleicher Summen einander gleichsetzte. Die andere Arbeit (L 138) ist in dem gleichen Band berichtigt. — In der Abhandlung CALZOLARIS (L 15), die von GAMBIOLI in sein Memoria bibliografia aufgenommen worden ist, beging ersterer den Fehler, daß er annahm, wenn eine grade Zahl in dem Produkt einer ungraden und einer graden enthalten sein mußte, daß diese Zahl vollständiger Faktor des graden Teilers sein müßte. — (L 156): SCHIER glaubte, wenn der Faktor n^2 in $(x+y)^n - x^n - y^n$ enthalten war, so müßte er in $nxy(x+y)$ enthalten sein, was der Verfasser nur in etwas anderer Weise aussprach. Im Falle, daß x durch n teilbar ist, übersah SCHIER, daß $z-y$ den Faktor n in der $(n-1)^{\text{ten}}$ Potenz enthalten mußte. — (L 48): Der Unmöglichkeitsbeweis von (1) wird einmal daraus geschlossen, daß die linke Seite eine andere Zerlegungsart als die rechte besitze. Die beiden andern Gründe enthalten überhaupt keine Konsequenz.

In Bezug auf die neuere Fehler-Literatur verweise ich auf L 44. Von den dort nicht genannten Schriften sind mir folgende zu Händen gekommen: L 7: Autor nimmt für $x+y$, $y-x$, usw. unberechtigte willkürliche Werte an, für die wohl die FERMATsche Gleichung unmöglich sein kann, aber nicht allgemein. Setzt man z. B. allgemein $y - x = 2b$, so sieht man, daß nur bei ganz bestimmten a und b die Möglichkeit $y+1 > z$ eintreten kann. — L 62: Der Grund dafür, daß $\frac{c^n}{c+w}$ ein Bruch sein muß, ist vollständig unhaltbar. Wenn $\frac{c+w}{c}$ und $\frac{c+w}{c^n}$ Brüche sind, so folgt daraus noch nicht, daß $\left(\frac{c}{c+w}\right)c^n$ ebenfalls ein Bruch sein muß. — L 66: Der Verfasser schließt aus der Teilbarkeit von y^m durch $z - x = \alpha$, daß α auch in y enthalten sein müsse. — L 131: Die Summe von zwei irrationalen Zahlen muß nicht „selbstverständlich“ ebenfalls irrational sein. Übrigens gibt die CARDANsche Formel oft ganzzahlige Unbekannten in irrationaler Form. Dasselbe ist bei $n = 4$ zu sagen. Für höhere Potenzen beruft sich der Verfasser darauf, daß ABEL bewiesen hat, daß eine direkte Berechnung der Unbekannten nicht möglich ist. Wenn die Berechnung der Gleichungswurzeln unmöglich ist, so ist noch nicht die Gleichung in ganzen Zahlen unmöglich. — Zu L 181 ist zu bemerken: Der Verfasser, in dessen Inkognito übrigens die einzige Konsequenz liegt, läßt nach unerlaubten Voraussetzungen unzusammenhängende Theoreme und falsche Gleichungen aufeinanderfolgen, deren Berichtigung vielleicht die zwölf Seiten in Anspruch nehmen könnte, die der anonyme Verfasser zu seinem Beweise nötig hat. —

Für den ersten speziellen Beweis seines berühmtesten Satzes hatte FERMAT selbst ein Verfahren im Falle $n = 4$ angegeben, das von EULER zum Beweis

der Unmöglichkeit von $x^4 \pm y^4 = z^2$ angenommen wurde (L 38). 22 Jahre später fügte der große Baseler Mathematiker diesem noch den scharfsinnigen Beweis für $n = 3$ hinzu (L 40), der genauer in seiner Algebra behandelt ward. Vergebens suchte EULRR, der ja viele Sätze FERMATS bewiesen hatte, das letzte FERMATsche Theorem allgemein zu zeigen. Es gelang ihm nicht; aber er hatte dabei Gelegenheit gehabt, über die Teilbarkeit von Potenzbinomen eingehende Studien zu machen, deren schöne Resultate sich in L 39 und L 42 finden. KAUSLER zeigte nochmals die Unmöglichkeit der FERMATschen Gleichung für $n = 3, 4, 6$ (L 73—75), BARLOW für $n = 3, 4$ (L 5) und LEGENDRE für den ersteren Fall mittels einer neuen eleganten Beweismethode. Da erschien 1825 die erste Arbeit des jungen DIRICHLET (L 33), in der er zeigte, daß im Falle der fünften Potenz eine der Unbekannten durch 5 teilbar sein müsse und daß diese nicht ungrade sein könne. LEGENDRE, der sich lebhaft für die schöne Beweisart interessierte, erwies mittels derselben Methode, daß die durch 5 teilbare Zahl auch nicht grade sein könne. Den jetzt vollständigen Beweis der Unmöglichkeit der Gleichung $x^5 + y^5 = z^5$ in ganzen Zahlen, der auch in seine „Theorie des nombres" aufgenommen wurde (L 104), gab LEGENDRE zusammen mit seinen übrigen Untersuchungen über den FERMATschen Satz in L 103 heraus. Bei diesen zeigte der große Zahlentheoretiker u. a., daß für den Fall $n = 7$ eine der Unbekannten durch 7 teilbar sein müsse. Für $n = 2 \cdot 7$ erwies DIRICHLET 1832 (L 34) die Unmöglichkeit der FERMATschen Gleichung. 1840 zeigte LAMÉ, daß der Satz auch Gültigkeit für die siebente Potenz habe, und daher auch für den von DIRICHLET bewiesenen Fall. LEBESGUE wurde durch den LAMÉschen Beweis angeregt und zeigte noch in demselben Jahre im gleichen Band von Liouv. Journ. einen neuen vereinfachten Beweis für $n = 7$. — Es sind dies die wichtigsten ersten Beweise für einen speziellen Exponenten. Die späteren meistens gleiche Fälle betreffenden Essays kann ich hier nicht einzeln behandeln. Es sind dies vorzüglich folgende:

$n = 3$: CALZOLARI 1865 (L 15); LAMÉ 1865 (L 96); PEPIN 1870 (L 140), 1881 (L 143); TAIT 1872 (L 164); BROCARD 1878 (L 14); GÜNTHER 1878 (L 60); RÉALIS 1878 (L 150); E. LUCAS 1878 (L 111), 1880 (L 112); PERRIN 1884 (L 146); GAMBIOLI 1901 (L 45);

$n = 4$: LEBESGUE 1853 (L 101); PEPIN 1883 (L 145); TAFELMACHER 1893 (L 161); GAMBIOLI 1901 (L 45); BENDZ 1902 (L 6); BANG 1905 (L 3);

$n = 5$: LEBESGUE 1843 (L 100); LAMÉ 1847 (L 93); WEREBRUSOW 1905 (L 177);

$n = 6$: TAFELMACHER 1897 (L 162);

$n = 7$: LAMÉ 1843 (L 92); GENOCCHI 1864 (L 51), 1876 (L 52); PEPIN 1876 (L 141); MAILLET 1897 (L 117), 1901 (L 119);

$n = 37$: MIRIMANOFF 1897 (L 132).

An dieser Stelle möge auch L 158 erwähnt werden, da hier nochmals die Beweise FERMATS, LEGENDRES, KUMMERS usw. dargestellt werden. Ebenso die Arbeit des Herrn TAFELMACHER über das letzte FERMATsche Theorem (L 160), in der er (I)—(III), sowie einen Teil der in II. gefundenen Formeln aufstellt. Im zweiten Teil dieser Abhandlung beweist er dann die allgemeine Unmöglichkeit von (1) für $n = 3, 5, 11, 17, 23, 29$, und im Falle $k \equiv 0 \pmod{n^4}$ für $n = 7, 13, 19, 31$. Allein diese Beweise werden wohl nur für nicht durch n teilbare Zahlen x, y, z gelten müssen, denn Herr TAFELMACHER erwägt diesen Fall nicht besonders, und die Schlüsse auf p. 273—278 berechtigen noch nicht, auszuschließen, daß eine dieser Zahlen durch n teilbar sei. —

Im handschriftlichen Nachlaß von GAUSS befindet sich ein Artikel zur Theorie der komplexen Zahlen (L 49). Darin wird für einzelne Fälle der FERMATschen Gleichung bewiesen, daß eine der Unbekannten durch den Exponenten teilbar sein müsse. In ähnlicher Weise zeigt dies LEGENDRE in L 103. Daran anschließend zeigt er mittels eines Verfahrens, das von SOPHIE GERMAIN stammt, daß für alle $n < 100$ eine der Unbekannten durch n teilbar sein muß. Im Anfang seiner Abhandlung sagt LEGENDRE, daß die Bedingung, so leicht sie für kleine Exponenten zu erweisen sei, zu einem schweren Problem werde, wenn man sie auf jeden Exponenten ausdehnen wolle. BOUNIAKOWSKY gibt 1831 (L 12) eine der GERMAIN-LEGENDREschen ähnliche Methode, mittels der diese Bedingung bis zu $n = 29$ als erfüllt gezeigt wird. — Herr WENDT gelangt in L 176 zu verschiedenen Kriterien für die Teilbarkeit der Unbekannten durch n, die für einen allgemeinen Beweis zwar keine Bedeutung besitzen, durch die es aber Herrn MIRIMANOFF (L 133) ermöglicht wurde, im Anschluß an die schönen MAILLETschen Untersuchungen ($n < 223$) die von LEGENDRE gestellte Bedingung bis auf $n < 257$ auszudehnen. Aber alle diese Untersuchungen sind weit übertroffen worden von den eingehenden Arbeiten des Herrn DICKSON. Derselbe gelangt in L 30, p. 44 zu dem Ergebnis: „Die FERMATsche Gleichung $u^n + v^n = w^n$ ist unmöglich in ganzen zu n primen Zahlen für jede ungrade Primzahl $n < 6857$ und für die größeren < 7000.“[1]) —

Von allen Untersuchungen sind die KUMMERschen die erfolgreichsten auf dem Gebiete des FERMATschen Problems gewesen. Es war das an hervorragenden Arbeiten über den großen FERMATschen Satz so reiche Jahr 1847. LAMÉ hatte versucht, in L 93 die Unmöglichkeit der Gleichung (1) in komplexen Zahlen für den Fall $n = 5$ und endlich in L 94 für den allgemeinen Fall zu erweisen. Jedoch konnten diese unter falschen Voraussetzungen (s. L 109) durchgeführten Beweise das FERMATsche Theorem direkt in keiner Weise fördern. Aber indirekt hatten sie insofern einen Nutzen, als CAUCHY durch

---

[1]) vgl. Satz (110) im Nachtrag.

die Arbeiten Lamés zu den großzügigen Untersuchungen angeregt wurde, die sich in L 25—26 finden. Und auch diese Untersuchungen fanden keine praktische Anwendung auf einen speziellen oder allgemeinen Beweis. Erst Kummer (L 86) gelang es, mit Hilfe der Theorie der Primideale zu zeigen, daß die Gleichung (1) in ganzen Zahlen unmöglich sei für alle diejenigen Exponenten n, welche ungrade Primzahlen sind und in den Zählern der ersten $\frac{n-3}{2}$ Bernoullischen Zahlen als Faktoren nicht vorkommen. Zu diesen Exponenten gehören alle ungraden Primzahlen < 100 außer 37, 59 und 67. Zehn Jahre später zeigte der hervorragende Mathematiker, daß die Gleichung (1) noch für eine weitere Reihe von Exponenten unmöglich sei (L 88), zu denen auch die drei genannten gehören, so daß die Fermatsche Behauptung für alle Exponenten > 2 und $\leqq 100$ erwiesen war. Die verschiedenen 1847er Arbeiten hatten der Pariser Akademie Anlaß gegeben (s. L 182), das Fermatsche Problem 1850 zum Gegenstand des großen Preisausschreibens zu wählen. Da der bis 1856 verlängerte Wettbewerb ohne einen weitergehenden Erfolg verlief, wurde der Preis Kummer für seine schönen Untersuchungen zuerteilt. — Nach den letztgenannten Abhandlungen Kummers ruhten die Arbeiten über die Theorie der komplexen Zahlen in ihrer Anwendung auf den großen Fermatschen Satz eine lange Zeit. Herr Hilbert faßte in seiner „Theorie der algebraischen Zahlkörper“ nochmals die Kummerschen Resultate vereinfacht und verbessert zusammen (L 64). Von den späteren Schriften auf diesem Gebiete sind noch zu nennen die Arbeiten von Mathews (L 130), Thue (L 169), Maillet (L 117—123), Bendz (L 6), Mirimanoff (L 133), Dickson (L 28—32). —

Im vorangegangenen habe ich, so gut es mir möglich war, alle Wege gezeigt, die bei einem Beweise des letzten Fermatschen Theorems eingeschlagen worden sind. Fast alle sind sie bis zur Hälfte durchlaufen worden, aber kaum einer darüber hinaus. Ich hoffe, daß meine Ausführungen anregende Gelegenheit bieten, einen dieser Wege weiterzuführen und es zu ermöglichen, den in der Mitte des siebzehnten Jahrhunderts ausgesprochenen Satz im zwanzigsten Jahrhundert in seiner vollen Ausdehnung als richtig erkennen zu lassen. Solche Erzeugnisse natürlich, wie die neuen Fehlerbeweise, wobei jeder allein ohne Berücksichtigung der gründlichen Arbeiten großer Mathematiker blind auf das Ziel losstürzend es zu erreichen glaubt, können uns das Ziel, den Fortschritt der Wissenschaft (nicht die Erlangung von 100000 Mk.!), nicht näher bringen.

3. Literaturverzeichnis.

[1] Abel, Hendrik. „Extraits de quelques lettres à Holmboe". Werke II. p. 254—255.

[2] Ball, W. W. Rouse. Mathematical recreations and problems. London 1892, p. 27—30 (Fermat's last theorem). Franz. von Fitz-Patrick. Paris 1907—08.

[3] Bang, Aage. „Nyt Bevis for at Ligningen $x^4 - y^4 = z^4$ ikke kan have rationale Lösninger". Nyt Tidsskr. f. mat. 16. 1905 p. 35—36.

[4] Barlow, Peter. „Demonstration of a curious numerical proposition". Nichols. Journ. 27. 1810. p. 193—205.

[5] —— Theory of numbers. London 1811. p. 132—140 ($n = 3$); p. 118—122, 144—145 ($n = 4$); p. 160—169 (n allgemein). (Berichtigung siehe L 166.)

[6] Bendz, Torsten Ragnar. „Öfver diofantiska ekvationen $x^n + y^n = z^n$". Dissert. Upsala 1901. (34 S.) Lundequistska bokhandeln 1902.

[7] Best, Ludwig. „Beweis des Fermatschen Satzes". Darmstadt 1908 (H. L. Schlapp).

[8] Bini, Umberto. „Sopra alcune congruenze". Per. di Math. 22 (ser. 3) IV. 1907. p. 180—183.

[9] Borletti, F. „Sopra il teorema di Fermat relativo all' equazione $x^n + y^n = z^n$". Reale Ist. Lomb. Rendiconti (2) XX. 1887. p. 222—224.

[10] Bottari, Amerigo. „Soluzione intere in progressione aritmetica appartenenti a equazione indeterminate de tipo $\sum_{\nu=1}^{r} x_\nu^n = x_{r+1}$". Per. di Math. 22 (3) IV. 1907, p. 156—168.

[11] —— „Soluzione intere dell'equazione pitagorica e applicazione alle dimostrazione di alcune teoremi della teori dei numeri". Per. di Math. 23. (3) V. 1908, p. 104—110.

[12] Bouniakowsky, V. „Recherches numériques". Mém. Ac. St.-Petersb. (6) I. 1831, p. 139—152.

[13] —— „Notes sur quelques points de l'analyse indéterminée". Bull. Ac. St.-Petersb. VI. 1848, p. 200—201.

[14] Brocard, H. „Notes sur divers articles . . . . .". Nouv. Corr. Math. IV. 1878, p. 136—138.

[15] Calzolari, Luigi. „Tentativo per dimostrare il teorema di Fermat sull' equazione indeterminata $x^n + y^n = z^n$". Ferrara 1855 = L 45, p. 153.

[16] —— „Dimostrazione dell' ultimo teorema di Fermat". Annali di sc. mat. VIII. 1857, p. 339—349.

[17] —— „Impossibilita in numeri interi dell' equazione $z^n = x^n + y^n$ quando $n > 2$". Annali di Mat. VI 1864, p. 280—286.

[18] Catalan, Eugène. „Rapport" (über den Wettbewerb) (s. L 125, 170). Bull. Ac. Belg. 52 (3) VI. p. 814—819.

[19] —— „Sur le théorème de Fermat" = Mélanges Mathématiques 47. Mém. Soc. Liège (2) XII. 1885, p. 179—185.

[20] —— „Sur le dernier théorème de Fermat" = Mél. Math. 215. Mém. Soc. Liège (2) XIII. 1886, p. 387—397.

[21] —— „Sur le dernier théorème de Fermat". Bull. Ac. Belg. (3) XII. 1886, p. 498—500.

[22] Cattaneo, Paolo. „Osservazione sopra due articoli del signor Amerigo Bottari". Per. di Math. 23. (3) V. 1908, p. 218–220.

[23] Cauchy, Augustin de. „Rapport sur un mémoire de M. Lamé". C. R. 9. 1839, 1. p. 359—363 = Œuvres (1) 4. p. 499—504 = Journ. de Math. V. 1840, p. 211—215.

[24] —— „Notes sur quelques propriétés des facteurs complexes". C. R. 24. 1847, 1. p. 347—349 = Œuvres (1) 10, p. 224—226.

[25] —— „Mémoires sur de nouvelles formules relatives à la théorie des polynomes radicaux et sur le dernier théorème de Fermat". C. R. 24. 1847, 1. p. 316, 469—481, 516—528, 578—584, 633—636, 661—666 = Œuvres (1) 10, p. 240—285.

[26] —— „Mémoires sur diverses propositions relatives à la théorie des nombres". C. R. 25. 1847, 2. p. 132—136, 177—182, 242—243 = Œuvres (1) 10. p. 354—368.

[27] Desboves, A. „Mémoires sur la résolution en nombres entiers de l'équation $aX^m + bY^m = cZ^n$". Nouv. Ann. Math. (2) 18. 1879, p. 265—279, 398—410, 433—444, 481—499.

[28] Dickson, L. E. (Berichtigung über L 178). L'Int. des Math. XV. 1908, p. 174.

[29] —— „On the last theorem of Fermat". Mess. of. Math. 38, 1908, p. 14—32.

[30] —— „On the last theorem of Fermat". Quart. Journ. 40. 1908, p. 27—45.

[31] —— „On the congruence $x^n + y^n + z^n \equiv 0$ (mod p)". Journ. für Math. 135, 1908, p. 134—141.

[32] —— „Lower limit for the number of sets of solutions of $x^e + y^e + z^e \equiv 0$ (mod p)". Journ. für Math. 135, 1909, p. 181—188.

[33] Dirichlet, P. G. Lejeune. „Mémoires lur l'impossibilité de quelques équations indéterminées du cinquième degré". Journ. für Math. 3. 1828, p. 354—375 = Werke I. p. 1—20, 21—46.

[34] —— „Démonstration du théorème de Fermat pour le cas des 14ièmes puissances". Journ. für Math. 9. 1832, p. 390—393 = Werke I. p. 189—194.

[35] —— „Bemerkungen zu Kummers Beweis für den Fermatschen Satz, die Unmöglichkeit von $x^\lambda - y^\lambda = z^\lambda$ für eine unendliche Anzahl Primzahlen betreffend". Mon.-Ber. Ak. Berlin 1847, p. 139—141 = Werke II. p. 254—255.

[36] Drach, S. M. „Proof of Fermat's undemonstrated theorem, that $x^n + y^n = z^n$ is only possible in whole numbers when $n = 1$ or 2". Phil. Mag. 27, 1845, p. 286—289.

[37] Dutordoir, H. „Sur une généralisation possible du dernier théorème de Fermat". Ann. Soc. Sci. Bruxelles 17. 1893, p. 81.

[38] Euler, Leonhard. „Theorematum quorundam arithmeticorum demonstrationes". Comm. Ac. Petrop. X. 1738, p. 125—146 = Comm. Arithm. I. p. 24—34.

[39] EULER, LEONHARD. „Theoremata circa divisores numerorum". Novi Comm. Ac. Petrop. I p. 1747—48. p. 20—48 = Comm. Arithm. I. p. 50—61.

[40] —— „Supplementum quorundam theorematum arithmeticorum quae in nonnullis demonstrationibus supponuntur". Novi Comm. Petr. VIII. 1760—61. p. 105—128 = Comm. Arithm. I. p. 287—296.

[41] —— Anleitung zur Algebra II. § 204, 234.

[42] —— „De divisoribus numerorum formae $a^n \pm b^n$". Tractatus de numerorum doctrina, cap. IX. Comm. Arithm. II. p. 533—535.

[43] FERMAT, PIERRE DE. Diophanti Alexandri arithmethicorum libri sex, Tolosae 1670, Observatio Domini PETRI DE FERMAT p. 61 = Œuvres I. p. 291, III. p. 241.

[44] FLECK, ALBERT (und PH. MAENNCHEN). „Vermeintliche Beweise des FERMATschen Satzes". Arch. Math. Phys. (3) 14. 1909. p. 284—286, 370—372.

[45] GAMBIOLI, D. „Memoria bibliografia sull'ultimo teorema di FERMAT". Per. di Math. 16 (2) III. 1901, p. 145—192.

[46] —— „Appendice alla mia memoria bibliografia .....". Per. di Math. 17 (2) IV. 1902. p. 48—50.

[47] —— „Intorno all'ultimo teorema di FERMAT". Il Pitagora 10, 1903—04, p. 11—13, 41—43.

[48] GAUDIN. „Impossibilité de l'équation $(x+h)^n - x^n = z^n$". C. R. 59. 1864, 2. p. 1036—1038.

[49] GAUSS, KARL FRIEDRICH. „Zur Theorie der komplexen Zahlen" I. Werke II. p. 387—391. Handschriftlicher Nachlaß.

[50] GENOCCHI, ANGELO. „Expressione generale de'numeri BERNOULLI". Annali sci. mat. III. 1852, p. 395.

[51] —— „Intorno all'equazione $x^7 + y^7 + z^7 = 0$". Annali di Mat. VI. 1864, p. 287—288.

[52] —— „Généralisation du théorème de Lamé sur l'impossibilité de l'équation $x^7 + y^7 + z^7 = 0$". C. R. 82, 1876, 1. p. 910—913.

[53] —— „Sur les nombres de BERNOULLI". Journ. für Math. 99, 1886, p. 316—317.

[54] GERMAIN, SOPHIE. Œuvres philosophiques. Paris 1879, p. 298—302.

[55] GICK, CHRISTIAN. „Elementarer Beweis der FERMATschen Behauptung". Nürnberg 1908.

[56] GLAISHER, JOHN. W. L. „Note on CAUCHY's theorem relating to the factors of $(x+y)^n - x^n - y^n$". Quart. Journ. XV. 1878, p. 365—366.

[57] —— „On CAUCHY's theorem relating to the factors of $(x+y)^n - x^n - y^n$". Quart. Journ. XVI. 1879, p. 89—98.

[58] GRAM, J. P. Förh. Skand. Naturf. 1898, p. 182.

[59] GRUNERT, JOH. AUG. „Wenn $n > 1$, so gibt es unter den ganzen Zahlen von 1 bis n nicht zwei Werte von x und y, für welche, wenn z einen ganzen Wert bezeichnet, $x^n + y^n = z^n$ ist". Arch. Math. Phys. 27, 1856, p. 119—120.

[60] GÜNTHER, S. „Über die unbestimmte Gleichung $x^3 + y^3 = a^3$". Sitz.-Ber. Böhm. Ges. Wiss. 1878, p. 112—120.

[61] HENRY, C. „Recherches sur les manuscrits de PIERRE DE FERMAT .....". Bonc. Bull. XII. 1879, p. 477—568.

[62] HESS, WILHELM. „Beweis des großen FERMATschen Satzes für ungrades $n > 1$". Dresden 1908 (A. KÖHLER).

[63] —— „Weiteres über den großen FERMATschen Satz". Dresden 1908 (A. KÖHLER).

[64] Hilbert, David. „Die diophantische Gleichung $\alpha^m + \beta^m + \gamma^m = 0$". Die Theorie der algebraischen Zahlkörper, Kap. 36. Jahresber. D. Math.-Vergg. IV. 1894, p. 517—525.

[65] —— „Der Fermatsche Satz". Theorie des Kreiskörpers Nr. 14. Enz. math. Wiss. I, 2. p. 713—714.

[66] Hoffmann, Franz. „Der Satz vom Fermat. Sein seit dem Jahr 1658 gesuchter Beweis". (24 S.). Straßburg 1908 (J. Singer).

[67] Hübner, A. „Über den Fermatschen Satz". (40 S.). Erlangen 1908 (F. Junge).

[68] Jaquemet, Claude. Bonc. Bull. XII. 1879, p. 565—568 (siehe L 61).

[69] Jonquières, Ernest de. „Sur le dernier théorème de Fermat". Atti Acc. N. Lincei 37. 1884, p. 146—149.

[70] —— (Sur le dernier théorème de Fermat) C. R. 98, 1884, 1. p. 863—864.

[71] —— „Sur une question d'algèbre qui a des lieus avec le dernier théorème de Fermat". C. R. 120, 1895, 1, p. 1139—1143.

[72] Jurisch, Konr. W. „Beweis des Fermatschen Satzes". Berlin 1908 (C. Heymann) (Berichtigung s. L 44).

[73] Kausler, C. F. „Nova demonstratio theorematis nec summam, nec differentiam duorum biquadratorum biquadratum esse posse". Nova Acta Ac. Petrop. XIII. 1802, p. 237—244.

[74] —— „Nova ..... duorum cuborum cubum esse posse". N. Acta Ac. Petrop. XIII. 1802, p. 245—253.

[75] —— „Nova ..... duorum cubo-cuborum cubo-cubum esse posse". N. Acta Ac. Petrop. XV. 1806, p. 146—155.

[76] Kleiber, Joh. „Das Fermatsche Problem". Aus Natur und Kultur. München 1908. V. p. 666—667.

[77] —— „Beitrag zum Fermatschen Satz". Zeitschr. math. nat. Unt. 40, 1909, p. 45—47.

[78] Koch, J. „Beweis des großen Fermatschen Satzes". Borna-Leipzig 1908 (Rob. Noske).

[79] Korkine, A. „Sur l'impossibilité de la relation algébrique $X^n + Y^n + Z^n = 0$". C. R. 90. 1880, 1. p. 303—404.

[80] —— (Über die Unmöglichkeit, der Gleichung $x^n + y^n + z^n = 0$ durch ganze Funktionen zu genügen) (Russisch) Nachr. Moskau X.

[81] Korneck, G. „Beweis des Fermatschen Satzes von der Unmöglichkeit der Gleichung $x^n + y^n = z^n$ für rationale Zahlen und $n > 2$". Arch. Math. Phys. (2) 13. 1893, p. 1—9.

[82] —— „Nachtrag zum Beweis der Fermatschen Satzes". Arch. Math. Phys. (2) 13, 1893, p. 263—267 (Berichtigung L 148 und Jahrb. Fortschr. Math. 1893, p. 134).

[83] Kübler, J. „Beweis des Fermatschen Satzes, daß die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ für $n > 2$ in ganzen Zahlen niemals auflösbar ist". (18 S. mit 1 Tafel, 3 Fig). Leipzig 1908. Esslingen 1908 (P. Neff). (Berichtigung: L 44.)

[84] Kummer, Ernst Eduard. „De aequatione $x^{2\lambda} + y^{2\lambda} = z^{2\lambda}$ per numeros integros resolvenda". Journ. für Math. 17. 1837, p. 203—209.

[85] —— „Lettre à M. Liouville". Journ. de Math. 12. 1847, p. 136 = C. R. 24. 1847, 1, p. 899.

[86] —— „Allgemeiner Beweis des Fermatschen Satzes, daß die Gleichung $x^\lambda + y^\lambda = z^\lambda$ durch ganze Zahlen unlösbar ist, für alle diejenigen Potenzexponenten λ, welche

ungrade Primzahlen sind und in den Zählern der ersten $\frac{1}{2}(\lambda - 3)$ BERNOULLIschen Zahlen als Faktoren nicht vorkommen". Journ. für Math. 40. 1850, p. 130—138, siehe Mon.-Ber. Ak. Berlin 1847, p. 132.

[87] KUMMER, ERNST EDUARD. „Sur la théorie des nombres complexes composés de racines de l'unité et de nombres entiers". Journ. de Math. 16, 1851, p. 377—498.

[88] —— „Einige Sätze über die aus den Wurzeln der Gleichung $\alpha^\lambda = 1$ gebildeten komplexen Zahlen für den Fall, daß die Klassenzahl durch λ teilbar ist, nebst Anwendung derselben auf einen weiteren Beweis des letzten FERMATschen Satzes". Abh. Akad. Berlin 1857, p. 41—74. — Mon.-Ber. Ak. Berlin, p. 275—282.

[89] LAGRANGE, JOSEPH LOUIS. „Sur quelques problèmes de l'analyse de Diophante". Nouv. Mém. Berlin 1777 (1779), p. 140—154 = Œuvres IV. p. 377—398.

[90] LAMÉ, GABRIELE. „Mémoire d'analyse indeterminée, démontrant que l'équation $x^7 + y^7 = z^7$ est impossible en nombres entiers". Journ. de Math. V. 1840, p. 195—211.

[91] —— „Mémoire sur le dernier théorème de FERMAT". C. R. 9. 1839, 2. p. 45—46.

[92] —— „Mémoire sur la démonstration d'un nouveau cas du dernier théorème de FERMAT". Mém. sav. étr. VIII. 1843, p. 421—437.

[93] —— „Mémoire sur la résolution en nombres complexes de l'équation $A^5 + B^5 + C^5 = 0$". Journ. de Math. 12. 1847, p. 137—171.

[94] —— „Mémoire sur la résolution en nombres complexes de l'équation $A^n + B^n + C^n = 0$". Journ. de Math. 12. 1847, p. 172—184.

[95] —— „Démonstration générale du théorème de FERMAT sur l'impossibilité de l'équation $x^n + y^n = z^n$." C. R. 24. 1847, 1. p. 310—315, 352, 569—572, 588.

[96] —— „Études des binomes cubiques $(X^3 \mp Y^3)$." C. R. 61. 1865, 2. p. 921—924, 961—965.

[97] LANDSBERG, OTTO. „Lettera al redattore" (Berichtigung von L 172). Giorn. di Mat. 28. 1890, p. 52.

[98] LEBESGUE, VICTOR. „Note sur un théorème de FERMAT." Journ. de Math. V. 1840, p. 184—185.

[99] —— „Démonstration de l'impossibilité de résoudre l'équation $x^7 + y^7 + z^7 = 0$ en nombres entiers." Journ. de Math. V. 1840, p. 276—279, 348—349.

[100] —— „Théorèmes nouveaux sur l'équation indéterminée $x^5 + y^5 = az^5$." Journ. de Math. VIII. 1843, p. 49—70.

[101] —— „Résolutions des équations biquadratiques $z^2 = x^4 \pm 2^m y^4$; $z^2 = 2^m x^4 - y^4$; $2^m z^2 = x^4 \pm y^4$." Journ. de Math. 18, 1853, p. 73—86.

[102] LEFÉBURE. „Sur la résolution de l'équation $x^n + y^n = z^n$ en nombres entiers." C. R. 90. 1880, 1. p. 1406—1407. (Berichtigung: L 142, Jahrb. Fortschr. Math. 1880.)

[103] LEGENDRE, ADRIEN MARIE. „Recherches sur quelques objets d'analyse indéterminée et particulièrement sur le théorème de FERMAT." Mém. Ac. France 6. 1823, p. 1—60.

[104] —— Zahlentheorie II, (deutsch v. Maser, Leipzig 1893) Art 325—328, p. 4—8 ($n = 4$); Art. 331—333, p. 8—13 = L 103, p. 45—61 ($n = 3$); Art. 451, p. 118—120 (n allgemein); Art. 653, p. 348—352 = L 103, p. 41—45 ($n = 3$); Art. 654—663, p. 352—359 = L 103, p. 31—41 ($n = 5$).

[105] Libri, Guillaume. „Mémoire sur la théorie des nombres." Journ. für Math. 9. 1832, p. 54—80, 169—188, 261—276.

[106] Lindemann, Ferdinand. „Über den Fermatschen Satz betreffend die Unmöglichkeit der Gleichung $x^n = y^n + z^n$." Sitz.-Ber. Ak. München XXXI. 1901, p. 185—202. Berichtigung p. 495.

[107] —— „Über das sogenannte letzte Fermatsche Theorem." Sitz.-Ber. Ak. München. 37. 1907, p. 287—352.

[108] Liouville, Joseph. „Sur l'équation $Z^{2n} - Y^{2n} = 2X^n$." Journ. de Math. V. 1840, p. 360.

[109] —— „Observations sur le mémoire de M. Lamé." C. R. 24. 1847, 1, p. 315—316.

[110] Liouville, R. „Sur l'impossibilité de la relation algébrique $X^n + Y^n + Z^n = 0$." C. R. 89. 1879, 1. p. 1108—1110. (Berichtigung: Jahrb. Fortsch. Math. 11. 1879, p. 138 (Netto).)

[111] Lucas, Eduard. „Sur l'équation indéterminée $x^3 + y^3 = az^3$." Nouv. Ann. Math. (2) 17, 1878, p. 425—426.

[112] —— „Théorèmes généraux sur l'impossibilité des équations cubiques indéterminées." Bull. Soc. France. 8, 1880, p. 173—182.

[113] —— Théorie des nombres I. Paris 1891. Introduction p. XXIX.; p. 370—371, No. 206, Ex. VI; p. 267, No. 151, Ex. IV; p. 275, No. 157, Ex. II.

[114] Lucas, Felix. „Note relative à la théorie des nombres." Bull. Soc. Fr. 25, 1897, p. 33—35.

[115] Lukas, Franz. „Beweis, daß $x^n + y^n = z^n$ für $n > 2$ in ganzen Zahlen nicht auflösbar sei, nebst einer kurzen Auflösung für $n = 2$." Arch. Math. Phys. 58. 1876, p. 109—112. (Berichtigung: Jahrb. Fortschr. Math.)

[116] Mac Mahon, Percy Alexander. „Algebraic identities arising out of an extension of Waring's formula." Mess. of Math. 14. 1884. p. 8—11.

[117] Maillet, Edmond. „Le dernier théorème de Fermat." Assoc. franç. 26. 1897. p. 156—168-

[118] —— „Sur les équations indéterminées de la forme $x^\lambda + y^\lambda = cz^\lambda$." C. R. 129. 1899, 2. p. 198—199.

[119] —— „Sur les équations indéterminées de la forme $x^\lambda + y^\lambda = cz^\lambda$." Acta math. 24. 1901. p. 247—256.

[120] —— „Dernier théorème de Fermat $x^m + y^m \neq z^m$." Sur l'utilité de la publication de certains renseignements bibliographiques en mathématiques. C. R. du Congr. d. Math. Paris (1900). 1902. p. 425—427.

[121] —— „Sur les équations indéterminées $x^\lambda + y^\lambda = cz^\lambda$." Annali di Mat. (3) 12. 1905. p. 145—178.

[122] —— „Sur le dernier théorème de Fermat." Toulouse Mém. (10) V. 1905. p. 132—133.

[123] —— „Sur l'équation indéterminée $x^a + y^a = bz^a$." C. R. 140. 1905, 1. p. 1229—1230.

[124] Mansion, Paul. „Remarques sur les théorèmes arithmétiques de Fermat." Nouv. Corr. Math. V. 1879, p. 88—91, 122—125.

[125] —— (Bericht über den Wettbewerb) (s. L 18, 170) Bull. Ac. Belg. 52 (3) VI. 1883, p. 823—832.

[126] —— „Sur le dernier théorème de Fermat." Bull. Ac. Belg. (3) XIII. 1887, p. 16—17. Rectification p. 225.

[127] MARTONE, M. „Dimostrazione di un celebre teorema di FERMAT." Catanzaro 1887. Neapel 1888

[128] —— „Nota a una dimostrazione di un . . . . . ." Neapel 1888.

[129] MATHEWS, G. B. „Note in connexion with FERMAT's last theorem." Mess. of Math. XV. 1885, p. 68—74.

[130] —— „Note in connexion with FERMAT's last theorem." Mess. of Math. (2) XXIV. 1894, p. 97—99.

[131] METZ, JOS. EDLER VON. „Beweis des FERMATschen Satzes." Göttingen 1908 (C. Spielmayers Nchf.).

[132] MIRIMANOFF, D. „Sur l'équation $x^{37} + y^{37} + z^{37} = 0$." Journ. für Math. 111. 1893, p. 26—30.

[133] —— „L'équation $x^l + y^l + z^l = 0$ et le critérium de KUMMER." Journ. für Math. 128. 1905, p. 45—68.

[134] —— „Sur le dernier théorème de FERMAT." L'Enseign. Math. XI. 1909, p. 49—51.

[135] MUIR, THOMAS. „On a expansion of $(x+y)^n + (-x)^n + (-y)^n$." Quart. Journ. XVI. 1879, p. 9—14.

[136] NEUBERG, J. (Berichtigung von L 149 und L 168) MATHESIS VIII. 1908, p. 243.

[137] PAULET, FRANÇOIS. „Démonstration du théorème, dit de FERMAT: Hors du second degré il n'existe aucune puissance qui puisse se partager dans la somme ou la différence de deux autres puissances du même degré." Quetelet, Corr. Math. XI. 1839, p. 307—313.

[138] —— „Démonstration du . . . . . degré." Cosmos 22, 1863, p. 385—389. (Berichtigung p. 407 v. R. RADAU.)

[139] PENKMAYER, RICHARD. „Beweis des Satzes von FERMAT: die Gleichung $a^n + b^n = c^n$ ist in ganzen Zahlen unlösbar, wenn $n > 2$ ist." München 1908 (J. LINDAUER). (Berichtigung: L. 44.)

[140] PEPIN, THÉOPHILE. „Sur la décomposition d'un nombre entier en une somme de deux cubes rationels." Journ. de Math. (2) 15, 1870, p. 217—236.

[141] —— „Impossibilité de l'équation $x^7 + y^7 + z^7 = 0$." C. R. 82, 1876, 1, p. 676—679, 743—747.

[142] —— „Sur divers tentatives de démonstration du théorème de FERMAT." C. R. 91. 1880, 2, p. 366—368.

[143] —— „Mémoire sur l'équation indéterminée $x^3 + y^3 = Az^3$." Atti Acc. N. Lincei 34. 1881, p. 73—130.

[144] —— „Sur un théorème de FERMAT." Atti Acc. N. Linc. 36. 1883, p. 23—33.

[145] —— „Étude sur l'équation indéterminée $ax^4 + by^4 = cz^2$." Atti Acc. N. Linc. 36. 1883, p. 34—70.

[146] PERRIN, R. „Sur l'équation indéterminée $x^3 + y^3 = z^3$." Bull. Soc. Fr. 13 1884—85, p. 194—197.

[147] PIETZKER, F. „Rationale Lösungen der Gleichung $x^n = y^n + z^n$." Unt.-Bl. Math. Nat. 14, 1908, p. 48—52. (Berichtigung L 44.)

[148] POINCARÉ, JULES HENRY. „Rapport verbal . . . . . M. G. KORNECK." (Berichtigung von L 81 und L 82) C. R. 118, 1894, 1, p. 841.

[149] POPOFF, D. K. „Annexe à ma démonstration du théorème, dit „la Grande Proposition" de FERMAT, à savoir que $a^n + b^n = c^n$ est impossible en nombres entiers." Sophia 1908. (Berichtigung: L 136 und L 44.)

[150] Réalis, S. „Sur quelques équations indéterminées du troisième degré." Nouv. Ann. Math. (2) 17, 1878, p. 454—457.

[151] Rieke, August. „Über die Gleichung $x^p + y^p = z^p$." Zeitschr. Math. Phys. 34, 1889, p. 238—248.

[152] —— „Versuch über die Gleichung $x^p + y^p = z^p$." Zeitschr. Math. Phys. 36, 1891, p. 249—254. (Berichtigung von L 151 und 152: Zeitschr. Math. Phys. 37, 1892, p. 57, 64.)

[153] Rühl, Heinrich. „Elementarer Beweis des Fermatschen Satzes." (4 S.). Darmstadt 1908 (Müller & Rühle). (Berichtigung: L 44.)

[154] Sasse, E. „Fermats letzter Satz." Berlin 1908.

[155] Sauer, Richard. „Eine polynomische Verallgemeinerung des Fermatschen Satzes." Dissert. Giessen 1905.

[156] Schier, Otto. „Über die Auflösung der unbestimmten Gleichung $x^n + y^n = z^n$ in rationalen Zahlen." Sitz.-Ber. Wien. 1880, p. 392—398.

[157] Smith, Henry J. S. „Application to the Last Theorem of Fermat." Report on the Theory of Numbers. Part II, Art. 61 = Report of the British Association for 1860, p. 148—152 = Collected Math. Papers I. Oxford 1894, p. 131—137.

[158] Sommer, J. „Das letzte Theorem von Fermat." Vorlesungen über Zahlentheorie. Leipzig 1907, p. 176—193.

[159] Stäckel, Paul. „Beweis eines Satzes von Abel über die Gleichung $x^n + y^n + z^n = 0$." Acta math. 27, 1903, p. 125—128.

[160] Tafelmacher, W. L. Aug. „Sobre el teorema de Fermat de que la ecuacion $x^n + y = z^n$ no tiene solucion en numeros enteros x, y, z i siendo $n > 2$." Anales univ. Chile 82, 1892, p. 271—300, 415—437

[161] —— „Sobre la ecuacion $x^4 + y^4 = z^4$." Anales univ. Chile 84, 1893, p. 307 — 320.

[162] —— „La ecuacion $x^3 + y^3 = z^2$ i una demostracion del teorema de Fermat para el caso de las 6. potencias." Anales univ. Chile 97, 1897, p. 63—80.

[163] Tait, P. G. „On Fermat's theorem." Proc. Roy. Soc. Edinb. V, 1866, p. 181.

[164] —— „Mathematical Notes." Proc. Roy. Soc. Edinb. VII, 1872, p. 144.

[165] Talbot, William Henry Fox. „On Fermat's theorem." Trans. Soc. Edinb. 21, 1857, p. 403—406.

[166] —— „Remarks on Barlow's Theory of Numbers." On the Theory of Numbers, § 3. Trans. Soc. Edinb. 23, 1864, p. 51—52.

[167] Terquem, O. „Théorème de Fermat sur un trinôme." Nouv. Ann. Math. 6, 1847, p. 132—134.

[168] Théodoroff, P. „Démonstration de la grande proposition de Fermat, $x^n + y^n = z^n$ est impossible en nombres entiers, si $n > 2$." Sofia 1908 P. M. Basaitoff. (Berichtigung: L 44, 136.)

[169] Thue, Axel. „Et par bemerkninger vedrørende det Fermat'ske problem." Mindre middelsere. IV. p. 9—15, Arch. for Math. og Nat. 19, 1897, Nr. 4.

[170] Tilly, de. (Bericht über den Wettbewerb) (s. L 18, 125) Bull. Ac. Belg. 52 (3) VI. 1883, p. 820—823.

[171] Umfahrer, J. „Beweis der Richtigkeit des großen Fermatschen Satzes." München 1908 (O. Th. Scholl). (Berichtigung L 44.)

[172] VARISCO, DINO. „Ricerche aritmetiche contenenti la dimostrazione generale del teorema di FERMAT." Giorn. di Mat. 27, 1889, p. 371—380. (Berichtigung: L 96.)

[173] VLACHOS, CHR. „Der Beweis des FERMATschen Satzes." Berlin 1908 (F. GOTTHEIMER).

[174] WALSLEBEN, A. „Der große FERMATsche Satz. Ein Versuch zur allgemeinen Lösung desselben." Osterode a/Harz. (Selbstverlag.) (Berichtigung: L 44.)

[175] WEIGELIN, G. „Der große FERMATsche Satz und sein Beweis." 2 Teile (16 S. mit 1 Tafel) 1908, Stuttgart (H. ENDERLIN).

[176] WENDT, ERNST. „Arithmetische Studien über den „letzten" FERMATschen Satz, welcher aussagt, daß die Gleichung $a^n = b^n + c^n$ für $n > 2$ in ganzen Zahlen nicht auflösbar ist." Journ. für Math. 113, 1894, p. 335—347.

[177] WEREBRUSOW, A. („Über die Gleichung $x^5 + y^5 = Az^5$.") (Russisch) Mosk. Math. Samml. 25, 1905, p. 466—473.

[178] —— („Beweis") L'Interm. des Math. XV, 1908, p. 79—81. (Berichtigung p. 174 —177, siehe L 28 und L 180.)

[179] WORMS DE ROMILLY, P. (Le dernier théorème de FERMAT). L'Interm. des Math. II, 1895, p. 281 = XI, 1904, p. 185.

[180] —— (Berichtigung von L 178). L'Interm. XV, 1908, p. 176.

[181] N. N. „Versuch einer Lösung des großen FERMATschen Satzes. $a^n + b^n = c^n$." Halle und Leipzig 1908 (E. KARRAS).

[182] Nouv. Ann. Math. VIII, 1849, p. 362; IX, 1850, p. 386—392.

[183] Zeitschr. math. nat. Unt. 23, 1892, p. 417—418. „Die Gleichung $x^n + y^n = z^n$. Eine Anregung zur Auffindung eines Beweises."

4. Nachtrag.

(110)* Die Gleichung (1) ist in ganzen zu n primen Zahlen x, y, z unmöglich. Im Falle $n = 6m - 1$ muß eine dieser Zahlen durch $3n^2$ teilbar sein.

Herr WIEFERICH hat in seiner Arbeit „Zum letzten FERMATschen Theorem“[1]) gezeigt, daß die Annahme von ganzen nicht durch n teilbaren Zahlen x, y, z zu der Kongruenz $2^{n-1} \equiv 1 \pmod{n^2}$ führen muß.[2]) In der folgenden Untersuchung werde ich zeigen, daß die Unmöglichkeit von (1) in ganzen zu n primen Zahlen auf elementare Weise bewiesen werden kann.

Wegen (70), (75) und ($95_{3,4}$) ist

$$(x + y)^n - x^n - y^n \equiv 0 \pmod{3^2}.$$

Ist keine der Zahlen x, y, z durch 3 teilbar, so kann man einen der beiden letzten Werte von (95) in diese Kongruenz einsetzen und man erhält für die dritte Gleichung von (95):

$$(3\alpha_1 + 3\beta_1 + 2)^n - (3\alpha_1 + 1)^n - (3\beta_1 + 1)^n \equiv 0 \pmod{3^2}$$

und nach der Potenzentwicklung:

$$(2^{n-1} - 1)[2 + 3\tbinom{n}{1}(\alpha_1 + \beta_1)] \equiv 0 \pmod{3^2}.$$

Da $2 + 3n(\alpha_1 + \beta_1)$ nicht durch 3 teilbar ist, so muß die Kongruenz

$$2^{n-1} \equiv 1 \pmod{3^2}$$

statthaben, was nur für $n = 6m + 1$ möglich ist.

Ist nun eine der drei Unbekannten, z. B. z, folglich auch c, durch 3, aber nicht durch n teilbar, so ergibt die Kongruenz (49):

$$nx^{n-1} \equiv \gamma^n \pmod{3^n}.$$

Nach (29) und (31) folgt dann

$$n \equiv 1 \pmod{3}.$$

Ist z aber auch durch n teilbar, so kann wegen (49 a) diese Beschränkung nicht bestehen.

---

[1]) Journ. f. Math. 136, 1909, p. 293—302.

[2]) Ein Unmöglichkeitsbeweis dieser Kongruenz ist mir nicht bekannt.

Es kann demnach n bei ganzen zu n primen Zahlen x, y, z niemals von der Form $6m - 1$ sein. Im andern Falle kann n nur $= 6m - 1$ sein, wenn die durch n teilbare Zahl zugleich durch 3 teilbar ist. —

Bei nicht durch n teilbaren Zahlen führt (1) zu der Kongruenz (68):

$$(z + x_1)^n - z^n - x^n_1 \equiv 0 \pmod{n^2}.$$

Wenn aber ein Wert von x_1 gefunden ist, so läßt sich immer ein zweiter Wert x_2 ($\not\equiv x_1 \pmod{n}$) finden, der ebenfalls dieser Kongruenz genügt. Ich nehme jetzt an, daß alle Zahlen $< n$ sind, oder im andern Falle kongruent einer anderen Zahl modulo n gesetzt werden, die $< n$ ist. Die jetzt folgende Untersuchungsmethode zeige ich zuerst am Beispiel $n = 13$ und wähle die Kongruenz:

$$7^{13} - 2^{13} - 5^{13} \equiv 0 \pmod{13^2}.$$

Multipliziert man diese Kongruenz nacheinander mit allen Zahlen < 13, so erhält man 12 Lösungen < 13:

Multiplikant	z	x_1	$z + x_1$	Multiplikant	z	x_1	$z + x_1$
1*	2	5	7	7	1	9	10
2	4	10	1	8	3	1	4
3*	6	2	8	9	5	6	11
4	8	7	2	10	7	11	5
5	10	12	9	11	9	3	12
6	12	4	3	12	11	8	6

Da hierbei alle Zahlen < 13 vorkommen müssen, so erhält man für jede Zahl z, in diesem Falle für 2, noch eine zweite Kongruenz, bei der z (hier 2) an der Stelle von x_1 auftritt. Nun hat man zur Erlangung dieser Kongruenz die erste mit 3 multipliziert. Es ist dann

$$2 \cdot 2 \equiv 3 . 5 \times 2 \equiv 3 \cdot 2 \times 5 \equiv 6 \cdot 5 \pmod{13}.$$

Nimmt man statt 2 und 5 ein anderes der dargestellten Wertpaare von z und x_1, so erhält man durch Multiplikation wieder die genannten Lösungen, nur in anderer Reihenfolge. Da jede Zahl < 13 je einmal an der Stelle von z und x_1 vorkommt, so hat man für eine Zahl z immer zwei und nur zwei Zahlen x, die dieser Kongruenz genügen. Für den allgemeinen Fall von n ergibt sich dieselbe Konsequenz, da bei der Kongruenz

(111a) $$(z + x_1)^n - z^n - x^n_1 \equiv 0 \pmod{n^2}$$

noch eine zweite

(111b) $$(z + x_2)^n - z^n - x^n_2 \equiv 0 \pmod{n^2}$$

in ganzen Zahlen $< n$ existieren muß, und zwar findet man in der Tabelle mit Lösungen $< n$:



Multiplikant	z	x_1	$z + x_1$
1	z	x_1	$z + x_1$
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
r	$rz \equiv x_2$	$rx_1 \equiv z$	$r(x_1 + z) \equiv z + x_2$
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .

Wie bei $n = 13$ hat man dann:

$$z^2 \equiv rx_1 \cdot z \equiv rz \cdot x_1 \equiv x_2 x_1 \pmod{n}.$$

Es besteht also für je zwei zusammengehörige Kongruenzen (111) die Kongruenz:

(112) $$z^2 \equiv x_1 x_2 \pmod{n}.$$

Bei der Existenz von (111) müssen aber auch die folgenden Kongruenzen bestehen:

$$[(n - x_1 - z) + z]^n - z^n - (n - x_1 - z)^n \equiv 0 \pmod{n^2}$$
$$[(n - x_2 - z) + z]^n - z^n - (n - x_2 - z)^n \equiv 0 \pmod{n^2}.$$

Es hat daher die (112) entsprechende Kongruenz statt:

$$z^2 \equiv (n - x_1 - z)(n - x_2 - z) \pmod{n}.$$

Die Kombination dieser Kongruenz mit (112) ergibt dann:

(113) $$z + x_1 + x_2 \equiv 0 \pmod{n},$$

und durch nochmalige Kombination erhält man:

(114) $$z^2 + zx_1 + x_1^2 \equiv 0 \pmod{n}.$$

Aus der Kongruenz

$$[(m_1 + m_2)n + z + x_1]^n - (m_1 n + z)^n - (m_2 n + x_1)^n \equiv 0 \pmod{n^2}$$

erhält man aber die Kongruenz (111a), also auch (114), und daher:

$$(m_1 n + z)^2 + (m_1 n + z)(m_2 n + x_1) + (m_2 n + x_1)^2 \equiv 0 \pmod{n}.$$

Für jede Kongruenz (111a) in ganzen nicht durch n teilbaren Zahlen $\gtrless n$ besteht demnach immer (114). —

Nun geht aus (1) wie bei (68) die Kongruenz hervor:

$$(z - x)^n - z^n - (-x)^n \equiv 0 \pmod{n^2}.\text{[1]}$$

Man hat deshalb

$$z^2 - zx + x^2 \equiv 0 \pmod{n}$$

oder wegen (8)

$$x^2 + xy + y^2 \equiv 0 \pmod{n}.$$

---

[1]) Da

$$(z - y)^n - z^n - (-y)^n \equiv 0 \pmod{n^2},$$

und y nicht gleich x, so ist $y \equiv x_2$, wonach (113) durch $z - y - x \equiv 0 \pmod{n^2}$ bestätigt wird.

Nach (19) ist

$$x \equiv a, \quad y \equiv b \pmod{n^{\lambda-1}},$$

wobei zunächst $\lambda - 1 = 1$ sei. Dann hat man:

$$a^2 + ab + b^2 = a^2 + b\,(a + b) \equiv 0 \pmod{n^{\lambda-1}}$$

und durch Potenzierung:

$$(a^2)^n + b^n\,(a + b)^n \equiv 0 \pmod{n^\lambda}.$$

Nun ist nach (8) und (20):

$$c \equiv a + b \pmod{n^{\lambda-1}}$$

oder

$$c^n \equiv (a + b)^n \pmod{n^\lambda}.$$

Wegen (8) ist aber·

$$c^n \equiv a^n + b^n \pmod{n^\lambda},$$

folglich

$$(a + b)^n \equiv a^n + b^n \pmod{n^\lambda}$$

und

$$a^{2n} + b^n\,(a^n + b^n) = a^{2n} + a^n b^n + b^{2n} \equiv 0 \pmod{n^\lambda}.$$

Die Kongruenzen (11)

$$x \equiv a^n, \quad y \equiv b^n \pmod{n^\lambda}$$

ergeben dann:

$$x^2 + xy + y^2 \equiv 0 \pmod{n^\lambda}.$$

Nun habe ich im vorangegangenen gezeigt, daß n nicht $= 6m - 1$ sein kann. Sei daher n von der Form $6m + 1$, so wird wegen (70):

$$(x + y)^n - x^n - y^n \equiv 0 \pmod{n\,(x^2 + xy + y^2)^2}$$
$$\equiv 0 \pmod{n^{2\lambda+1}}$$

oder

$$(x + y)^n - z^n \equiv 0 \pmod{n^{2\lambda+1}}.$$

Nach Satz (2) ergibt sich dann:

$$x + y - z \text{ oder } c^n - b^n - a^n \equiv 0 \pmod{n^{2\lambda}}.$$

In den Gleichungen von (3) bis (20) ist also λ zu 2λ geworden. Es folgt demnach wiederum aus (8) und (20):

$$c \equiv a + b \pmod{n^{2\lambda-1}}.$$

Da

$$x^2 + xy + y^2 \equiv 0 \pmod{n^\lambda}$$

und jetzt

$$x \equiv a, \quad y \equiv b \pmod{n^\lambda}$$

ist, so erhält man wie oben nacheinander:

$$a^2 + ab + b^2 \equiv 0 \pmod{n^\lambda}$$

$$a^{2n} + b^n\,(a + b)^n \equiv 0 \pmod{n^{\lambda+1}}$$

$$a^{2n} + a^n b^n + b^{2n} \equiv 0 \pmod{n^{\lambda+1}}$$
$$x^2 + xy + y^2 \equiv 0 \quad „$$
$$(x+y)^n - z^n \equiv 0 \pmod{n^{2\lambda+3}}$$
$$c^n - b^n - a^n \equiv 0 \pmod{n^{2\lambda+2}}$$
$$c \equiv a + b \pmod{n^{2\lambda+1}},$$
$$a^2 + ab + b^2 \equiv 0 \pmod{n^{\lambda+1}}$$
$$x^2 + xy + y^2 \equiv 0 \pmod{n^{\lambda+2}}$$
. . . .

usw. bis zu
$$x + y - z \equiv 0 \pmod{n^\infty},$$
was nur möglich wäre, wenn
$$x + y - z = 0,$$
dies wegen (1) aber ausgeschlossen ist. —

Die Unmöglichkeit von (1) in ganzen zu n primen Zahlen kann für $n = 6m - 1$ auch auf folgende Weise bewiesen werden.

Für $x_1 = -x$ erhält man aus (114):
$$(z + x)(z^2 - zx + x^2) = z^3 + x^3 \equiv 0 \pmod{n}.$$
Da $z^3 + x^3$ in $z^{3(2m-1)} + x^{3(2m-1)}$ enthalten ist, so hat man auch:
$$z^{6m-3} + x^{6m-3} \equiv 0 \pmod{n},$$
und nach Multiplikation mit zx:
$$xz^{6m-2} + zx^{6m-2} \equiv 0 \pmod{n}.$$
Es ist aber
$$x^{n-1} = x^{6m-2} \equiv z^{6m-2} \equiv 1 \pmod{n};$$
folglich ergibt die vorhergehende Kongruenz:
$$x + z \equiv 0 \pmod{n}.$$

Ebenso erhält man:
$$z + y \equiv 0 \pmod{n}.$$
Durch Addition dieser beiden Kongruenzen wird dann:
$$2z + x + y \equiv 0 \pmod{n},$$
und man hätte wegen (4) die Kongruenz:
$$3z \equiv 0 \pmod{n},$$
die aber der Voraussetzung widerspricht.



A A Björnbo

ABHANDLUNGEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN
BEGRÜNDET VON MORITZ CANTOR · HEFT XXVI. 3

ALKINDI
TIDEUS UND PSEUDO-EUKLID

DREI OPTISCHE WERKE

HERAUSGEGEBEN UND ERKLÄRT VON

† AXEL ANTHON BJÖRNBO UND SEB. VOGL

MIT EINEM GEDÄCHTNISWORT AUF A. A. BJÖRNBO VON G. H. ZEUTHEN,
EINEM VERZEICHNIS SEINER SCHRIFTEN UND SEINEM BILDNIS
MIT 43 FIGUREN IM TEXT



LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1912



Unmittelbar nachdem der Druck der hiermit vorliegenden Arbeit vollführt worden war, schied der Herausgeber der drei lateinischen Übersetzungen, Unterbibliothekar an der Königl. Bibliothek in Kopenhagen, Dr. phil. Axel Anthon Björnbo, aus dem Leben. Am 6. Oktober 1911 trat, während er an seinem Schreibtisch über der Arbeit saß, plötzlich eine Herzlähmung ein. Dieser Todesfall mußte alle überraschen, die da wußten, welch große Tätigkeit er bis zu allerletzt entfaltete. Diejenigen aber, die seinen Gesundheitszustand genauer kannten, wußten, daß ein solcher Ausgang zu befürchten war, und zwar nicht zum wenigsten, weil er seiner selbst so wenig schonte. Selbst wurde er vielleicht zu der angestrengten Arbeit im Dienste der Bibliothek wie der Wissenschaft eben durch den Wunsch angeregt, daß so viel wie möglich vorliegen solle, bevor der Tod ihn überrasche.

Björnbo ist am 20. April 1874 geboren. Als ganz kleines Kind verlor er seinen Vater, den viel verheißenden, früh verstorbenen Philologen Dr. phil. Richard Christensen, und ward demnächst als einziges Kind von seiner Mutter erzogen, der in Dänemark geschätzten Blumenmalerin Anthonore Christensen, einer Tochter des dänischen Kriegsministers aus dem Jahre 1848 A. F. Tscherning. Den Namen Björnbo nahm er später an, weil in Dänemark die auf -sen endigenden Namen (so auch Christensen) so sehr verbreitet sind. In der Schule war Professor J. L. Heiberg sein Lehrer im Griechischen, und durch diesen gewann er früh Interesse für die alten griechischen Mathematiker, und er fand später bei seinem ehemaligen Lehrer Beistand und Rat in der wissenschaftlichen Tätigkeit, in der Heiberg wie wenig andere Einsicht und Erfahrung besitzen.

Björnbos Interesse für die Geschichte der exakten Wissenschaften führte ihn an der Universität zum Studium der Mathematik. Von den historischen Interessen in Anspruch genommen, brachte er allerdings dies Universitätsstudium zu keinem Abschluß; aber eine Aufgabe, die ihm gestellt wurde, betreffs der beiden ersten Bücher von Menelaos' Sphärik, gab ihm die Gelegenheit zu zeigen, wieviel er auf seinem eigentlichen Gebiete zu leisten vermochte: seine reichhaltigen Aufschlüsse über die ganze ältere griechische Sphärik und deren Zusammenhang mit den beiden genannten Büchern waren sehr lehrreich für denjenigen, der die Aufgabe gestellt hatte.

Björnbo reiste sodann nach München, um bei v. Braunmühl die wünschenswerte Schulung in mathematischer Geschichtsforschung und bei Traube

Anleitung im Handschriftenlesen zu erhalten, und setzte nun das mathematische Studium an den dortigen Hochschulen fort. Hier kam ihm außerdem bei seinem besonderen Studium von Menelaos und namentlich von dessen interessantem dritten Buch v. Braunmühls Anleitung zustatten; hat doch dieser Forscher den großen Einfluß ebendieser Arbeit auf die arabische Trigonometrie an den Tag gefördert. Nach einem Besuch in Rom, auf der Suche nach den notwendigen Handschriften, veröffentlichte Björnbo 1902 die „Studien über Menelaos' Sphärik", durch die er an der Universität München den Doktorgrad gewann. Durch textkritische, historische und mathematische Untersuchungen führt diese Schrift zu bedeutenden Aufschlüssen über die ganze griechische Sphärik und die sphärische Trigonometrie. Die Menelaosausgabe nach arabischen, lateinischen und hebräischen Texten, die er in Gemeinschaft mit dem gründlichen Arabologen Dr. phil. R. Besthorn und, was die hebräischen Texte betrifft, mit Beistand von Professor Dav. Simonsen vorbereitete, ist leider nicht vollendet worden; man hofft aber, diese Arbeit teilweise zum Abschluß bringen zu können.

Bei dem erwähnten Besuch in Rom machte Björnbo einen Fund, dessen große Bedeutung ihm, v. Braunmühls Schüler, sofort einleuchten mußte; er fand hier eine Johannes Werners *De triangulis sphaericis* und *De meteoroscopiis* enthaltende Handschrift. Der Inhalt der ersteren Schrift, die er 1907 veröffentlichte, ergab sich als eine Bestätigung von v. Braunmühls Vermutungen, namentlich in bezug auf den Gebrauch der prosthaphäretischen Methode. Die zweite Schrift ist gewiß zur Herausgabe fertig.

Die Arbeiten an Menelaos und Werner gaben Björnbo in reichem Maße Gelegenheit, sich mit der Überlieferung der griechischen Mathematik durch die Araber und das christliche Mittelalter zu beschäftigen, durch die wir den Menelaos kennen lernen, und aus der Werner geschöpft hat. Dadurch ward er veranlaßt, die textkritischen Prinzipien zu prüfen, die bei der Herausgabe mathematischer Schriften aus dem Mittelalter zu befolgen sind, deren wesentliche Bedeutung teils darin besteht, daß sie auf die ursprünglichen Quellen dieser Überlieferung zurückweisen, teils darin, daß sie uns über die Form aufklären, in der diese Mathematik zu den Renaissanceschriftstellern gelangte, die sie als Ausgangspunkt für eigene, tatsächlich neue Untersuchungen benutzten. Er stellte in der Bibliotheca mathematica 4_3 folgende Ansprüche an die Ordnung der mittelalterlichen Handschriften, die diese Überlieferung enthalten: „Die Texte müssen ohne Rücksicht auf Über- und Unterschriften nach ihren Anfangsworten alphabetisch zusammengestellt werden. Ferner müssen Texte mit demselben Anfang und verschiedenen Schlußworten auseinander gehalten werden." Selbst hat er eine nach diesem Prinzip geordnete Beschreibung von Texten mathematischen, astronomischen oder astrologischen Inhalts in Angriff genommen, die er bei seinem Tode der Bibliotheca mathematica, Herausgeber G. Eneström in Stockholm, vermacht hat.

Daß Björnbo auch selbst unter den ersten war, seine textkritischen Prinzipien praktisch in Anwendung zu bringen, davon legt die gegenwärtige Aus-

gabe von drei optischen Werken Zeugnis ab. Auch hat er in Verbindung mit Dr. Besthorn eine Herausgabe von Athelard von Baths Übersetzung von Al-Chwarizmis trigonometrischen Tafeln vorbereitet. Dieses Werk war so gut wie druckfertig, als neuerdings aus Madrid die Mitteilung von einer bisher unbekannten Handschrift eintraf, die noch zu berücksichtigen wäre. Die Herausgabe kann somit nun nach Björnbos Tode nicht verwirklicht werden; das Material sowie das fertiggestellte Manuskript wird aber, nachdem Dr. Besthorn die arabischen Stellen durchgesehen hat, in der Königl. Bibliothek zu Kopenhagen hinterlegt werden. Björnbo hat selbst schon in einer Gelegenheitsschrift (Festskrift i Anledning af Zeuthens 70 Aars Fœdselsdag) die wichtigsten Aufschlüsse an den Tag gefördert, die man daraus über das Verhältnis der ersten arabischen Trigonometrie zur indischen und namentlich griechischen erhält, und er erwähnt eine „Tangenstafel in statu nascendi". Er hat auch über Gerhard von Cremonas Übersetzung von Al-Chwarizmis Algebra und Euklids Elementen geschrieben und (Cantor-Festschrift) über die mittelalterlichen Übersetzungen direkt aus dem Griechischen.

Björnbo hat auch Handschriften gefunden, die auf einem ganz anderen Gebiete unsere Kenntnisse der Geschichte der Wissenschaften zu Ende des Mittelalters erweitert haben, nämlich zwei handschriftliche Beschreibungen des Nordens durch Claudius Clavus Niger. Dieser Fund veranlaßte ihn und seinen Bibliothekskollegen Carl S. Petersen zur Ausarbeitung einer Abhandlung „Fyenboen Claudius Claussøn Swart (Claudius Clavus, Nordens œldste Kartograf)", die in den Schriften der Königl. Dänischen Akademie aufgenommen wurde. Diese Arbeit, die später ins Deutsche übersetzt wurde, verbreitete viel Licht über die Kartographie der darauf folgenden Zeit und deren Verwendung von Clavus' Karten und gewann deshalb viele Anerkennung von seiten der Fachverständigen. Das gleiche gilt von den später in Gemeinschaft mit Carl S. Petersen von Björnbo herausgegebenen „Anecdota cartographica septentrionalia".

Wie man sieht, hat A. A. Björnbo verschiedene unvollendete oder noch nicht herausgegebene Arbeiten hinterlassen. Er war bis zuletzt gut ausgerüstet, um nach eigener Wahl noch mehr Arbeiten von großer Bedeutung auf sich nehmen zu können. Sein frühzeitiger Tod ist somit ein großer Verlust, den alle diejenigen mitfühlen werden, die an seinem glühenden Interesse für die Kenntnis der Geschichte, Entwicklung und Verpflanzung der mathematischen und geographischen Wissenschaften teilnehmen.

Seine Freunde werden ihn als Menschen und als liebenswürdigen Forscher vermissen, der mit großer Bereitwilligkeit auch anderen beistand.

H. G. Zeuthen.

Verzeichnis
über Axel Anthon Björnbos bisher veröffentlichte Arbeiten.

1894. Cirklens Kvadratur hos Grækerne. Nyt Tidsskr. f. Math. 5 B, p. 63—67.

1895. Cirklens Kvadratur hos Grækerne. Ibid. 6 B, p. 52—56, 84—89.

1901. Hat Menelaos aus Alexandria einen Fixsternkatalog verfaßt? Bibl. Math. 2_3, p. 196—212. — (Rezension.) ANARITII in decem libros primos Elementorum Euclidis commentarii ex interpretatione Gherardi Cremonensis in codice Cracoviensi 569 servata edidit M. CURTZE. Ibid. 2_3, p. 363—366.

1902. Über zwei mathematische Handschriften aus dem vierzehnten Jahrhundert. Ibid. 3_3, p. 63—75. — Studien über MENELAOS' Sphärik, Beiträge zur Geschichte der Sphärik und Astronomie der Griechen. Abhandl. z. Gesch. d. math. Wissensch. XIV, p. 1—154 (u. IV). [Über MENELAOS' Sphärik, Inauguraldissertation München. B. G. Teubner, Leipzig 1902.]

1903. (Rezension.) GINO LORIA, Le scienze esatte nell'antica Grecia. Libro III—IV. Bibl. Math. 3_3, p. 414—422. — HERMANNUS DALMATA als Übersetzer astronomischer Arbeiten. Ibid. 4_3, p. 130—133. — Die mathematischen S. MARCO Handschriften in Florenz. Ibid. 4_3, p. 238—245. — (Notiz.) Ein Lehrgang der Mathematik und Astrologie im Mittelalter. Ibid. 4_3, p. 288—290. — Über ein bibliographisches Repertorium der handschriftlichen mathematischen Litteratur des Mittelalters. Ibid. 4_3, p. 326 —333.

1904. Fyenboen Claudius Claussøn Swart (CLAUDIUS CLAVUS), Nordens ældste Kartograf. En Monografi af AXEL ANTHON BJØRNBO og CARL S. PETERSEN. D. kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter. 6 Række, hist. og filosof. Afd. VI, 2 (260 S., 3 Taf.). — Et Bidrag til de middelalderlige Pergamenthaandskrifters Tilblivelsesproces. Bogvennen MDMI—III, p. 36—43.

1905. Nordens ældste kartograf. Foredrag d. 19. Maj 1904. Norsk geogr. Selsk. Aarb. XV, p. 109—128. — (Notiz.) WALTER BRYTES Theorica planetarum. Bibl. Math. 6_3, p. 112—113.

1906. Die mathematischen S. Marcohandschriften in Florenz. Bibl. Math. 6_3, p. 230 —238. — GERHARD VON CREMONAS Übersetzung von Alkwarizmis Algebra und von Euklids Elementen. Ibid. 6_3, p. 239—248. — Det nye kongelige Bibliotek Anno 1906. Gads Danske Magasin I, p. 136—148. — (Rezension.) MAX SCHMIDT, Zur Entstehung und Terminologie der elementaren Mathematik. Deutsche Literaturztg. XXVII, p. 2901—2902.

1907. Übersiedelung der Königlichen Bibliothek in Kopenhagen in den Neubau. Zentralblatt f. Bibliotheksw. 24, p. 1—11. — IOANNIS WERNERI De triangulis sphaericis libri quatuor. De meteoroscopiis libri sex in recensione GEORGII IOACHIMI RHETICI. I. De triangulis sphaericis. Abhandl. z. Gesch. d. math. Wissensch. XXIV, 1. — ED videnskabelig Bedrift. Tilskueren 1907, p. 729



—737. — (Rezension.) Et moderne Folk i Krig. En lœrerig Bog. Gads Danske Magasin II, p. 158—162. — Ein Beitrag zum Werdegang der mittelalterlichen Pergamenthandschriften. Zeitschr. f. Bücherfreunde 1907, p. 330—335.

1908. Anecdota cartographica septentrionalia ediderunt AXEL ANTHON BJØRNBO und CARL S. PETERSEN. Hauniœ sumptibus Societatis Regiae Scientiarum Danicae MCMVIII [Kongelig Hofboghandel Andr. Fred. Høst & Søn). — Blandt Inkunabler og Manuskripter i det kgl. Bibliotek. I—II. Gads Danske Magasin p. 721—731, 789—798. — (Rezension.) IVAR HALLBERG, L'extrême Orient dans la littérature et la cartographie de l'Occident. Geogr. Tidsskr. XIX, p. 300—302. — (Rezension.) R. E. PEARY, Nearest the Pole. Ibid. XIX, p. 302—306.

1909. Polarforskningen og den historiske Kritik. I—IV. Ibid. XX, p. 17—21, 58—64, 105—110, 281—290. AL-CHWÂRIZMÎ's trigonometriske Tavler. Festskrift til H. G. ZEUTHEN, p. 1—17. Kbh. 1909. — Der Däne CLAUDIUS CLAUSSØN SWART (CLAUDIUS CLAVUS). Eine Monographie von A. A. BJÖRNBO und CARL S. PETERSEN. Wagnersche Universitätsbuchhandlung Innsbruck. 1909. VIII u. 266 S., 3 Taf. — ADAM af Bremens Nordensopfattelse. Aarbøger f. nord. Oldkyndighed 1909, p. 120—244. — Die mittelalterlichen lateinischen Übersetzungen aus dem Griechischen auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften. Festschrift gewidmet MORITZ CANTOR p. 93—102. Vogel, Leipzig 1909. [Auch im Arch. f. d. Gesch. d. Naturwissensch. u. d. Techn. I, p. 93—102.] — De œldste danske Karrikaturer. Gads Danske Magasin IV, p. 168—176. — (Rezension.) ARCHIMÈDE, Des théorèmes mécaniques ou de la méthode (éphodiques). Traduit par THÉODORE REINACH. Deutsche Literaturztg. XXX, p. 563—564. — (Rezension.) Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates. Griechisch und deutsch von FERDINAND RUDIO. Ibid. 1339—1340.

1910. Die echte Corte-Real-Karte. Peterm. Mitt. 1910 II, p. 313—315. — Kopenhagener Brief [Über die wechselnden Ausstellungen in der Kgl. Bibliothek]. Beiblatt d. Zeitschr. f. Bücherfreunde, N. F. II. Jahrg., p. 256—258.

1911. Biblioteksskrifter I. AXEL ANTHON BJÖRNBO: Statens Bogkøb. København. J. Frimodts Boghandel. 1911. 38 S. — Kopenhagener Brief [Über die permanente Ausstellung in der Kgl. Bibliothek]. Beiblatt der Zeitschr. f. Bücherfreunde. N. F. III. Jahrg., p. 178—180. — (Rezension.) ROBERT E. PEARY, The North Pole. Geogr. Tidsskr. XXI, p. 113—115. — (Rezension.) GERHARD SCHØNING, Reise som giennem en Deel af Norge i de Aar 1773, 1774, 1775 pas hans Majestœt Kongens Bekostning er giort og beskreven. Ibid. XXI, p. 115—116. — Cartographia Groenlandica I—II. Meddelelser om Grønland. H. 48. København 1912, p. 1—330. — Alkindi, Tideus und Pseudo-Euklid. Drei optische Werke. Herausgegeben von AXEL ANTHON BJÖRNBO und SEB. VOGL. Abhandl. z. Gesch. d. math. Wissensch. XXVI 3, p. 1—176 (u. VI).

Außerdem schrieb BJÖRNBO Aufsätze für dänische Zeitungen:

Politiken: 1909, 15. IX.: Cook ktr. PEARY, Et foreløbigt Opgør. — 9. X.: Shackleton og den engelske Polarforskning. — 1910, 28. VI.: Dansk Biblioteksliv. — 18. VII: Replik.

Provindspressens Kronik: 1910, 14. XII.: Danske Nybyggere.

Riget: 1910, 28. XII.: En Standard Udgave. — 1911, 2. I.: Nordpolen før og nu. — 30. I.: Fridtjof Nansen og Vinlandsreiserne. — 25. II.: Sven Hedin. — 10. III.: Det kgl. nordiske Oldskriftsselskab. — 6. IV.: Arktisk Literatur. — 19. IX: Statens Bogkøb. — 27. IX.: Et Moment i Cook-Affœren. — 2. X.: Statens Bogkøb. — 5. X.: Den hvide Races Sejrsgang. — 14. X.: Lande og Folk.

Berlingske Tidende: 1911, 1. II: Hr. Scheibler og Bogtrykkerkunsten. — 3. X.: Statens Bogkøb.

Björnbo war Mitarbeiter an:

Paulys Real-Encyklopädie der klassischen Altertumswissenschaften. Neue Bearbeitung (Hippias, Hippokrates von Chios, Hypsikles). Stuttgart. J. B. Metzlersche Buchhandlung. — Reallexikon der Germanischen Altertumskunde. Herausgegeben von Johannes Hoops (Geometrie, Rechenkunst) Straßburg. Karl J. Trübner. 1911 ff. — Illustreret Konversations Leksikon. Redigeret af E. Rørdam, København. Hagerup. [Die Beiträge hieraus, Grönland, Polarforschung m. m. betreffend, werden 1912 als Broschüre erscheinen.]

Björnbo redigierte:

Katalog over Erhvervelser af nyere udenlandsk Litteratur ved Statens offentlige Biblioteker 1903—1910. København 1904—11. — Katalog over Erhvervelser af udenlandsk teknisk Litteratur ved Københavns kommunale og Foreningsbiblioteker 1909—1910. København 1910—11.

Raphael Meyer.

OPUSCULA OPTICA JACOBI ALKINDI TIDEI FILII THEODORI NEC NON PSEUDO-EUCLIDIS

EX INTERPRETATIONE LATINA

GERARDI CREMONENSIS

PRIMUM EDIDIT

AXEL ANTHON BJÖRNBO

DIE OPTIK DES ALKINDI
TIDEUS „ÜBER SPIEGEL“
PSEUDO-EUCLIDES „ÜBER SPIEGEL“

ERKLÄRT VON

SEB. VOGL

VORWORT.

Schon im Jahre 1901 fing der Herausgeber der vorliegenden drei Texte an, die unedierten mathematischen Übersetzungen des GERHARD V. CREMONA abzuschreiben, und zwar zunächst nach der berühmten Pariser Handschrift Cod. Paris. lat. 9335. In erster Reihe wurden natürlich die Werke gewählt, die nicht in der griechischen oder arabischen Originalsprache vorlagen. Zu diesen gehörten alle die hier edierten Texte. Der Gedanke war, sie mit anderen von MAX. CURTZE abgeschriebenen Gerhardschen Übersetzungen zu vereinigen. Auf Studienreisen wurden nach und nach mehrere Handschriften kollationiert; die endliche Herausgabe wurde aber wegen anderer vordringlicherer Arbeiten hinausgeschoben.

Indessen wurde die Kollation der vorliegenden drei optischen Werke durch die Vermittelung des Herrn Prof. Dr. EILH. WIEDEMANN in Erlangen an seinen Schüler, den Kommentator derselben, ausgeliehen, und da dieser seine Erklärungen gern veröffentlichen wollte, beschlossen wir, diese optischen Arbeiten in der vorliegenden Gerhardschen lateinischen Übersetzung nebst den Kommentaren dazu gemeinsam zu publizieren, um so mehr, als diese Texte sehr geeignet waren, zusammen herauszukommen. Die noch fehlenden Handschriften wurden schleunigst kollationiert, namentlich die wichtige Handschrift in Kraków, deren Ausleihe nach Dänemark früher verweigert worden war, nun aber durch die Güte der Direktion gestattet wurde. Vom TIDEUS-Texte bekamen wir eine photographische Kopie der Abschrift im Cod. Palat. lat. 1377 durch die Vermittelung des Herrn Bibliothekspräfekt FR. EHRLE in Rom.

Die Erklärung zu PSEUDO-EUKLID, De speculis, war übrigens schon in der Cantor-Festschrift (Archiv für die Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik), Leipzig 1909, veröffentlicht worden. Es wurde uns aber von dem Verlag von F. C. W. VOGEL in Leipzig und der Redaktion des Archivs freundlichst erlaubt, diese Erklärung in die hiesige Publikation aufzunehmen. Es geschah jedoch in etwas verbesserter Form, weil inzwischen die ausführliche Publikation der Schrift „über den sphärischen Hohlspiegel“ durch E. Wiedemann Licht auf die bisher unklaren Probleme 13 und 14 geworfen hatte.

Überhaupt sind wir Herrn Prof. E. WIEDEMANN den größten Dank schuldig für Anregung und Vermittlung sowie für seine zahlreichen Winke und Ratschläge, durch die er die Bearbeitung der drei Schriften förderte

Den besten Dank bringen wir auch Herrn Prof. Dr. PUTZ in Passau entgegen für seine freundlichen Mitteilungen über den im TIDEUS-Texte erwähnten Essigstein.

Dank gebührt auch Herrn Dr. HANS RAEDER, der den Alkindi-Text vor mehreren Jahren kritisch durchgesehen hat, um sich über den Wert und möglichen Zusammenhang der benutzten Handschriften zu äußern; ferner Herrn Bibliotheksassistent SVEND DAHL, der uns bei der Korrektur der lateinischen Texte die beste Hilfe leistete; namentlich aber Herrn Bibliotheks-sekretär C. BEHREND, der eine sehr notwendige kritische Korrektur der Sprache in den öfter schwer verständlichen Gerhardschen Übersetzungen besorgte. Die Schwierigkeiten in denselben, die nur von einem Arabologen gelöst werden konnten, erklärte uns der ausgezeichnete Kenner älterer arabischer Handschriften Dr. R. BESTHORN, alle in Köbenhavn.

Persönliche Unterstützung erhielten wir bzw. von der CARLSBERG-Stiftung in Köbenhavn und der Theolog. Fakultät in München aus dem Dr. FRANZschen Stipendienfonds zur Förderung der Naturwissenschaften.

Axel Anthon Björnbo
Köbenhavn

Seb. Vogl
München

INHALT.

CONSPECTUS CODICUM.

		continet		
		Alkindi	Tideus	Pseudo-Euclides
A	Cod. Ambros. T. 100. sup. XIV. saec. ineunte. Bibliotheca Ambrosiana. Milano.	×	×	×
B	Cod. Basil. F. II. 33. XIV. saec. medio. Öffentliche Bibliothek. Basel.	×	×	×
C	Cod. Coll. Corp. Chr. 254. XIV. saec. & XVI. saec. (C'). Christ Church College. Oxford.	×		
D	Cod. Dresd. Db. 86. XIII.—XIV. saec. Öffentliche Bibliothek. Dresden.			×
E	Cod. Cantabr. Ii. 1. 13. XIII. saec. University Library. Cambridge.			×
K	Cod. Cracov. 569. XIV. saec. ineunte. Universitätsbibliothek. Kraków.	×	×	
L	Cod. Palatin. lat. 1377. XIV.—XV. saec. Bibliotheca Apostolica Vaticana. Roma.		×	
M	Cod. Ambros. P. 21. sup. XIV.—XV. saec. Bibliotheca Ambrosiana. Milano.	×		
N	Cod. Amplon. Q. 385. XIV. saec. exeunte. Bibliotheca Amploniana. Erfurt.		×	×
O	Cod. Ashmolean. 357. XIV. saec. exeunte. Bodleian Library. Oxford.	×		
P	Cod. Paris. lat. 9335 [Suppl. 49]. XIV. saec. ineunte. Bibliothèque Nationale. Paris.	×	×	×
Q	Cod. Digbean. 40. XIII. saec. Bodleian Library. Oxford.			×
R	Cod. Paris. lat. 10260. XVI. saec. Bibliothèque Nationale. Paris.	×	×	×
S	Cod. Savilian. 24. XVI. saec. Bodleian Library. Oxford.	×		
T	Cod. Coll. Rom. H. C. 93 [Gesuitic. 419 = Vitt. Em. 2548]. XVI. saec. Bibliotheca Vittorio Emanuele. Roma.	×	×	×
V	Cod. Vatic. lat. 2975. XVI. saec. Bibliotheca Apostolica Vaticana. Roma.	×	×	×
X	Cod. Norimberg. cent. V, 64. XIII.—XV. saec. Stadtbibliothek. Nürnberg.			×
Y	Cod. Magliabecchian. XI. 30 [II. III. 35]. XVI.—XVII. saec. Bibliotheca Nazionale. Firenze.			×
Z	Cod. Magliabecchian. XI. 55 [II. IV. 352]. XVI. saec. Bibliotheca Nazionale. Firenze.			×

EXCERPTA IN

	Alkindi	Tideus	Pseudo-Euclides
Cod. Digbean. 168. XIII.—XIV. saec. Bodleian Library. Oxford.	×	×	

ALKINDI DE ASPECTIBUS

EDIDIT

AXEL ANTHON BJÖRNBO

COMMENTARIIS INSTRUXIT

SEB. VOGL

LIBER

JACOB ALKINDI

DE CAUSIS DIUERSITATUM ASPECTUS ET DANDIS DEMONSTRATIONIBUS GEOMETRICIS SUPER EAS.

Oportet, postquam optamus complere artes doctrinales, et exponere in eo, quod antiqui praemiserunt nobis de eis, et augere, quod inceperunt et in quibus fuerunt nobis occasiones adhipiscendi uniuersas bonitates animales, ut de diuersitatibus aspectus secundum nostrae possibilitatis mensuram uniuersaliter et demonstratiue loquamur, et nostrorum sermonum de his principia ex rebus naturalibus ponamus, eo quod aspectus, quo singularia comprehenduntur diuersa, sit unus ex sensibus, quatenus nobis declaretur, qualiter uisibilia comprehenduntur. Postea uero principia geometrica, quae nobis erunt demonstrationum geometricarum principia, erunt a naturalibus secunda, licet quantum ad nos fuerint prima, ne nostrarum demonstrationum principia sint, sicut relationes non naturaliter positae. Sic enim sermones nostri essent fabulosi, demonstrationis uiam egredientes.

Rogamus itaque illum, ad quem hic noster liber peruenerit, ut si aliquid inuenerit, per quod extimet, nos minus dixisse in eo, toleret

---

LIBER . . . EAS] P super eas *om.* A Incipit liber Jacob Alchindi de diuersis causis diuersitatis aspectus et dandis demonstrationibus super eas feliciter M Jacobus Alkindi de aspectibus B Incipit liber Jacobi Alkindi de umbris et de diuersitate aspectuum adducentis in hoc rationes geometricae C′ Jacobi Alkit de causis diuersitatis aspectuum liber S Incipit liber Jacobi Alkit de causis diuersitatis aspectuum K Tractatus de radiis et umbris et aliis ad perspectiuam pertinentibus O. 1. optamus] optauimus M. complere] complexione A. 2. nobis] *om.* M. 3. adhipiscendi] PA adhispiscendi K adipiscendi BMC′OS. animales] alias (?) S. 4. , ut]. Et C′. de] de diuersis K. 5. demonstratiue] demonstratem K demonstrantem M. de his] *om.* C′. 6. quo] per C′. singularia] singula MC′. 7. quatinus] PA quatenus BM quatuor C′ q̊rtuus KSO. 8. declaretur] declaratur M declarare C′. geometrica] geometria K geometriae M. 9. erunt] est M. demonstrationum] demonstrationum de K demonstrationis de S. geometricarum] *om.* B. 10. fuerint] fuerunt M. ne] nec C′. 11. nostrarum demonstrationum] nostrarum declarationum C demonstrationum nostrarum KS. 12. nostri] *om.* KS. demonstrationis] demonstres s[*cilicet*] B. 13. uiam] inani K. 14. hic noster liber] liber ille C′. peruenerit] *om.* B. 15. aliquid] aliqui K. extimet, nos] estimet,nos C′ nos existimet B. toleret] tolleret BC′O tollent M.

et non festinet cogitare mala, donec omnes tractatus, qui de omnibus quantitatibus editi sunt, ueraciter intelligat — huius enim nostri libri ordo post illos consistit — et supleat, quod nos minus dixisse extimat, secundum quod homines sui temporis eo eguerunt. Uniuersis namque hominibus cuiuslibet temporis et partis abbreuiandi et perlongandi mensura est facilior et eorum uoluntatibus magis conferens. Nostra autem uoluntas est nobis bene consulendo auxiliantibus, et in quibus elaborauimus consentientibus grates agere, et cui possumus proficere secundum utilitatem humanam habentium naturam et non sperare laudem neque beluinam arrogantiam.

Quod uero uidemus ex rectitudine finium umbrarum corporum in latitudine et luminibus per fenestras ingredientibus, necessario ducit nos ad hoc, ut transitus radiorum procedentium a corporibus luminosis fiat secundum rectitudinem rectarum linearum. Nihil enim horum duorum esset secundum quod sentimus, nisi radii secundum rectarum linearum rectitudinem procederent. Nos namque uidemus res luminosas causas illuminandi corpora et iaciendi umbras illorum corporum existere.

Sol enim, cum coram corpore paratur, illuminat ipsum, et umbra corporis existit in facie corporis alterius oppositi parti solis. Candelae quoque similiter faciunt, cum coram corporibus positae fuerint. Videmus enim radios procedentes a candelis, quae coram nobis ponuntur, causas illuminandi corpora eis opposita et iaciendi illorum corporum umbras existere. Quorum quidem umbrae quandoque corporibus existunt aequales quandoque maiores quandoque eis minores.

1.

Videmus autem corpora, quae faciunt umbras eis aequales, aequari candelis ea illuminantibus, et horum quidem corporum fines umbrarum in latitudine aequidistantium linearum, et si ualde protendantur, existere. Non enim concurrunt, neque latitudo umbrae minoratur neque dilatatur neque augetur, sed umbra existit ei aequalis secundum unam habitudinem, siue protendatur aut abbreuietur.

---

1. et non festinet] inde festinent M. 2. sunt] *om.* K. huius] huiusmodi S. 3. post] plus C′. extimat] estimat B estimet S existimat C′. 4. eguerunt] eguerint PO. 5. perlongandi] prolongandi C′. 6. facilior] facior K. 7. bene] *om.* KS. elaborauimus] elaboramus B. consentientibus] *om.* M. 8. possumus] possimus K. proficere] perficere KC′. 9. sperare] superare M. beluinam] *om.* B. 11. uero] uidetur M. rectitudine finium] rectifinuum M. 12. fenestras] fenestram C′. necessario] n^c īō (= *nunc ideo*) *pro* *nc̄c̄o* (= *necessario*) M. 13. hoc] haec C′. transitus] transit M. luminosis] lucidosis C′. fiat] fiet B. 14. rectarum] *om.* B. 14—15. Nihil ... linearum] *om.* KS. 15. quod] quod nos C′. 16. procederent] procedent (?) P. 17. iaciendi] iacendi AB. 18. paratur] versatur C′. 20. similiter] aliter B. cum] *om.* A. 22. eis] eius M. iaciendi] iacendi AB. 23. quidem umbrae] *om.* B. existunt ... quandoque] *om.* B. 24. eis] *om.* B. 25. faciunt ... aequales] KSO umbras eis aequalia faciunt B faciunt umbras eis aequalia PAM faciunt umbras eis umbris aequalia C′. 26. aequari] *om.* O. ea] eas P *om.* C′. corporum] corpora P. 27. fines] facies C′. latitudine] latitudinem K. 28. protendantur] protendatur S. concurrunt] concurrit B. 29. umbrae] umbrarum C′. 30. habitudinem] latitudinem C′. 31. aut] siue BC′.

Verbi gratia sit corpus luminosum contentum a circulo *abg*, et corpus, super quod cadit lumen, contentum a circulo *deu*, sitque diametrus *ag* diametro *du* aequalis.

Sentimus itaque umbram apud hoc inter duas lineas aequidistantes *adz*, *guh*.

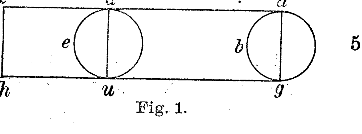


Fig. 1.

Reperimus enim perpendiculares cadentes super duas lineas *dz*, *uh* aequales duabus lineis *du*, *zh* [*Eucl. I 33*]. Est ergo quod continet umbram arcus *deu* et lineae *dz*, *uh*. Et hoc est, quod demonstrare uoluimus.

2.

Umbras uero corporibus uidemus minores, cum candelae illuminantes corpora sunt maiores corporibus. Quorum quidem corporum umbrarum, quantumcunque protendantur et elongentur, finium lineas constringi et approximare uidemus in latitudine, donec concurrant, et fiant eorum umbrae pinealis figurae, quarum finales lineae non sunt aequidistantes.

Verbi gratia sit corpus illuminans, quod continetur a circulo *ab*, et corpus, super quod cadit lumen, quod continetur a circulo *gd*. Sitque diametrus *ab* maior diametro *gd*.

Sentimus ergo umbram apud hoc inter duas lineas non aequidistantes sicut duas lineas *gu, dz,* Et reperimus duos angulos *ugd* et *zdg* duobus rectis minores. Si ergo duae lineae *gu, dz* protrahantur in parte una, impossibile est, quin concurrant, sicut concursus duarum linearum *gue, dze* existit super notam *e*. Quod si etiam perpendicularis *uz* super notam *z* lineae *de* protrahatur [*Eucl. I 11*], inuenietur angulus *euz* minor recto. Angulus uero *uze* est rectus, eo quod *uz* sit perpendicularis super lineam *de*. Duo ergo anguli *ezu*, *euz* duobus rectis minores existunt. Cum ergo duae lineae *dz*, *gu* ad partem *uz* protrahantur, necessario concurrent [*Eucl. I post. 5*].

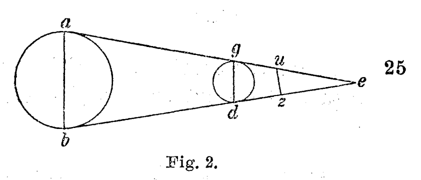


Fig. 2.

---

2. diametrus] diametros S dyameter BMC′. 4. itaque] *om.* C′. apud hoc] cum B. 5. *guh*] *ghu* C′. 6. cadentes] *om.* C′. 7. super] supra M. 8. *du, zh*] *dz, nh* C′. 9. *dz, uh*] *dz* et *nh* C′. 9—10. Et . . . uoluimus] *om.* S. 11. uero] quoque B. uidemus] uidemus corporibus K. 12. sunt] sint C′. maiores] maiora BS. quidem] quam B quanto S. 13. protendantur] protendatur B. 13—14. protendantur . . . uidemus] uidere M. elongentur] elongantur S. 14. finium] firmum A. 15. donec] *om.* C′. pinealis] pmealis K piramidalis S. 16. lineae] figurae C′. 17. sit] *om.* B. 18. super] supra M. cadit] cadat KS. Sitque] Sit M. diametrus] dyameter BM diametros S. 20. apud] quod apud C′. 21. *gu, dz*] *gu, d* M *dv, dn* C′ *du, dz* K *DN*, *DZ* S. *ugd*] *ug* B. *zdg*] *dg* B. 22. *gu, dz*] *gu t dz* et M. in parte una] in persone et B. 23. quin] qui KS. 24. *dze*] *dez* A. 25. super] supra M. *e*] eius KS. etiam] *om.* KS. perpendicularis] perpendiculare M. 26. super] supra M. protrahatur] protrahantur KS. 27. inuenietur] Et inuenietur KS inuenitur C′. 28. *euz*] *vze* C′. 28—30. minor . . . *de*] *om.* C′. 28. *uze*] *uez* K *NEZ* S. 29. super] supra M. 30. *euz*] *eu* et M. 31. *uz*] *u* et M. protrahantur] protrahentur AB protrahuntur S.

Quod ergo continet umbram est arcus *gd*, qui est a parte *uz*, et duae lineae *ge*, *de*. Est itaque figura umbrae pinealis sicut figura *gde*. Et illud est, quod demonstrare uoluimus.

3.

Umbras quoque corporibus maiores uidemus, cum candelae corpora illuminantes sunt eis minores. Quarum, quanto magis protenduntur et elongantur, dilatantur et ampliantur et separantur finium lineae in latitudine et existunt non aequidistantes.

Verbi gratia sit corpus illuminans, quod a circulo *ab* continetur, et corpus, super quod cadit lumen, quod continetur a circulo *gd*, sitque diametrus *ab* minor diametro *gd*.

Sentimus igitur umbram apud hoc inter duas lineas rectas non aequidistantes, quapropter quod est inter eas adauget interuallum, quanto magis elongatur umbra, sicut duae lineae *ge*, *dz*.

Cum enim protraxerimus super lineam *dz* perpendicularem peruenientem ad lineam *ge* [*Eucl. I 11*], quemadmodum perpendicularis cadens super notam *h* lineae *dz* et notam *u* lineae *ge*, inueniemus angulum *euh* recto maiorem. Duo igitur anguli *euh*, *zhu* duobus rectis existunt maiores; ergo linea *ez* est maior linea *uh*. Et quanto magis protractae fuerint duae lineae *ge*, *dz*, augmentabit quod est inter eas interuallum. Et erit umbra, quod continetur ab arcu *gd* et duabus lineis *eg*, *zd*. Neque umquam accideret hoc, nisi radii candelarum secundum rectas procederent lineas. Et illud est, quod demonstrare uoluimus.

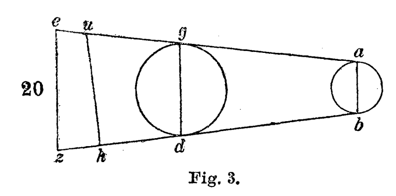


Fig. 3.

4.

Uni praeterea corpori columpneae figurae, cum a pluribus circumdatum fuerit candelis in diuersis partibus, umbras secundum numerum candelarum ipsum illuminantium prouenire cernimus. A cuiusque quarum medio cum linea producta fuerit,

1. *gd*] *dg* C′. *uz*] *a, u, z* M. duae] *om.* C′. 2. *de*] *de* continent umbram C′. 2—3. sicut . . . uoluimus] *om.* O. 2. illud] hoc B. 3. ,quod . . . uoluimus] propositum B. 4. quoque] quoque de M. 5. corpora] corpus MC. sunt] sint O. Quarum] Quorum K. 7. latitudine] altitudine M. et] *om.* K. 10. super] supra M. sitque] sit M. diametrus] dyameter BMC. 11. diametro] *om.* K. *gd*] *om.* C. 12. rectas] *om.* B. 13. adauget] auget K. 14. *ge*] *e suprascr.* B. *dz*] *ds* C *dzd* B. 15. protraxerimus] protraximus KM. super] supra M *et sic semper.* *dz*] *ds* C. peruenientem] prouenientem K. 17. *ge*] *gu* K. 18. inueniemus] inuenimus KM. *euh*] *eub* M *evb* C. 19. *euh, zhu*] *eub* etiam *bu* M. 20. maior] minor K. *uh*] *ub* M. 21. protractae] protentae A. 23. interuallum] interualium AM. quod] quae M. 24. *eg, zd*] *eg* et *dz* B *eg* et *d* M. Neque umquam] Sed numquam B. 25. rectas] *om* C. procederent] procenderent C procedunt B. 26. illud] hoc C. demonstrare uoluimus] monstrare uolumus C. 27. Uni] Cum BAM. praeterea] propterea (?) P. columpneae] talumpneae B. a] autem K. 28. umbras] umbris B. 29. ipsum] *om.* K. illuminantium] eluminantium B. prouenire] peruenire (?) P. 30. cuiusque] cuiuscunque K. quarum] quorum K. fuerit] *bis* B.

secans eam in duo media et secans corpus in duo media, et processerit secundum rectitudinem, perueniet ad unam candelarum et diuidet ipsam in duo media. Quod quidem nullo etiam contingeret modo, nisi radii candelarum secundum rectas procederent lineas.

Verbi gratia sit corpus, super quod cadit lumen, quod continetur a circulo *ab*, cuius centrum est *g*. Et sit unum corporum luminosorum, quod continetur a circulo *de*, cuius centrum est *u*. Aliud quoque corpus luminosum sit, quod continetur a circulo *zh*, cuius centrum est *t*.

Sentimus igitur umbram oppositam corpori *de* contineri a duabus lineis *ak*, *bl*. Cum ergo diuiserimus umbram *akbl* in duo media cum linea transeunte per centrum *g* et centrum *u*, diuidet duo corpora *ab*, *de* in duo media et duo media, quia transit per ipsorum centrum, sicut linea *mgu*.

Similiter quoque umbram oppositam corpori *zh*, quae continetur a duabus lineis *an*, *bs*, diuidit linea *tgq* in duo media, et diuidit unumquodque duorum corporum *ab*, *zh* in duo media, eo quod per eorum centrum transeat. Et illud est, quod demonstrare uoluimus.

Fig. 4.

5.

Videmus etiam umbrarum corporum, quorum loca candelarum in aere eorum capitibus sunt altiora, proportionem ad altitudinem corporum, sicut est proportio longitudinis extremitatum umbrarum cum eo, quod ei continuatur ab inferiori parte candelarum ad ipsas candelas. Quod etiam nullo contingeret modo, nisi candelarum radii secundum rectas protenderentur lineas.

Verbi gratia sit corpus, super quod cadit lumen, in loco *ab*, sitque umbrae ipsius extremitas nota *g*, et sit corpus illuminans *de*.

---

1. duo] olua M. et . . . media] *om.* K. corpus] eam post B. 2. processerit] processerint B. perueniet] perueniat BM. unam] una VR. 3. diuidet] diuiditur K. ipsam] ipsa ipsa K. quidem] cum C. etiam] *om.* M. 4. modo] et modo B. 6. super . . . lumen] quod cadit super lumen K. cadit] cadat VR. 8. *de*] *a, b, d, e* M. cuius] cum K. 9. quoque] coque O *om.* M. continetur] contineatur AVR. 10. *zh*] et *h* M. est] *e, f* M. 11. oppositam] oppositum M. 12. *ak, bl*] *ad, bi* C. 13 *akbl*] *ad, bl* C. 14. et centrum] et et centrum O *om.* K. 15. diuidet] diuidit AVR. duo] *om.* B. 15—16. in duo media et duo media] in media K. 16. quia] quae M. ipsorum] eorum B. centrum] centra CS. 17. *mgu*] *ngu* M. 18. oppositam] opposita A. 19. *an*] *anb* B. diuidit] diuidet BM. 20. linea] lineam KM. *tgq*] *tg* quae M. in duo media] *om.* B. 21. *zh*] et *h* M. eo quod] eoque VR. per] *om.* K. 22. transeat] *om.* B. illud] hoc C. est] *om.* AB. demonstrare uoluimus] monstrare uolumus C d. v. A dicere v. VR. 23. quorum loca candelarum] *om.* B. 24. in aere] manere AVR. proportionem] proportione K. 25. extremitatum] extreminarum M. 26. continuatur] contineatur M. 27. nullo] non B. 28. protenderentur] APOK protendentur B protenduntur M protenderent CVR. 30. Verbi] Exempli C. *ab*] ⟨*lacuna*⟩ *b* VR. sitque] sintque VR. 31. umbrae] umbra C. sit] sitque B.

Reperimus igitur proportionem *bg* ad *ba* sicut proportio *eg* ad *de*. Radius quoque a nota *d* protensus ad notam *a* cadit in loco *g*. Et quia *ab* et *de* sunt perpendiculares, ergo sunt aequidistantes [*Eucl. I 27*]. Linea igitur *dag* est recta. Si enim recta non fuerit, tunc coniunctio duarum linearum *da*, *ag* supra *a* fit secundum angulum. Sit ergo recta linea *dug*. Triangulus igitur *duge* est diuisus linea aequidistante *de*, quae est linea *ub*. Ergo triangulus *bug* est similis triangulo *dge* [*Eucl. VI 2*].

Fig. 5.

Proportio igitur *ub* ad *bg* aequalis est proportioni *de* ad *eg* [*Eucl. VI 2*]. Iam uero fuit demonstratum, quod proportio *ab* ad *bg* est sicut proportio *de* ad *eg*. Sed uni rei aequalia sunt aequalia [*Eucl. κοιν. ἐνν. I 1*]. Ergo proportio *ub* ad *bg* est sicut proportio *ab* ad *bg*. Proportio igitur *ub* maioris et *ab* minoris ad *bg* est una. Ergo *ub* maior est aequalis *ab* minori. Quod quidem contrarium est et impossibile.

Impossibile est igitur, ut *dag* sit non recta. Et illud est, quod demonstrare uoluimus.

6.

Hoc quoque manifestius et clarius uidebimus, si tabulam assumpserimus in medio cum serra directe et aequaliter perforatam, et occurrerimus deinde cum medio foraminis serrati medio candelae, donec sit linea, quae protrahitur a candela, secans diametrum candelae et foramen serratum orthogonaliter, et post occurramus tabulae, in qua est foramen, cum alia tabula, cuius superficies, quae ei occurrit, aequidistet superficiei eius, quae ipsi occurrit.

Si ergo ab extremitate luminis, quod cadit per foramen tabulae super tabulam aliam ei aequidistantem, in latitudine protrahatur ab una duarum partium ad finem candelae in latitudine in parte altera linea recta, contingет extremitatem foraminis, quod est in tabula. Quod quidem non esset, nisi radiorum fines secundum rectas procederent lineas.

1. sicut] sicut est K. 2—3. Et . . . *de* sunt] *in ras.* B. 4. *dag*] *dg* K. 6. supra] super B. 7. *dug* . . . igitur] *om.* K. 8. *duge*] *dmg* B *dneg* AVR. 9. *bug*] *om.* C. 10. *dge*] *de* B *gde* VR. 11. Proportio . . . *bg*] *om.* B. est] *om.* C. 12. ad] *om.* M. 13. *bg*] *gb*, *corr. ex*, *gd* K. est sicut] sic est M. 14. *de*] *dge* M. *eg*] *cg* M. 15. *ub*] *gnb* B. *bg*] *gb* VR. est . . . *bg*] *om.* B. 16. maior] *om.* M. aequalis] *om.* B. 17. quidem] *om.* K. et] *marg. adiect.* M. 18—19. Et . . . uoluimus] *om.* O. quod . . . uoluimus] *om.* A quod monstrare uolumus C. 18. illud] ideo (*i. e. iō pro id̄*) M. 20. uidebimus] uidemus C. 21. in medio] *om.* B. serra] secra K. 22. occurrerimus] occurremus B. deinde] *om.* K. serrati] secrati K serra B (?). 23. medio] in medio VR. donec] *om.* K. 24. serratum] sarratum C secratum K. orthogonaliter] organaliter C. 25. post] *om.* B. 26. quae] qui B. 27. quae] quo AV. ipsi] PKB ei AV sibi O ubi C. occurrit] occurrat K. 29. ei] *om.* AV. 30. protrahatur . . . latitudine] *om.* K. protrahatur] *om.* B. 31. continget] contingeret K. 32. quidem] *om.* B. 33 procedent] procederent C.

Verbi gratia sit candela circulus *abg*, et sit tabula perforata tabula *de*, sitque foramen spatium *uz*. Tabula quoque, super quam cadit lumen, sit *ht*, et pars eius, super quam cadit lumen, sit spatium *kl*.

Cum ergo protrahetur linea a nota *k* ad notam *u*, et producetur recte, perueniet ad notam candelae, quae est *b*, quae est e contrario partis *u*. Et cum produxerimus a nota *l* lineam ad *z*, et protendetur recte, perueniet ad notam candelae *g*, quae est e contrario partis *z*.

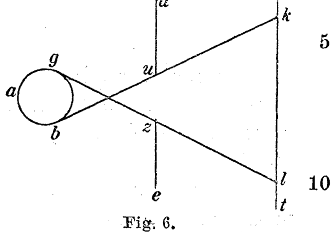


Fig. 6.

7.

Postquam igitur iam sensibiliter est declaratum, quod omnes radii secundum rectas egrediuntur lineas, oportet, ut qualiter oculus sua recipiat sensibilia, enucleemus.

Dico igitur impossibile esse, quin oculus sua recipiat sensibilia peruenientibus et currentibus suorum sensibilium formis ad eum, quemadmodum plures antiquorum extimauerunt, et sigillentur in eo, aut ab eo procedat uirtus ad sua sensibilia, cum qua ea recipiat, aut haec duo sint simul, aut eorum formae sint sigillatae in aere et impressae, et aer sigillet eas et imprimat in oculo, quas oculus comprehendit uirtute sua receptibili eius, quod aer in eo impressit lumine mediante.

Si ergo sensibilium formae procederent, donec ad oculum peruenirent, et sigillarentur in eo, aut duae causae essent simul, quaeque uidelicet earum ad suam comparem curreret, aut sensibilia suas formas imprimerent in aere et sigillarent, oporteret, ut circuli, qui cum aspiciente in una consistunt superficie, procederent et currerent ad aspicientem, et uiderentur quemadmodum sunt secundum suum esse.

Sed non apparet ita. Immo cum circuli et aspiciens in una consistunt superficie, circuli nullo modo uidentur. Non ergo restat, nisi ut ab aspiciente ad res, quae aspiciuntur, procedat uirtus, qua eas recipiat.

---

2. cadit] cadat B. 3. *ht*] *th* B. super] supra B. 5. protrahetur] protrahatur B. 6. recte] et K. 7. est *b*, quae est e] est *b* e B *b* quae e K est V est *b* quae est R. contrario] contraria VR contrario nota O. 8. nota] notam O. lineam] linea C. *z*] *s* C (?). 9. perueniet] peruenient K peruenit C. 10. *z*] *om.* B *z*. Et hoc est . . . ⟨*lacuna*⟩ VR Visio quomodo fiat *marg. adiec. man. rec.* A. 11. sensibiliter] sensibile K. 12. ut] hoc ut ARV. 13. qualiter] aequaliter RV. oculus] oculos P. recipiat] recipiet B. enucleemus] enucliemus B enodemus et enucleemus RV. 14. recipiat] recipiet B. 15. currentibus] concurrentibus RV. 16. extimauerunt] estimauerunt K. sigillentur] sigillaretur C. procedat] procedant C procedit B. 17. recipiat] recipiet B. sint] sunt BC *om.* O. 18. sint] sunt B. 19. quas] formas, quas K. receptibili] perceptibili RV. 21. ergo] uero K. procederent] procedñt C. donec] unde RV. 22. uidelicet] ⟨*lacuna*⟩ RV. 23. ad suam] ⟨*lacuna*⟩ RV. curreret] currerent CRV. imprimerent] imprimet B. 24. aere] aerem B. oporteret] omnino B. 25. procederent] procedent C et procederent K. 27. Immo] in uno K. 28. uidentur] uidetur C unum B. Non] Nunc K. 29. res] nl C. qua] quae BC. recipiat] recipiet B.

Virtus enim illa cum procedit et in aere impressionem facit secundum rectas lineas, si aspiciens et circuli in una consistunt superficie, non ingreditur circulos. Circuli igitur non sentiuntur.

8.

Plures uero homines, quia uidebant radios corporum colores secum defferre et apud eorum fines deponere, sensum non recipere rerum figuras, nisi per cursum earum ad ipsum, extimauerunt.

Figurae enim apud eos non sunt nisi colorum fines. Quapropter putauerunt, figuras ad aspicientem currere. Non autem earum cursus ad locum, ad quem perueniunt, localis motus colorum in aere causa existit.

Si hoc enim ita esset, non remaneret uitrum aut lapis cum spissitudine claritatem habens rubeus aut alterius coloris, cum in locis poneretur, nisi paruo tempore, donec eius finiretur color.

Verum eius causa est, quoniam corpora luminosa, cum obuiant aeri, sua natura tribuunt ei cum conuersione colorem sibi similem. Similiter quoque corpora rubea et alia, cum illuminantur, sua natura dant aeri cum conuersione colorem suis coloribus similem.

Verificatur autem, quod diximus de hoc, quod uisus suum sensibile non comprehendit, nisi uirtute ab ipso procedente et conuertente aerem secundum rectas lineas, quando inter ipsum et suum sensibile lumen medium interuenerit conuersione firma, a uisus rectitudine non separata, ubicunque fuerit. Quia uisus sentit illud, tunc super quod illa pars aeris conuersa a uirtute uisus cadit, quoniam plures eorum, quorum uisus debilitatur, suam ymaginem coram se uident, scilicet personam suam.

Cuius quidem causa existit, quoniam, uirtus a uisu procedens cum propter debilitatem in aere penetrare non possit, redire eam facit aer ad corpus hominis aspicientis. Peruenit igitur ad suum singulare, et uisus

---

1. procedit] procedat B *om.* K. et in aere] *bis* B. 2—3. non ... Circuli] PBO „uel: non uidentur circuli" *marg. m. 1. adiec.* P uel non uidentur circuli non ingreditur circulos. Circuli ARV et non uidentur circuli non ingreditur circulus. Circuli C non ingreditur circulos uel non uidentur circuli K. ingreditur] ingrederentur B. 3. sentiuntur] sentiunt et non uident circuli C. 4. Plures] Quamplures ARV. colores] *om.* C. 5. defferre] differre A. fines] *om.* K. 6. earum] eorum K. extimauerunt] estimauerunt O. 8. enim] cum C. eos] res C. nisi] nias (?) B. fines] finis C. 9. currere] concurrere B. 9—10. Non ... existit] *om.* C. 9. earum] eorum K. 10. perueniunt] prouenit B existit] consistit O. 11. hoc enim] haec enim B autem hoc C. esset] essent B. remaneret] remanent K. 12. coloris] colorum *in ras.* B. 13. tempore] spatio et tempore C. 15. natura] linea K. conuersione] C *marg. m. 1.* sibi similem] V *marg. m. 2.* 16. natura] linea K *om.* B. 17. suis coloribus] sibi C. similem] similibus B. 18. Verificatur] Inde uerificatur B. diximus] dixit B. 19. comprehendit] apprehendit K. 20 rectas] notas C. sensibile] sensibile item separata ubicunque fuerit B. 21. a] Et C. rectitudine] rectitudo C. 21—22. non ... fuerit] non remouebitur a loco, ad quod locum peruenit B non remouebitur a loco ad quod peruenit C. 22. ubicunque] utrique K. tunc super quod] quod super tunc B. 23. uisus] uisum A. quoniam plures] quamplures RV. debilitatur] debilitantur ARV. 24. uident] uidet (?) P uidit C. scilicet personam suam] scilicet per ⟨*lacuna*⟩ suam O ⟨*lacuna*⟩ RV. 25. quidem] hac B. 27. Peruenit] Prouenit B.

eius comprehendit singulare sui ipsius, quemadmodum singularia comprehendit, ad quae dirigitur cum impressione uirtutis, quae ab ipsius uisu procedit.

9.

Ex eis etiam, quae id, quod diximus, uerificant, est, quod aspiciens res uisui suo expositas, sicut librum fortasse inquirit, eius litteram, quam non comprehendit nisi post tempus.

Cuius causa existit, quod rectitudo uirtutis uisus imprimentis non cadit super id, quod quaerit. Quia postquam super ipsum ceciderit, statim ipsum comprehendit. Quod si receptionis sensibilium causa non foret nisi cursus formarum rerum ad uisum, contingeret, quod res, quae uisui appropinquant per mensuram unius palmi aut cubiti, obstaculo corporum inter ipsas et eum non interueniente, manifestius currerent ad eum, quam ea, inter quae et ipsum existit spatium, quod est inter nos et orbem stellarum fixarum.

Quod si receptio fieret omnibus modis absque inquisitione, contingeret, quod omnes res, quae uisui exponuntur, non interueniente inter ipsum et eas corporum obstaculo, aere et lumine inter ea mediantibus sentirentur illico. Unaquaeque enim earum per se ipsam ad eum curreret.

Nos autem hoc non taliter reperimus. Non enim comprehendimus res nisi unam post unam, sensuique manifestius existit quod sub eius rectitudine directe cadit. Quod autem ab eo elongatur, secundum sensum debilitatur, et quanto magis elongatur a centro rectitudinis eius, occultatur, donec non comprehendatur.

Huius autem demonstrator [lege: demonstratio] est, quod cum tenderimus ad litteram libri et non remouerimus oculos nostros ab ea, apparebit nobis, et uidebimus illud, quod eam sequitur, ab ea occultari. Et quanto plus elongabitur ab ea, uehementius occultabitur, donec ex omnibus litteris non appareat nisi nigredo in albedine. Sed ut nos cum eo libri lectionem consequi possimus, impossibile est et non repertum.

Et hoc est, quod uirtus a uisu procedens, quanto magis a centro rei, quae aspicitur, elongatur, eius impressio in aere magis occultatur, donec

2. ad quae] ad quem C. 2—3. cum . . . procedit] *om.* C. 4. uerificant] uerificatum B *ante hoc uerbum lacuna dimidii lineae* A. 5. aspiciens] afficiens B. expositas] compositas K. librum] liber B. fortasse] fortassis B. 6. litteram] littera B. quam] quem C. tempus] *om.* B. 7 existit] *om.* K. 8. id] illud B *om.* K. super] *om.* B. 9. comprehendit] apprehendit B. receptionis] ret ⟨*lacuna*⟩ sionis V. foret] esset O. 10—11. ad . . . mensuram] *om.* K. 10. contingeret] contingerent C. appropinquant] appropinquent C. 11. aut cubiti] circulari C. 12. currerent] POC current K curreret B concurreret AV. ad eum] *ante ad eum* ipsum *del.* K. quam] quem C. ea] ei B. 13. est] et B. 15—19. Quod . . . reperimus] *om.* C. 15. contingeret] contingēt K. 17. sentirentur] sentiretur B sentiret K. 18. enim] *om.* B. curreret] occurreret B. 19. Non] Nos K. 20. unam] una B. 21. elongatur] elongantur K. 22. elongatur] *om.* C. eius] eis O. 23. comprehendatur] comprehenditur B. 24. demonstrator [lege: demonstratio]] demonstratio B. 25. ea] eas K. 26. occultari] occultator A. 27. occultabitur] occultatur B. non] nihil B. appareat] apparet O. 28—29. Sed . . . repertum] Quia tamen nos cum huius liber cum lectione possimus consequi, prohibendum est et non repertum B *om.* C. 28. libri] liberi A. 31. eius impressio] erit impressius C. magis] tanto plus C. occultatur] sentitur C.

in latitudine finiatur. A uidente autem quanto magis ipsa elongatur, tanto plus dilatatur secundum aequales lineas a meguar [i. e. axe]*) egrediente a uidente ad rem, quae aspicitur. Et fit aer, super cuius conuersionem potuit et in quo fit impressio, figurae pinealis, cuius extremitas acuta existit apud aspicientem et uirtutis processionem, inferior uero, quae lata est, apud rem, quae cernitur, consistit.

10.

Eorum uero, quae etiam significant simile ei, quod diximus, uidelicet quod comprehensio sensibilium a uisu fit uirtute ab ipso procedente, est, quoniam deus, cuius magna est fama, omnia condidit, quae facta sunt, secundum quod perfectius et conuenientius fuit.

Praeparauit ergo instrumenta sensuum secundum quantitatem suorum sensibilium. Fecit ergo odoratum, ut ad ipsum fieret cursus in fine de subtili partis, quae ipsam defert. Et fecit auditus supremum concauum et infimum strictum, quoniam uox non est nisi aeris percussio, et aer currens impellit instrumentum auditus. Gustum quoque similiter condidit. Visus uero instrumentum fecit sphaericum, ne ad ipsum currentia supra ipsum morarentur. Omnium autem sensuum centra morantia fecit, ut ad ea currentia apud ea starent. Visus uero instrumentum mobile constituit, ut quod uellet reciperet obuiando illi et inclinando se ad ipsum suo motu. Quare cum rem aliquam uisu nostro recipere uolumus, oculos nostros ad ipsam reuoluimus. Quod si non, minime eam comprehendimus. Ad auditum uero nostrum et olfatum odores et uoces perueniunt, siue ab eis recedamus siue ad ea accedamus.

11.

a) Antiquorum autem quidam estimauerunt, quod radii plures egrediuntur ab aspiciente secundum rectas lineas, inter quas existunt interualla.

---

1. latitudine] altitudine K. finiatur] sumatur C. A uidente] A uisu uidente B. ipsa] ipsi B *om.* O. 2. tanto plus] *om.* C. dilatatur] dilatetur B. aequales] rectas aequales B. meguar] megare C „id est axe“ *marg. m. 1.* P *suprascr.* AO. 3. aspicitur] *post aspicitur* elongatur *del.* K. super cuius] qui prius super C. 4. potuit] posuit B *om.* C. 5. existit] extitit C. inferior] inferiori K. 6. lata] locata B. 7. etiam] *om.* K. 10. condidit] et diuidit C condidit opera K. 11. conuenientius] conuentarius K. 12—13. Praeparauit . . . sensibilium] *om.* C. 12. quantitatem] *om.* K. 13. sensibilium] sensuum K. odoratum] odorarum K odoratus instrumentum B. 14. defert] deffert O differt K deffert id est in qua est C id est in qua est P *marg.* Et fecit auditus] Auditum fecit et auditum B Et fecit auditum C. 15. infimum] infinitum A. 16. impellit] currit et impellit contra B. condidit] addit B *marg. adiec.* 17. uero] *om.* K. ne] nec C. supra] super BK. 18. Omnium] Omnia K. autem] autem et B. centra] cõtrā B essentia C.r ea] eum B. 19. uero] ergo K. 20. obuiando] obuiandus C. suo motu] mō suo mō B. 21. uisu] uisui K. 22. eam] ea O. comprehendimus] apprehendimus K. 23. et] *om.* K. olfatum] olfactum O. 25. autem] *om.* O. estimauerunt] extimauerunt AC. 26. egrediuntur] egredientur B.

---

*) mihwar مَحْوَر, cfr. Nallino, Albattani opus astronomicum I, 319.

Quem quidem sermonem inconueniens sequitur, quod est, quia lineae diffinitio apud eum, qui hunc protulit sermonem, et apud alios, qui in doctrinalibus sunt subtiles, est magnitudo habens dimensionem unam, longitudinem uidelicet sine latitudine [*Eucl. I, def. 2*].

Radius uero est impressio corporum luminosorum in corporibus obscuris, a lumine nominis denominata propter conuersionem accidentium delatorum in corporibus illam impressionem recipientibus.

Impressio igitur cum eo, in quo est impressio, simul est radius. Imprimens autem corpus est corpus tres habens dimensiones, longitudinem et latitudinem et profunditatem. Radius igitur non est secundum rectas lineas, inter quas existant interualla. Si enim secundum lineas existeret, inter quas essent interualla, omnis radius careret latitudine, quoniam linea caret latitudine. Quod uero caret latitudine, non sentitur; et omne, quod sentitur, simul cum latitudine suae extensionis uidetur; omne enim, quod sentitur, habet latitudinem, aut in eo, quod habet latitudinem, defertur. Linea uero latitudinem non habet. Non ergo uidetur linea, neque quod linea defertur, si defertur ea aliquid.

Radius igitur non uidetur, et radius uidetur. Hoc quidem contrarium est et impossibile et inconueniens et monstruosum.

---

b) Cumque etiam linea apud eum, qui hunc protulit sermonem, sit, sicut praemisimus, scilicet magnitudo unam habens dimensionem, uidelicet longitudinem sine latitudine, cuius extremitates sunt duo puncta, in quibus finitur, quorum nullum partem habet, et iam praemiserit in tractatu suo de aspectibus, quod uisu comprehensum non sit nisi illud, super quod cadit radius a uisu procedens, tunc, si quod procedit a uisu est lineae infinitae, quemadmodum dixit, inter quas existunt interualla infinita, et illae lineae comprehendunt singularia casu earum super indiuidia, sicut putant plures eorum, qui hunc sermonem ab eo receperunt, ergo finis cuiusque harum linearum est punctum comprehendens punctum.

Punctum autem non sentitur, quoniam longitudinem non habet neque latitudinem neque profunditatem. Quod autem longitudine et latitudine et

---

1. quidem] quidam K. 2. in] enim in K. 5. corporibus] corporis B. 6. denominata] denotata BO. 7. illam] illa A. recipientibus] recipientes B. 8. igitur] *om.* K. cum eo] *om.* B. 9. corpus est] est corpus. Et C. tres] est B *ante tres* et *del.* K. habens] habet C. 10. profunditatem] profundum K. igitur] autem B. 11. existant] existunt O existit B. interualla] interuallo B. existeret] existeteret B. 12. essent] existant K existunt O. caret] non caret K. 15. aut] autem B et C. defertur] differtur B. 16. neque] itaque C. defertur] PKO differtur ABC. 17. defertur] PKO differtur AB defferunt C. aliquid] ad B. 18. igitur] uero B. quidem] *om.* B. 19. inconueniens] non conueniens A. 20. apud] habet B. qui] quod C. 21. unam habens] habens unicam B. uidelicet] scilicet B. 22. sine] siue C. extremitates] extremitas B. sunt] sint B. duo puncta] diu parte C. 23. nullum] nullam C na^am B. partem habet] K *bis.* praemiserit] praemisit B. suo] *om.* O. 24. uisu] uisum A. 25. si] ei B. lineae] linea C. infinitae] infinire P. 27. super] siue B. 28. eorum . . . receperunt] *om.* C. cuiusque] uniuscuiusque K cuiusque finis C. 29. linearum] *om.* B. 30. Punctum] *om.* B. 31. latitudinem] latum K. profunditatem] profundum K. longitudine] longitudinem K. latitudine] latum K.

profunditate caret, non sentitur uisu. Hae ergo lineae sentiunt, sed quod non sentitur. Et hoc etiam est magis horrendum inconueniens.

Quod si etiam lineae illae suis extremitatibus, quae sunt puncta, comprehendunt puncta, eo quod non comprehendatur, nisi super quod cadunt, habent ergo longitudinem et latitudinem.

Is autem, qui praedictus est, et omnes doctrinales dicunt, quod puncta absque longitudine et latitudine existunt. Quod quidem maius est inconueniens.

---

c) Si autem etiam partes instrumenti uisus sunt continuae, scilicet ex una substantia, tunc uirtus uisibilis est in toto instrumento. Quae ergo est causa, quae fecit pinealem lineas, cum instrumentum eam imprimens sit unum continuum, in quo non sunt interualla, et uirtus non sit in quadam absque alia?

Si ergo pars instrumenti imprimit in aere radium, et pars non imprimit, tunc uirtus duarum partium est diuersa. Virtus enim unius unum perficit opus. Quod si uirtus instrumenti est una et totum eius ex una existit substantia, ergo unam perficit impressionem in eo, in quo impressionem facit, et non duas impressiones, quarum una sit linea radii et altera non sit radii.

---

d) Quod si dixerit, quod causa existit in aere, ergo aer erit lineae in duabus diuersis substantiis, quarum quaedam recipiunt lumen, et quaedam non recipiunt, hoc autem scilicet, ut putetur, quod aer inundans sit lineae diuersae stantes, non motae et non inundantes, et quod extremitas cuiusque illarum linearum sit fixa supra punctum, et punctum illud inquirat centrum instrumenti uisus cuiusque aspicientis, donec ipsum contingat, quemadmodum ferrum inquirit lapidem magnetem. Est ualde turpe, et de quo omnis, qui audierit, rideat.

---

e) Quod si intentio sermonis eius est, quod radii egrediuntur ab aspiciente secundum rectas lineas, scilicet secundum rectitudinem linearum rectarum, et quod radii habent latitudinem, tunc si sermo hic est uerax,

---

1. profunditate] ɹofupndum K. sentitur] sensitur B Hae ergo] Ergo hae AO. sentiunt] non (*man. 2. adiect.*) sentiuntur A. sed] secundum BO. 2. non] enim B. etiam est] PK est etiam A est quod B est CO horrendum] *om.* C. 3—8. Quod . . . inconueniens] *om* C. 4. comprehendatur] comprehendant B. 6. Is] His P Non B. praedictus] praedictos P. 7. quidem maius] quidem magis O magis B. 9. etiam] *om.* BO uisus] scilicet uisus C. scilicet] sed K. 10. uirtus] *ante del.* uisus *hoc uerbum* K. Quae] Qua P (?) B. 11. lineas] lineam AK. imprimens] in primes C. 12. unum] *om.* K. quadam] quodam K. 13. alia?] P alia ABK aª O alia˜C 17 existit] consistit O. 18. facit] fecit A. duas] in duas B. 20. causa] *om.* K ergo] igitur C. 21. duabus] duobus A. *bis* quaedam] quidem B 22. scilicet] sint quod B. 23. inundantes] in mundantes A. 25 instrumenti] *om.* K instrumenti et B. donec] doc˜ C. contingat] contingit B. 26. lapidem] *om.* O. magnetem] magnetam B. quo] qua C. omnis qui] omnes B. 27. audierit] audieatur B. rideat] ridet K regia (?) B. 28. intentio] intentu C etiam intentio B. est] esset B. ab aspiciente] *om.* B. 30. rectarum] uel rectarum duarum A. radii] radii quod K. hic est] esset B.

sermo quo dicitur, quod inter radios sunt interualla, non uerax inuenitur propter inconueniens, quod ipsum sequitur.

Hoc est si radii plures, inter quos sunt interualla, egrediuntur ab aspiciente, aspiciens in libro uidet plures litteras, inter quas sunt interualla in pluribus locis, neque uidet illud, quod est in interuallis, quae sunt inter eas, eo quod radius supra ea non cadat.

Nos uero hoc taliter non uidemus. Sed intuemur ipsum, quemadmodum praemisimus prius, ubi locuti fuimus de aspiciente litteras libri. Nos enim non uidemus nisi locum unum nobis manifestum, qui est rectitudo centri uisus nostri. Et quanto magis elongatur ab eo, magis occultatur secundum aequalitatem in spatio, donec non uideatur nisi nigredo in albedine. Hic ergo sermo ualde deridendus est.

---

f) Oportet autem, ne de sermone huius mala extimemus, neque ipsum ad errorem compareremus, cum ordinis eius bonitatem in hac arte sciamus, et quod ipse est de causis nostris, quae bonas res nos scire fecerunt, sed cogitemus de ipso bona, et conuertamus eius sermonem ad semitam bonam, cum ad hoc nobis pateat item.

Dico igitur, quod stare potest, ut sit intentio dicentis hunc sermonem, quod ab oculo egreditur radius secundum lineas rectas infinitas, inter quas existunt interualla, scilicet figurae pinealis in aere a uirtute uisibili impressae fines secundum rectitudinem linearum rectarum tendunt, inter quas sunt interualla.

Si enim a puncto sinapis lineae rectae protraherentur, egrederentur ab eo lineae in multitudine infinitae. Et quia infinitae progrediuntur, ergo inter eas sunt spatia. Nisi enim inter eas essent spatia, ipsae finitae essent. Secundum hanc igitur semitam uerum est, et melius etiam nobis est, ut uerum extimemus.

---

g) Quidam uero eorum, qui hunc sermonem a dicente ipsum receperunt, postquam ex eis, quae dixit, ad inconueniens perductus est, putauit, se eum tueri ab hoc inconuenienti dicens, nullus radiorum, inter quos sunt interualla, comprehendit uisibilia, nisi radius unus.

---

1. sermo] esset sermo B. dicitur] dicit C. 1—3. non . . . interualla] *om.* C. 3—4. sunt . . . sunt] *om.* K. 5. uidet] mo[a] C. in] *om.* KCO. sunt] *om.* K. 6. radius] vidimus K. ea] eam B. cadat] cadit AB. 7—8. Sed . . . fuimus] *bis* K. 8. ubi] verum B. fuimus] sumus CO fuerimus K. enim] vero K *om.* B. 10. nostri] ten[a] C. 11. non . . . nisi] simul B. 12. Hic . . . est] Et talis sermo est diuidendum (!) C. 13—17. Oportet . . . item] *om.* C. 13. ne] ut B. extimemus] existimemus et B estimemus O. 14. compareremus] compararemus O comparemus A praeparemus K. cum] Cum ergo K. eius] nostri K. 15. quae] AOK ex quae P et ex causis quae B. nos] *om.* P. 16. bona] et bona B. conuertamus] conuertemus K. 18. Dico igitur] Tunc dico ergo K Tunc dico igitur B. 19. quod] qui C. egreditur] egredit (!) C. lineas] lineas notas C. 20. pinealis] pinee uel B. 21. quas] *om.* C. 23. enim] uero K. sinapis] super B. lineae] linea B. protraherentur] protrahentur KC protrahetur (?) B. egrederentur] egredirentur K egredientur B. 25. eas] ea AB. spatia] spatio C. 26. igitur] *om.* B. etiam] et C est B 27. est, ut] ut B. extimemus] estimemus O. 28. Quidam] Quidem B Quia K. 28—30. eorum . . . dicens] dixit C. 28. hunc] habent B. a dicente] addicente B a distente O. ipsum] ipsos B. receperunt] reciperunt B. 29. quae] qui B. perductus] productus BK. 30. dicens] diuidens B. 31. comprehendit] et comprehendit C. nisi] ut K.

Qui quidem ignorauit, quod uolens eum ab inconuenienti eripere perduxit eum ad turpius inconueniens aut ei simile. Quod est, quoniam ipse et qui ab eo receperunt, quod inter radios praedictos a uisu egrediente existunt interualla, concedunt, quod radii uisus, qui praedicti sunt, non sentiuntur. Eius uero, quod non sentiuntur [sic!], essentia non scitur nisi ex operibus eius, scilicet ex impressione eius in eo, in quo imprimendi habet uim.

Et postquam radiis non inest uis operandi, et ipsi non sentiuntur, quid est ergo, quo fit necessarium, ut figura pinealis ab oculo egreditur, cum non sentiat nisi una radii linea, quemadmodum dixit? Aut si non est, quo fiat necessarium, quid est conuenientius, ut sit necessarium?

Hoc est, ut aut radius oculi sit una linea ab oculo egrediens, postquam apud eos non reperitur radius nisi in una linea, aut si necesse fuit, ut sit pinealis, quia sine dubio sensus comprehendit radium pinealis ipsius aut impressionem operationis eius, et non comprehendit figuram columneam aut cubicam aut sphaericam aut alterius figurae.

Ergo inconueniens eius, qui dixit illud, qui non sentit, aut sua operatio non attestatur ei, aut sua impressio aut eius significatio. Est ergo inconueniens tenentium, quod non sentitur, aut suae operationi attestatur et suae impressioni significatur maius inconueniente, a quo eum eripuerunt aut ei simile. Ipsi quoque fecerunt artem demonstratiuam probabilem, sicut est ars rethorica et metrica.

---

h) Ipsi etiam extimauerunt et in suis scriptis relinquerunt, quod radius unus, quem dicunt comprehendere uisibilia, est meguar [i. e. axis]*) pinealis a uisu egredientis, scilicet linea, quae est perpendicularis super centrum circuli, qui est basis pinealis.

Et cum hoc in suis locis dixerunt, quod illud, quod est in centro circuli, qui est basis pinealis, uidetur manifestius, et quod huic centro existit

1—2. quidem . . . est] ad hoc inconueniens deductus est C. 1. quidem] etiam B. 3. et] est B. egrediente] egredientes K egredi C. 5—8. quod . . . radiis] *om.* B. 5. quod] quae C. sentiuntur] sentitur K. 6 impressione] pressione C. 7. uim] *Post uim* Et figura pinealis *del.* C. 9. quo] quod C. fit] PA sit BKCO. egreditur] PBO egrediatur CAK. 10. nisi] *bis* O. est, quo] *om.* B est quod C. 11. quid] quod B quidem C. est] est et C. ut sit] quod B ut C. necessarium] necessarium faciat B. 12. ut aut] quod B ut C. oculi] circuli C. 13. radius] operatio BC. nisi] *om* B. in una linea] unius lineae C. aut si] Quod si C Quod aut si sic B aut sit O. fuit] *om.* KO. sit] erat sic B esset C. 14. quia] quod BO. sine dubio] *om.* C. comprehendit radium] comprehendentis inest radio C. aut] autem C. 15. impressionem] impressioni OC. operationis] oppositio (?) B. comprehendit figuram columneam] fuit necesse ut essent figura figuram columpnea B fuit necesse ut esset columnea C comprehendunt figuram colicām (!) K. aut] vel K. 16. cubicam] cubica BC. sphaericam] sphaerica BC. 17—18. Ergo . . . est] *marg. m. 1.* P *om.* C. 17. dixit] dicit K. qui non] quod B. sentit] sentitur B. operatio non] operationi B. 18. eius] sua B. Est] *om.* O. ergo] Tunc C. 19. tenentium] deneutrum (!) K. 20. maius inconueniente] eius conueniente K. eripuerunt] eripuentur B. 22. rethorica] rethoria O. 23. etiam] enim B. et] *om.* K. 24. meguar] megar C. 25. quae est] *om.* B. 26. circuli] oculi C. pinealis] pinealis videtur manifestius C. 27—28. circuli . . . centro] *om.* K. 28. qui] quem B.

*) mihwar مِحْوَر, cfr. Nallino, Albattani opus astronomicum I, 319.

uicinius, uidetur manifestius eo, quod ab eo magis elongatur, ac si ipsi obliti fuissent unius eorum, quae dixerunt post aliud, et quorum in suis scriptis declarationem apposuerunt.

Si enim radius est linea una, quae est perpendicularis cadens supra centrum circuli continentis basim pinealis, tunc nihil uidetur nisi circuli centrum. Ipsi namque praemiserunt, quod illud, super quod cadit radius uisu comprehenditur, et super quod non cadit, minime comprehenditur. Quod si loca praeter centrum circuli comprehenduntur, ergo radius comprehendens uisibilia non est linea una.

Ex dictis igitur eorum colligitur, ut comprehendens uisibilia non sit nisi linea una, et comprehendens uisibilia sit lineae plures. Et etiam non sit comprehensum uisu nisi punctum unum aut locus unus, et uisu comprehensa sint puncta plura aut loca plura. Et hoc quidem magis contrarium est.

12.

Hii autem extimauerunt, se iam perduxisse quaestionem ad finem, scilicet quare uisus comprehendit, quod est in centro circuli basim pinealis continentis radii egredientis a uisu manifestius eo, quod est praeter centrum, et quod dederunt super hoc demonstrationem, eo quod demonstrationis scientia et ex quo perueniat demonstratio eis defuit.

Dixerunt enim, quod radius supra centrum circuli pinealis basim con-inentis erectus perpendicularis super centrum existit. Et omnis linea radii irecti ad locum, qui est praeter centrum, est diametrus angulo recto ıbtensa, qui a linea radii super centrum erecti et linea coniungente inter ɔntrum et notam aliam, ad quam alius dirigitur radius, continetur. iametrus autem est latere maior. Radius igitur ad quamlibet notam raeter centrum directus est maior radio ad centrum producto. Interuallum igitur notae, quae est praeter centrum, magis elongatur a uisu, et quanto plus elongatur a uisu, cadit super eam radius debilior, et uidetur magis occulta.

Ac si haec propositio foret absque medio, scilicet quod cum radius elongatur, debilius comprehendit, et cum appropinquat, manifestius comprehendit, aut, illud quod prius declarauerunt, esset propositio absque medio.

1. ac] hac O. si ipsi] superi K. 2. quae] qui B. post] praeter C. 4. una] recta B. 5. continentis] et continenti C. pinealis] pinealem B. nisi] praeter circulus nisi (!) C. 6. illud] illi K. 7. uisu] *om.* B. et ... comprehenditur] *om.* O. 9. una] una. Et hoc est quod demonstrare uolumus K. 10. eorum] istorum C. 11. sit] sint BC. non] quod non K. 12. comprehensum] comprehensu O compressum K. et] aut B. 13. puncta] puncto C. aut] in B. Et ... est] Quod est inconueniens C. 14. extimauerunt] exstimauerunt BO. quaestionem] quandoque B. 15. scilicet quare uisus] propter hoc quod radius a uisu proten]dens BC. 16. pinealis] pinealem B. radii ... uisu] ex eo, quod recipit visus BC. 17. et] *om.* O. quod] *om.* C. 18. hoc] hanc K. 19. perueniat] proueniat AKO. defuit] desinit A deficit K. 20. enim] igitur C *om.* O. radius] radii K. supra] super K. circuli] *om.* PB. 21. super] supra B. 22. diametrus] dyameter B. 23. a] aliam A. super] supra B. 24. ad quam] cum qua C. radius] alius radius B. 25. Diametrus] Dyameter B. igitur] ergo K autem B. 27—28. et ... uisu] *om.* O. 28. eam] ea K. 30. Ac] Hac AO. propositio] proportio K. foret] fores C. 31. debilius] arbilius (!) C. 32. aut] autem B. propositio] proportio C. medio] id est per se nota *marg. m. 1.* P.

Haec autem propositio non est uera, immo eius falsitas patet. Manifestum namque est apud eos, qui secundum principia naturalium uiarum gradiuntur, quod comprehensum uisu absque latitudine est color, et figurae sunt fines colorum. Si ergo quod uisus comprehendit, uidelicet color, quanto magis elongatur ab eo, debilius a radio comprehenditur et apud eum magis occultatur, tunc coloratum cadens sub centro uisus, scilicet stans in centro circuli continentis basim pinealis radii, uidetur magis occultum eo, quod est extra centrum, cum spatium eius, quod est supra centrum a uisu, est pars partium interualli cadentis extra centrum uisus.

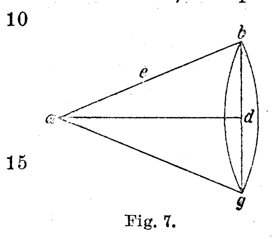


Fig. 7.

Cuius exemplum ponam. Dico ergo, si linea radii longior uidet rem magis occultam, sit tunc uisus apud *a* et basis pinealis radii sit apud duas notas *b* et *g*, sitque basis centrum *d*, et radius cadens supra *d* sit linea *ad*, et sit pinealis contenta a duabus lineis *ab*, *ag*. Separabo autem ex linea *ab* lineam *ae*, et ponam ipsam partem lineae *ad*.

Corpus igitur stans apud notam *e* uidetur manifestius corpore stante apud notam *d*. Ipsi autem iam praemiserunt, quod stans sub centro uisus manifestius uidetur eo, quod est praeter ipsum. Ergo est manifestius et est non manifestius. Quod quidem contrarium est et impossibile.

Nec etiam uidetur quod elongatur a centro uisus cubitu uno aequale in declaratione ei, quod in orbe stellarum fixarum stat sub centro, nedum e quod eo est propinquius.

Non est ergo causa manifestandi uisui, quod est sub centro uisus, mag quam manifestandi, quod non existit sub centro eius longitudo radii, neq quod eius demonstrationem extimant, est demonstratio, quemadmodu ostendimus. Huius autem causa est, quod nos demonstrabimus, si deus uoluer.

Dico igitur, quod nos uidemus in locis obscuris numquam colorem comprehendi nisi in eis adueniat lumen. Si ergo lumen fuerit forte, erit color manifestior, et si fuerit debile, erit color occultus. Similiter quoque uidemus, quod quicunque uisuum est fortior, uidet colorem manifestius, et quicunque est debilior, uidet colorem magis occultum. Visus autem apud nos nominatus fortior est, qui operationem perfectam efficit, debilis uero, cuius effectus non est perfectus.

---

1. immo] in mo B unum C. falsitas] flitas (!) K. 3. quod] et K. comprehensum] comprehensio B. uisu] usu K uisus B. 4. color] *corr. ex* colorem K. 5. quanto] quanta C. 6. eum] *om.* K. sub] super O. 7. basim] basi C bas *corr. ex* basi K. 8. extra] supra B. supra] super K. 9. partium] paririum (!) C. interualli] *om.* C. cadentis] centro (!) B. 10. si] *corr. ex* quod si K. si linea] silineam A. 11. sit] si C. 12. duas . . . *g*] dua *b* et *g* notas B. 13. supra] super B. 14. et] quia A. 15. lineam] linea A. et] *om.* B. 16. ipsam] autem ipsam B. 18. iam] nam B. 20. ipsum] uisum B. et est] et O. Quod quidem] Quidem O Quod quaedam B. 22. Nec] Hec A. cubitu] cubite C. 23. nedum] ne dum K notam B. ei] eo P. 24. eo] ei B. 25—26. manifestandi . . . quam] *om.* C. 26. eius] *om.* K. 27. quod] *om.* C. demonstrationem] demonstratione BC. extimant] exstimant B. 28. si deus uoluerit] deo auxiliante C. 29. igitur] *ante igitur* autem *del.* C. colorem] AK colore PBC colores O. 32. est] *bis* K. uidet] uidit B. 33. uidet] uidit C. Visus] Visum P. 34. nominatus] nominatur K. est] *om.* K. debilis] AKOC debilior PB. uero] *om.* K.

Si ergo per se notum est apud eos et apud nos et apud omnes doctrinales, quod effectus uisus est, ut conuertat id, quod obuiat parti uisibilis ex sphaera conuersionis nominatae, radius tunc qui uisuum super illam conuersionem est potentior, fortius comprehendit suum uisibile. Et debilior eo in conuersione illa debilius comprehendit suum sensibile. Potentior ergo uisus conuersionem efficit perfectam. Ipse igitur efficit radium perfectum scilicet fortem; debilis ergo huius efficit contrarium.

Corpus ergo, super quod cadit radius fortior, comprehenditur manifestius. Et illud, super quod debilior cadit, occultius comprehenditur.

Dico ergo, quod super centrum uisus cadit radius fortior. Quapropter quod in eo est manifestius uidetur. Deinde super id, quod est ei propinquius, cadit radius fortior eo, qui cadit super id, quod magis elongatur ab eo. Quare manifestius uidetur eo, quod ipso magis elongatur a centro.

13.

Hoc quoque ostendam, postquam demonstrauero, quod corpora luminosa sua uirtute conuertunt aerem ab eis contentum, uidelicet illuminant totum, quod est usque ubi illuminare habent.

Dico ergo, impossibile esse, quin corpus luminosum illuminet corpus, super quod cadit lumen, conuertendo quod ex aere ab eo continetur, donec perueniat ad corpus, super quod cadit lumen, et illuminet ipsum, aut sit [lege: sint], quemadmodum ipsi putauerunt, egredientes ab eo lineae radii, inter quas existunt interualla, donec perueniant ad corpus illuminandum et cadant super ipsum.

Quod si ab eo egrediuntur lineae, impossibile est, quin ipsae sint, quasi egrediantur a centro corporis luminosi, scilicet secent superficiem luminosi secundum angulos aequales, aut non sint ita, scilicet secent secundum angulos inaequales.

Si autem fuerint secantes secundum angulos inaequales, tunc lineae aut erunt aequidistantes aut non aequidistantes. Demonstrabo ergo, impossibile esse, ut sit lumen a corpore luminoso egrediens lineae quasi a centro egredientes.

Sitque huius exempli causa corpus luminosum circulus *ab*, cuius centrum est *g*, et corpus illuminatum sit circulus *de*. Et sint duae lineae egredientes, quae contingunt fines corporis illuminati, duae lineae *gdu*, *gez*.

---

2. effectus] affectus P. parti] parte B partem K. uisibilis] uisibili K. 4—5. uisibile . . . suum] *om.* C. 5. eo] est A. sensibile] visibile sensibile K. 7. scilicet] secundum C. 8. ergo] igitur B. radius] corpus B. comprehenditur] comprehendit C. 9. occultius] occultis C. 10. uisus] uisibilius B. 11. super] *om.* C. id] illud BO. 12. qui] quod P. id] illud BO. 13. eo, quod] ab eo, quod C eo *suprascr.* K. 14. ostendam] extendam K. 14—16. luminosa . . . illuminant] luminant C. 16. illuminant] illuminatum KB. ubi] ibi K. 17. habent] habet B. 18. luminosum] luminosum (*in delet.*) illuminosum K illuminosum B. 19. quod] qui C. eo] eo null'C. 20. et] *om.* K. illuminet] illuminat C. aut sit] aut sint C autem B. 21. putauerunt] putant C. egredientes] *bis* C. 22. perueniant] interueniant K. ad corpus] donec ad quod C. 24. egrediuntur] egrediunt K. 25. scilicet . . . luminosi] *bis* B. 26. sint] sit B. 28. autem fuerint] fuerit aut B. 29. aequidistantes] *om.* CO. 34. fines] superficies B. corporis] corpor^{s} m (= ?) C.

Pars igitur corporis *de*, supra quam cadit lumen, est pars *dhe*, et pars obscura est pars *dte*. Pars autem, super quam non cadit radius, non illuminatur. Ergo pars contenta ab his *udtez* est umbra; et obumbrat *de* et *uz* lineis aequidistantibus, ut sint duo trianguli *ugz* et *dge* similes.

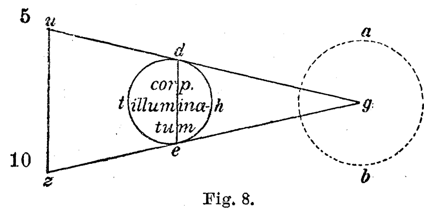


Fig. 8.

Ergo proportio *uz* ad *ug* est sicut proportio *de* ad *dg*. Sed *ug* est maior *dg*; ergo *uz* est maior *de*. Cuiusque igitur corporis umbra dilatatur et in latitudine augetur, quanto magis ab eo elongatur, siue corpus ipsum illuminans sit eo maius aut minus aut ei aequale et in infinitum protenditur.

Quod autem sentitur est huius contrarium.

Cum enim corpus luminosum est maius illuminato, constringitur umbra, donec fiat sicut pinea et finiatur. Ita namque sentimus. Et cum luminosum est minus illuminato, dilatatur umbra. Et cum est ei aequale, non dilatatur umbra, neque constringitur, sed est contenta lineis aequidistantibus.

Non est ergo possibile, ut sit lumen egrediens lineae secantes superficiem corporis luminosi secundum angulos aequales. Et hoc est, quod demonstrare uoluimus.

Post haec sint lineae aequidistantes, si est illud possibile.

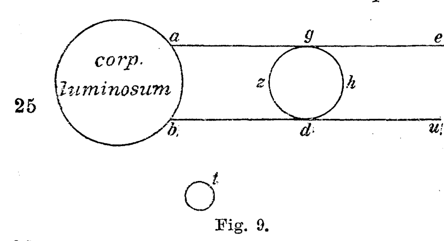


Fig. 9.

Ostendam tamen, illud esse impossibile. Sit itaque causa exempli corpus luminosum circulus *ab*, et corpus illuminatum circulus *gd*. Et sint duae lineae contingentes fines corporis *gd* lineae *age*, *bdu*, quae sunt aequidistantes. Pars quoque illuminata est, supra quam cadit lumen, quae est pars *gzd*. Pars autem, in qua est umbra, est pars *ghd*. Umbra igitur continetur a duabus lineis *eg*, *du* aequidistantibus.

Umbra igitur non augetur neque minuitur, sed protenditur semper in infinitum. Quod autem sentitur est huius contrarium, sicut praemisimus. Augmentatur enim cum luminoso minore, et minuitur cum maiore, et aequatur cum aequalitate corporum luminosorum.

---

1. quam] quem C. 2. pars *dte*] *dze* B. 3. est umbra] *om.* B. obumbrat] habumbrat (!) C. 4. *uz*] *om.* B. sint] sit C. *ugz*] ut *gz* C. 4—6. similes . . . ad *dg*] *om.* K. 5. Ergo] quoque B. 6. est] *z, e* C *om.* K. *dg*] *de* K. 8. et] *om.* A. 9. augetur] *ante augetur* est maior *del.* C. 11—14. aut . . . maius] *om.* K. 14. constringitur] contingitur C. 15. sicut] sic K. finiatur] finatur K fiantur B. Ita namque] ita. Namque K. 16. dilatatur] et dilatatur K *ante dilatatur* contingitur umbra donec fiat *del.* C. cum est] inest C. 17. constringitur] contingitur C. 18. superficiem] superficie C. 19—20. Et . . . uoluimus] quod est propositum O illud e. q. d. u. A. uoulimus] uolumus C. 21. si est] sicut C. 22. Ostendam] *corr. ex* ostemdam K. 23. itaque] ita K. 24. circulus] *bis* C. et] *om.* K. 26. contingentes] aequidistantes quae sunt contingens B. 27. *bdu*] *bd* C. quae sunt aequidistantes] *om.* B. 29. supra] super B. quam] quem C. cadit] cadat B. 31. pars] *om.* K. igitur] autem B. a] ab K. duabus] duobus B. *eg*, *du*] *ge*, *nd* B. 33. minuitur] minuetur K. 35. minuitur] īnuitur C.

Non est igitur possibile, ut a luminoso corpore lineae egrediantur aequidistantes. Et hoc est, quod demonstrare intendimus.

Nec etiam est possibile, ut illuminetur corpus praeter illud, quod est in parte corporis *gd*, sicut corpus *t*.

Lineae enim aequidistantes non existunt in parte corporis *t*, postquam sunt in parte corporis *gd*. Unde ex hoc oportet, ut lumen eius sit in partibus propriis, quae sunt partes, ad quas perueniunt lineae aequidistantes.

Hoc autem extra naturam est. Corpora namque luminosa similium sunt partium. Non ergo partium eorum effectus diuersificatur, nec est possibile, ut ab una parte illuminet absque alia. Tunc enim corpus similium partium esset non similium partium. Quod quidem contrarium esset et impossibile.

Nec etiam est possibile, ut sint lineae non aequidistantes et non egredientes a centro.

Si enim ita esset, esset etiam necessarium, ut corpora luminosa non essent similium partium. Quaedam enim facerent lineam prodire ad partem unam, et alia facerent lineam prodire ad aliam partem eius. Cuius autem partium effectus diuersificatur, similium non existit partium. Similes enim partes similem operantur effectum. Quod ergo est similium partium, esset dissimilium partium. Quod quidem contrarium est et impossibile.

Oporteret etiam per hoc, ut esset manifestum ex parte contraria, quod manifestum est ex parte alia. Lumina autem cuiusque partium corporis luminosi sunt similia.

Huius quoque exemplum ponam. Ponam itaque, ut corpus luminosum sit circulus *ab*, et una linearum ab eo egredientium linea *ag*, et una earum linea *bg*, et una earum linea *eu*, et una earum linea *bz*. Et ponam, ut corpus, super quod cadit lumen, sit inter duas lineas *ag*, *bg*, quae contingant corpus *ti*. Ponam etiam duas lineas *eu*, *bz*, quarum extremitates non concurrant, etiam si in infinitum protrahantur. Et ponam, ut corpus, quod cadit inter duas lineas *eu*, *bz*, sit corpus *kl*, quae contingant ipsum supra *k* et *l*.

Dico ergo, quod umbra proueniens a corpore *ti* minuitur et finitur, et fit pinealis.

---

2. Et ... intendimus] Quod est propositum O Et hoc est q. d. v. A Et hoc est quod monstrare uolumus C. intendimus] voluimus B. 4. sicut] sic B. 5. existunt] existant K. *t*] *tu* (?) B. 6. sunt] *om.* B. ex] et C. sit] *om.* K. 7. propriis] promijs (!) C. 9. extra] *om.* K. 10. ergo] autem B. 11. illuminet] illuminetur B illuminent K. corpus] corpus luminosum B 12. esset ... partium] *om.* K. partium] *om.* B. esset] est B. 13. et] *om.* K. 14. Nec] Neque O. 17. similium] similimilium P. Quaedam] Quemadmodum B. 17—19. Quaedam ... partium] *om.* C. 17. facerent] AO facẽt (= faceret?) P fac[t] B facient K. 18. facerent] A facẽt PB faceret K frẽt O. prodire] *om.* K. 21. impossibile] impossibile. Et hoc est, quod ministrare uolumus C. 22. Oporteret] Oportet A. hoc] hoc, quod narraujmus C. 23. autem cuiusque] namque cuiuscunque B. 25. Ponam] *om.* K. 26. circulus] circuli C. eo] ea B. earum] eorum K. 27. *bg*] *dg* C *en* B. *eu*] *cu* A *bz* B. et] *om.* C. et ... *bz*] *om.* B. 29. *ti*] *tl* A *ty* B. 30. concurrant] continentur C. quod cadit] quod cadit sit K super quod cadit lumen, sit B. 31. contingant] contingat K conting[t] B. supra] super B. et] *om.* O. 32. proueniens] perueniens PB. *ti*] *tl* A *ty* B. 33. fit] sit B.

Duarum namque extremitates linearum radii, quae contingunt fines corporis *ti*, concurrunt supra notam *g*. Umbra igitur corporis *ti* continetur a duabus lineis *tg*, *ig* et superficie corporis *ti*, quae est a parte *g*. Umbra ergo finitur apud angulum *g*.

Quia uero duarum linearum fines corporis *kl* contingentium extremitates, licet a parte *uz* in infinitum producantur, non concurrunt, ergo aut erunt aequidistantes aut quantumcunque a parte *uz* protrahantur, spatium inter eas augmentabitur.

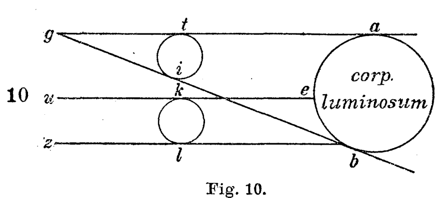


Fig. 10.

Umbra autem proueniens ex corpore *kl* continetur a duabus lineis *ku*, *lz* et superficie corporis *kl*, quae est in parte *uz*.

Ipsa ergo non finitur neque minuitur neque augetur. Semper ergo est contraria umbrae corporis *ti*. Ipsa enim minuitur, quemadmodum praemisimus.

Possibile autem est, ut corpus cadens inter duas lineas *ag*, *dg* [lege: *bg*] ponatur esse corpus cadens inter duas lineas *eu*, *bz*, ita ut transducatur ab eo, quod est inter duas lineas, ad id, quod est inter duas lineas.

Propter hoc igitur oportet, ut uni corpori illuminato ab uno luminoso corpore proueniant semper umbrae diuersae aut motu ipsius aut motu corporis luminosi aut motu utrorumque simul, cum corpus illuminatum est similis comprehensionis, uidelicet comprehensionis rotundae.

Hoc autem non reperitur in aliquo illuminatorum. Nunquam enim minuitur eius umbra, nisi cum illuminans est maius illuminato, et augmentatur cum huius contrario, et cum aequali aequatur.

Non est ergo possibile, ut sit lumen egrediens a corpore luminoso lineae irregulares non egredientes a centro neque etiam egredientes a centro, quemadmodum prius ostendimus, neque aequidistantes.

Non ergo restat, nisi ut lumen proueniat per corpus luminosum in toto aere ab eo contento, et ut omnis locus, a quo possibile est produci lineam rectam ad notam corporis luminosi, illuminetur a lumine corporis luminosi.

Huius quoque exemplum ponam.

---

2. *ti*] *ty* B *t* A *om.* C. supra] super BC. *ti*] *ty* B *t* A *q* K. 3. *ig*] *lg* A *iz* K. superficie] superficio A. *ti*] *tl* A *ty* B. Umbra ergo] *bis* B. 5. Quia] Et quia B. uero] non K. 6. licet] uidelicet B. in] *om.* BO. non] non et C. aut] autem C. 7. quantumcunque] quacunque B. 8. *uz*] n^c (= nec?) B. protrahantur] *om.* C. 9. augmentabitur] augmentatur C. 10. autem] que K. proueniens] perueniens PB. ex] a A. 14. non] *suprascr.* A. 15. *ti*] *tl* AK. Ipsa] In prima B. 16. minuitur] finitur et minuitur K. 17—18. *ag* . . . lineas] *om.* K *post lineas uerba* propter hoc igitur apparet, ut vni corpori *del.* C. 17. *dg* [lege: *bg*]] *bg* C *bg corr. ex dg* O. 18 *bz*] *ez* B. 20. luminoso corpore] opere C. 21. proueniant] perueniant P perueniunt B. 22. aut] a C. utrorumque] utroque C. 25. eius umbra] *om.* C. nisi cum] in infinitum B. 27. lumen] lumens (!) C. 28. neque . . . centro] *om.* B *marg. adiec. m. 1* A. 29. prius] *om.* A. ostendimus] diximus B. aequidistantes] aequidistantes. Et hoc est, quod volumus dicere C. 30. ut] *om.* PB. proueniat] perueniat PB. 31. a] est K. 32. luminosi] illuminosi B. a] PAC *om.* BKO. 34. quoque] ergo K itaque C.

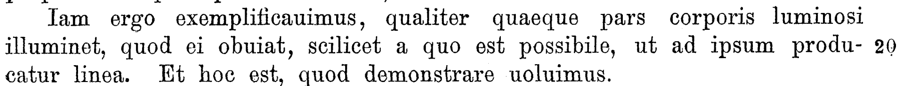
Sit ergo causa exempli corpus luminosum circulus *ab*. Producam autem lineam *gd* contingentem circulum *ab* supra notam *a*. Et sit corpus illuminatum arcus *eu*. Et secet ipsum linea *gd* supra *z*, *h*.

Dico igitur, quod possibile est, ut ab omni nota existente in arcu *zh* protrahatur linea recta ad punctum *a*.

Ab arcu uero *ez* et arcu *hu* non est possibile. Iam enim antecessit in sermonibus, qui sunt de superficiebus, quod si aliqua linea recta contingit circulum, non est possibile, ut a nota, supra quam contingit circulum, producatur alia linea recta in partem circuli nisi linea circulum secans, sicut linea *ua* secans circulum *ab*. Et quia ipsa secat circulum, ergo secat ipsum supra punctum prius, quam perueniat ad *a*, sicut punctum *t*.

Non est ergo possibile, ut a puncto *a* protrahatur linea ad notam *u* — gibbositas namque *at* prohibet lineam a rectitudine — neque ad notam aliam, quae sit in arcu *hu*. Lineis enim, quae producuntur a nota *a* ad arcum *hu*, accidit simile huic, propter hoc quod praemissum est, has lineas secare circulum *ab*.

Fig. 11.



Iam ergo exemplificauimus, qualiter quaeque pars corporis luminosi illuminet, quod ei obuiat, scilicet a quo est possibile, ut ad ipsum producatur linea. Et hoc est, quod demonstrare uoluimus.

14.

Haec autem inconuenientia, quorum praecessit mentio, antequam poneremus, qualiter quaeque pars luminosi illuminet quod ei obuiat, accidunt plerisque, qui praesumunt usurpare sedem et testificare lites, scilicet qui putant, se esse doctores acutos in doctrina, ante quam sint discipuli in disciplina eruditi.

Horum uero opera et cogitationes similantur operibus et cogitationibus similium optime legentibus librum, eo quod paucorum nominum figuras cordetenus tenuerint, cum tamen ignorent litterarum figuras et sonos, et qualiter omnia nomina et dictiones in eas resoluantur et ex eis componantur. In nulla ergo hora desunt eis uerba, quae ignorent, in quibus ponant loco scripti ei [?] in figura simile et in sono diuersum, quemadmodum *fe* et *caph*,

1. Sit . . . *ab*] *om.* O. 2. supra] super B. 3. *eu*] *eh* K. linea] lineam B. 7. enim] *om.* P. qui] quae BO. 8. aliqua] a[a] (= alia?) B. 9. circulum] *om.* K. 12. supra] super K. 13. punctum] punctus C. *t*] *suprascr.* A. 14. possibile] passibilis C. 16 aliam] aliquam K. 17. enim] *om.* B. huic] *om.* K. 18. quod . . . est] ut praemisimus has B. secare] secat C. 19. exemplificauimus] exemplicauimus K exēpl[ius] BO. quaeque] neque B. pars] partes K. luminosi] *om.* B. 20. illuminet] PO illuminat ABC illuminent K. possibile] possibilis C. 21. Et] *om.* B. demonstrare uoluimus] demonstrare uolumus C propositum O. 22—26. Haec . . . eruditi] *om.* C. 22. mentio] intentio O. 23. poneremus] ponemus B. quaeque] quaelibet B. 24. accidunt] accedunt B accidit K. plerisque] plirisque A plures B. 26. disciplina] doctrina B. 27. similantur] scilicet qui putant se esse doctores acutos et doctrina antequam sint discipuli in disciplina simulant C (*cfr. supra*). 29. cordetenus] crederent C. tenuerint] tenuerunt O. Cum] Vnde C. 30. resoluantur] resoluuntur B. et . . . componantur] *om.* K et ex eis componuntur B. 31. nulla] vera (v[a]) B. ignorent] ignorant K. 32. ei] *om.* B. sono] sono diuerso B. *fe*] *fc* K. *caph*] *kal* B.

quae in figuris sunt similes et in sonis diuersificantur. Sonus enim *fe* alius est a sono *caph.*

Isti quoque similes existunt, cuius uisus priuatus est, qui laborat, ut ex diuersis formam pulchram componat. Ipse enim ex errore [!] incurrit propter priuationem sui uisus et ignorantiam sui erroris, quod derideatur ab eo, cuius uisus habentibus uisum est debilior, ne dum ab eo, qui acutum habet aspectum et in componendo est acutus.

Hic ergo propter sui uisus priuationem ponit in forma sua, quod non est ex ea, et eicit ab ea, quod est eius. Nec tamen percipit propter hoc aliquid sui operis, neque etiam cum docuerit eum habens uisum et in componendo subtilis. Omnes uero hii misericordia digni sunt, eo quod supergrediuntur ipsam erroris semitam et natant in tenebrositatis ignorantiae profunditate, stupefacti sine intentione perueniendi ad finem.

Quod si intenderint ad finem peruenire, ignorant, quando ad ipsum perueniunt, aut ipsum pertranseunt, aut non perueniunt ad ipsum.

Postquam iam clarent inconuenientia et absurditates, quae istis accidunt, et ueritas, ad quam non pertingunt, ergo nunc ostendemus, qualiter supra centrum circuli continentis basim aeris a uisu patientis lumen forte cadat, et supra quod ab hoc centro elongatur lumen debile.

Dico ergo, quod locus, qui obuiat pluribus partibus luminosis, plus illuminatur eo, qui paucioribus occurrit. Unaquaeque enim partium luminosarum locum, cui obuiat, per se illuminat. Quapropter locus ab eis illuminatus est fortioris luminis ab aliis illuminato, quemadmodum ex candelis contingere uidemus.

Locus namque, supra quem cadit unius candelae lumen, debilius illuminatur eo, supra quem duarum candelarum descendit lumen. Et similiter, quanto plus augmentantur candelae loco occurrentes, fortioris existit luminis.

Dico ergo, quod loco, qui uisus centrum appellatur, plures partes uisus ipsum illuminantes occurrunt, quare supra ipsum fortius cadit lumen.

Cuius exempli causa sit instrumentum uisus scilicet oculus circulus *abg*, cuius centrum est *d.* Et sit pars, cui inest potentia comprehendendi uisibile, uidelicet dicta exterior gibbositas oculi, arcus *abg.* Protraham autem

---

1. quae] quae est K. 1 & 3. similis] simul C. 3. existunt] sunt K. cuius uisus] cuius ⟨*lacuna*⟩ uisus C. priuatus] priuatur K. 4. enim] autem B. 5. ignorantiam] ignorantium K. 6. ne dum] non dum B radij (!) C. qui] quia B. 8. Hic] Hoc B. 9 est] *om.* B. ea] eo B. ea] eo C. tamen] enim B. 10. etiam] et A. docuerit] aspexerit C. eum] eam C. 11. misericordia] KC mīa AO ? P. digni] digna (?) P. 12. natant] uacant K. in] et ingrediuntur in B *om.* C. 13 stupefacti] et stupefacti B. sine . . perueniendi] *om.* C. finem] finem non peruenientes BC 14. ad ipsum] *om.* B. 15. aut . . . pertranseunt] *om.* B. pertranseunt] pertranseunt *corr. ex* perueniunt C. perueniunt] perueniant B. 16—19. Postquam . debile] *om.* CO 16. iam] autem B. clarent] declarent K *om.* B. 19. quod] quod elongatur A. debile] candelae A. 20. Dico ergo] Non puto sed dico C 22. locum] *bis* B. 23. est] magis est AC. 25. supra] super B. quem] *om.* B que non A cadit] *om.* C. 26. quem] quam BC. 27 augmentantur] PAK augmentatur BC augt^{r} O. candelae] *om.* AB. occurrentes] occurrentis C. fortioris] fortior C. 29 quare supra] aequale super B. cadit] addit ipsum B. 30. Cuius] Sitque huius B Gratia O. causa] *om.* O. sit] *om.* B fit K Sint O. oculus] circulus O. circulus] *om.* K. 31. cuius . . . *d*] est centrum eius *d* C. sit] fit C. comprehendendi] comprehendi C comprehen^{di} O. 32. gibbositas] gilbositas C (*sic semper*). autem] esse C.

ze contingentem *b*, quae est diuidens arcum *ag* in duo media, et lineam *ht* contingentem notam *a*, quae est una duarum finium extrinsecae gibbositatis oculi, et lineam *ik* contingentem notam *g*, quae est alia extremitas praedictae gibbositatis oculi. Et sit corpus, quod conspicitur, arcus *heitzk*, et sit nota, quae subest centro uisus, nota *l*, a qua cum producitur linea ad *b*, sit perpendicularis supra lineam *ez*.

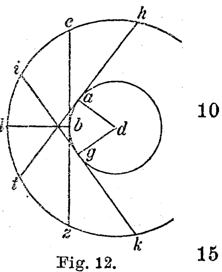


Fig. 12.

Unaquaeque igitur pars arcus *ht* illuminatur a parte *a*. Pars ergo *l* illuminatur a parte *a*. Unaquaeque etiam pars arcus *ik* illuminatur a parte *g*. Ergo *l* etiam illuminatur a parte *g*. Omnis quoque pars arcus *ez* illuminatur a parte *b*. Ergo *l* etiam illuminatur a parte *b*. Pars ergo *l* illuminatur a tribus partibus *a* et *b* et *g*.

Arcus autem *ei* est communis duobus arcubus simul *ht* et *ez*. Ipse igitur illuminatur simul a duabus partibus *a* et *b* tantum. Cum hac quoque dispositione demonstratur, quod arcus *zt* illuminatur a duabus partibus *g*, *b* tantum.

Arcus uero *he* est pars arcus *ht* solum. Non ergo illuminatur nisi a parte *a* tantum. Et secundum hanc dispositionem ostenditur, quod arcus *zk* illuminatur tantum a parte *g*.

Nota itaque *l* illuminatur a tribus partibus, *a* uidelicet et *b* et *g*. Omnis uero nota, quae est in duobus arcubus *ei*, *tz* illuminatur a duabus partibus, sicut praemisimus. Et unusquisque duorum arcuum *he* et *zk* illuminatur ab una parte, quemadmodum praemisimus Illuminatio igitur *l* est fortior illuminatione cuiusque notae existentis in duobus arcubus *ei*, *zt*. Et illuminatio duorum arcuum *ei*, *zt* fortior existit illuminatione duorum arcuum *he*, *zk*. Et quanto magis protulerimus proportionem arcus, continuabuntur loca in ordine illuminationis *l* ad duas notas *h* et *k*.

Iam ergo declaratum est, quod centrum fortius illuminatur. Et quod ei propinquius existit, magis est illuminatum eo, quod ab eo longius existit. Supra ipsum namque plus luminis cadit, scilicet a pluribus luminosis partibus illuminatur. Et illud est, quod demonstrare uoluimus.

15.

Dico autem, impossibile esse, quin passio aeris a uisu et omnis a uisu patientis subito fiat ab eius principio usque

1. quae] qui BO. *ag*] *ae* K. lineam] linea C. 2. gibbositatis] gilbositatis C (*sic semper*). 3. lineam] linea AC. contingentem] contingente C. alia] *om.* B. praedictae] dictae B. 4. arcus] *om.* B. *heitzk*] *h*, *e*, *i*, *l*, *t*, *z*, *k* BC *he*, *lt*, *zk* K 6. *ez*] est BC. 8. *l*] et K. etiam] *om.* B. 9. pars arcus] arcus pars igitur B. 9—10 Ergo . . . *g*] *om.* C. 10. arcus] are C. *ez*] *e* K. 11. Ergo *l* etiam] Pars ergo *l* B Ergo *l* C. 12. *l*] *om.* C. 13. *ei*] enim C. communis] conueniens C. 13. simul] similis (?) P. 14 *ez*] *eh* C. 15. hac] hanc A. 16. *zt*] *tz* B. *g*, *b*] *g* et *b* C. 17. est] *om.* C. solum] *om.* O. 18. ostenditur] ostendit C. *zk*] *zh* BC. 20. itaque] ita quoque B. 20—22. uidelicet . . . sicut] *marg. m. 1.* A. 20. *b* et *g*] *bge* A. 21. *ei*] enim C. illuminatur] *om.* C. 22. et] *om.* O. *zk*] *zb* C. 23. *l*] *om.* B. est] cum C. 24. *ei*] et C. Et illuminatio] Illuminatam B. 25. *ei*] enim C. fortior] est fortior B. 26. *zk*] et *hz* B. magis] maius B. 27. et] *om.* O. 29. ei] *om.* AC. propinquius] propinquior (?) P. magis] maius B. eo . . . existit] *om.* O. ab eo] ab C. 30. Supra] Super O. namque] *om.* C. 31. illud] hoc A. quod . . . uoluimus] etc. K. uoluimus] uolumus CO. 32. Dico] Dicit auctor *marg. adiec. m. rec.* C.

ad finem, parte non praecedente partem usque ad finem itineris uisus, aut sit passio partis post partem.

Quod si pars post partem patitur, tunc aut pars contingens instrumentum uisus patitur prius, et post ab illa parte patitur pars, quae ipsam sequitur, et deinceps similiter usque ad ultimum patientem a uisu. Aut pars contingens instrumentum uisus patitur prius, deinde patitur etiam pars, quae ipsam sequitur, a uisu, postea pars, quae sequitur secundam, patitur post eam a uisu, et sic usque ad ultimam patientem a uisu, partibus non patientibus aliis ab aliis.

Si autem partium aliae ab aliis patiuntur, oportet tunc, ut quaecunque partes continent [lege: contingunt] partem primum patientem, patiantur etiam, omnes uidelicet ipsam contingentes, et quaecunque contingunt secundo patientem, patiantur etiam ab eo, et ita semper contingant usque ad ultimam patientem.

Sequitur ergo ex hoc, ut quod aeris est ante instrumentum uisus, et quod est post ipsum, aut aliud patientium a uisu patiatur. Totius enim mundi partes ad inuicem sunt continuae, non diuisae. Oportet ergo, ut cum aliquis suo uisu in aliqua parte aliquid comprehendere uoluerit, uideat omnia, quae sunt in patientibus a uisu, uidelicet quod est ante eum, et quod est post ipsum, et quod est in omnibus partibus.

Quod autem inuenitur, huius existit contrarium. Nunquam enim nostris oculis sentimus, nisi a quo lineam rectam ad partem oculi uidentem protrahi possibile est. Ab eo autem, quod post nos existit, ad partem nostrorum oculorum uidentem lineam rectam produci est impossibile. Non ergo patitur a patiente a uisu, quod ipsum contingit.

Quod si pars contingens uisum patitur primum, deinde secunda post eam, post tertiam [lege: tertia] post secundam, et similiter semper usque ad ultimam patientem, quod tamen a uisu fit non quaedam partium a quibusdam, oportet, ut sit passio cum tempore, cum quaedam post alias patiantur.

Sequitur ergo, ut cum rem aliquam uidere uolumus, cuius spatium a nobis sit unius cubiti, non comprehendamus ipsam, nisi postquam intendimus ad ipsam cum aliquo tempore, licet non sensibili. Paruum autem tempus magni temporis pars existit aut pars partis necessario.

---

1. ad] in O. parte] *om.* B. praecedente] praecedente vincente B. itineris] taneris (!) K. 2. sit] fit K. 3. post] p^{9}reter (?) C. patitur] partitur C. 4. prius] plus A. ipsam] ipso C *om.* B. 6. prius . . . patitur] *om.* C. prius] plus A. 7. secundam] secundam a uisu C. 8. eam] ea BC. et sic] sit C *om.* B. ultimum] infinitum ultimum A. non] *om.* O. 10. Si] Sit C. aliae] alia B. 11. primum] primam O. patiantur] patiatur C. 12. etiam, omnes] *om.* C. contingentes] contingentem C. contingunt] contingerit C *om.* B. 13. patientem] *om.* O. eo] ea KC. contingant] PC contingat AK contingit B conting˜ O. 14. ultimam] ultimum K. patientem] patientem, patiantur etiam ab ea C. 15. est ante] quod est ante A quod est autem C. 16. aliud] *om.* A. 20. quod est] *om.* B. ipsum] illum ipsum K. et quod est] *om.* B. 21. huius] hoc BC. 22. ad] *om.* AO. 23. autem] aut K. quod] qui O. 24. impossibile] possibile B. 25. quod] quoque B. contingit] continget K. 26. uisum] uisu (?) P. secunda] secundum B secundo K. 27. eam, post] ea B. post secundam] *om.* B. 28. tamen] cum B. fit] AKCO sit PB. quaedam] quidem K quoddam (?) B. 29. alias] aliam B. 30. aliquam] aliam B. uolumus] uisibus nostris uolumus B uoluimus K. 31. sit] fit A. comprehendamus] comprehendimus K. intendimus ad ipsam] uolumus C. 33. existit] existet B.

Ergo oportet, ut cum nos consideramus secundum multiplex illius spatii, comprehendamus ipsum cum tempore, cuius proportio ad tempus eius, quod consideratur secundum brachium, sit sicut proportio maioris spatii ad minus spatium.

Est ergo tempus, quod est inter uoluntatem uidendi et comprehensionem, scitum.

Causa exempli cuius sit uisus apud notam *a*, et partes patientes apud notam *b*, et res, quae consideratur, apud notam *g*.

Si ergo tempus, quod est inter uoluntatem uidendi *g* ad comprehendendum *g*, non est comprehensum propter sui paruitatem, dicemus: asume spatio *ag* multiplicia multa, sicut spatium *ad*. Postea sit uoluntas nostra comprehendere *d* uisu. Ergo quod in tempore comprehensionis *d* existit ex multiplicibus temporis comprehensionis *g*, aequale est ei, quod in spatio *ad* ex multiplicibus spatii *ag* existit.

b *d* *g* *a*

Fig. 13.

Si ergo tempus, quod est a uoluntate nostra uidendi *d* ad comprehensionem *d*, est non apparens, et similiter si acceperimus spatio *ad* plura multiplicia, donec perueniant ad notam *b* — non sit uoluntatis nostrae uidendi *b* ad comprehensionem *b* tempus manifestum — tunc non oportet concedi, comprehensionem uisibilium cum tempore fieri, postquam partibus uisibilium non apparet tempus.

Nos enim si uidere uellemus, quod est in postremo loco uisibilium, scilicet cuius elongatio a nobis est, quod est in orbe stellarum fixarum, non appareret nobis inter uoluntatem uidendi stellas fixas tempus, quoniam cum uoluntate comprehendimus, quod uolumus, cum subest uisui, scilicet centro eius, et medium est luminosum, non existente obstaculo inter nos et ipsum.

Visibilia igitur cum tempore non comprehenduntur. Patiens ergo a uisu subito ab eo patitur, eius uidelicet principium cum eius fine, et non in tempore. Et illud est, quod demonstrare uoluimus.

---

1. nos] eos B. consideramus] consideremus A. 2. quod] aliquod B. 5. Est] eñ C. et], quae est cum visum, et B. 9. *g*] *post g* non *del.* K. 10. non] si B. sui] sui propter B. 13. sit] sic uolumus; sic B. 15. *d*] de B. comprehensionis] deprehensionis B *post comprehensionis* uisus *del.* P. 16. est] *om.* A. 19. si] et si A. 20. perueniant] perueniat BO. notam] nota (?) P. uoluntatis] uoluntas K. 21. *b*] *l* B. ad comprehensionem *b*] *om.* A. tunc] et cum C. 22. concedi] docendi C. 23. tempus] post quod est B. 25. elongatio] congregatio C. a . . . quod est] est a nobis cum B. 26. inter uoluntatem] in uoluntate K. fixas] fixis B. 27. uoluntate] uoluntate uidendi B. subest] sub *e* PA. libris (?) B. uisui] uisu PB. 30. comprehenduntur] comprehendentur et C. 32. illud] hoc CK. demonstrare] monstrare C. uoluimus] uolumus BCO.

16.

Quia ergo huius declarationem iam praemisimus, inuestigemus causam, qua sensus uisibilis singularia in speculis comprehendit. Prius tamen ante hoc, quo huius causae inuentio facilior fiat, praemittamus.

Dico igitur, quod necesse est, ut per hoc, quod uidemus de conuersione radiorum, conuertantur radii a corporibus, a quibus conuertuntur, secundum angulos rectos [lege: aequales], scilicet ut proueniat ex radio egrediente a luminoso et superficie corporis, a quo radius conuertitur, angulus aequalis angulo, qui prouenit ex radio conuerso et superficie corporis, supra quod conuertitur radius.

Verbi gratia sit corpus tersum conuertens radium linea *ab*, et corpus luminosum, a quo egreditur radius, apud notam *g*, et nota superficiei *ab*, supra quam cadit radius, *d*, et radius conuersus a *d* radius *de*.

Dico igitur, quod angulus *adg* inuenitur aequalis angulo *edb* per hoc, quod ostendam.

Quod est, si praeparauerimus corpus tersum, et posuerimus eius superficiem transeuntem per lineam *ab*, et obuiauerimus cum tabula transeunte per lineam *uz* superficiei corporis *ab*, et produxerimus a nota *d* lineae *ab* perpendicularem ad lineam *uz*, quae sit perpendicularis *di*, et fecerimus in tabula *uz* foramen rotundum, ubi est sectio *gd*, et signauerimus foraminis locum nota *h*, et fecerimus foramen secundum rotundum aequale foramini *h* in linea *iz*, cuius longitudo a nota *i* sit sicut longitudo *h* a nota *i*, et signauerimus ipsum nota *t*, et obuiauerimus tabulae *uz* cum tabula *kl* aequidistante tabulae *uz*, cadet radius egrediens a *g* supra notam *d*, et conuertetur super lineam *dt*, et cadet super notam *e* tabulae *del* [lege: *kel*].

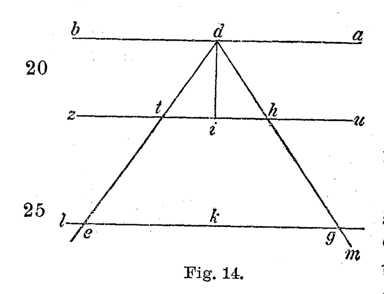


Fig. 14.

Linea uero *hg* [lege: *hi*] est aequalis lineae *tg* [lege: *ti*], sitque *id* communis, quae est perpendicularis super duas lineas *ab*, *uz*. Duo ergo anguli *hid*, *tid* sunt recti, et duae lineae *hd*, *dt* sunt aequales. Ergo duo anguli *dhi*, *dti* sunt aequales. Lineae uero *ab* et *uz* sunt aequidistantes. Et iam ceciderunt super eas duae lineae *dh*, *dt*; ergo anguli coalterni sunt aequales. Ergo angulus *adh* est aequalis angulo *dhi*. Angulus igitur *adh* aequatur angulo *dti*. Angulus uero *dti* est aequalis angulo *bdt*; ergo angulus *bdt* est aequalis angulo *adh*.

---

1. huius] *om.* O. 3. tamen] *om.* K. quo] quod C. inuentio] intentio KB. 5. quod uidemus] ut uideamus B. 7 proueniat] AKCO perueniat PB. 8. luminoso et superficie] lumine et liniae B 9. prouenit] AKCO peruenit P perueniet B. supra] super BO. 11. Verbi] Exempli C. 12. nota] notato A nota lineae B. *ab*] *om.* B. 13. radius *de*] *de* O. 16 si] quod si B. tersum] tensum A. 18. per ... *uz*] *gnz* B. produxerimus] perdux[us] B 19 perpendicularem] perpendicularis B. 20 sit] sic B. 21. fecerimus] *om* B. 21—23. ubi ... rotundum] *om.* B 22. signauerimus] signauimus C. 24. aequale] aequalem C. 25. sicut] sic C. 26. nota] notam C 27. aequidistante] aequidistantem A. tabulae] *om.* C. 28. cadet] cadit C. 29. cadet] cadit C. *e*] est C. *del* [lege: *kel*]] PBAC *kel* K. 30. *hg* [lege: *hi*]] PBAC *hd* K. *tg* [lege: *ti*]] PBAC *dt* K. 32. et] ergo P. 34. *dh*] *ah* K. *dt*] *om.* C. anguli] *corr ex* angulus K. 36. *adh*] *adz* C.

Iam ergo reperiuntur anguli, qui proueniunt ex radio et corpore, a quo conuertitur radius, et radio conuerso aequales, quemadmodum praemisimus.

Si ergo corpus luminosum praecedat supra *gd* aut subsequatur supra lineam directe coniunctam lineae *gd*, sicut linea *gm*, radius cadet supra notam *e* non declinans ad dextram neque ad sinistram; etiam si foramen *t* a loco suo uersus *i* moueatur, aut ab eo elongetur, non remouebitur radius *gd* umquam a foramine *t*.

Ex radio igitur egrediente a luminoso corpore ad corpus tersum et ex conuerso a corpore terso et superficie corporis tersi aequalis, id est superficie aequali, in qua omnis linea egrediens est aequalis, proueniunt anguli aequales. Et illud est, quod demonstrare uoluimus.

17.

Postquam igitur aer patitur a uisu passionem similem casui partium luminosi, scilicet quia prouenit radius secundum rectitudinem rectarum linearum, tunc radius factus a uisu conuertitur etiam a corporibus tersis secundum aequales angulos.

Nos quoque si naturae uestigia imitauerimus, hoc ita esse inueniemus.

Inueniemus enim motum naturalem motum simplicem non compositum, uidelicet aut circularem aut rectum. Sed nec etiam rectum inueniemus compositum ex recto et circulari simul. Rectus tamen diuersificatur secundum principium et finem.

Oportet ergo, ut sit alicuius eorum principium ex fine alterius, et finis eius sit apud principium illius alterius. Motus ergo naturalis rectus etiam non est compositus, uidelicet non est compositus ex duobus simplicibus simul, sed est unus tantum motus.

Fig. 15.

Si ergo posuerimus superficiem speculi, a quo radius conuertitur, lineam *ab*, et locum uisus notam *g*, et notam superficiei *ab*, supra quam cadit radius, notam *d*, et protraxerimus a *d* lineam *de* ad partem lineae *ab*, in qua est nota *g*, et fecerimus angulum *gda* aequalem angulo *edb*, tunc si ymaginauerimus radium *gd* euntem secundum rectitudinem et secantem lineam *adb*, sicut linea *gdu*, et fecerimus lineam *du* aequalem lineae *de*, manifestum erit, quod duo anguli *adg*, *udb* sunt aequales, quoniam sunt oppositi.

---

1. proueniunt] AKC perueniunt PB. 2. aequales] sunt *adiec. marg.* P. quemadmodum] *om.* K. 4. praecedat] praecedit K. supra] super K. supra] super B. 5. lineam] linea B. coniunctam] coniuctam B tanctam (!) C. *gd*] *g* B. sicut] siue B. linea] lineam B. cadet] cadat B cadit C. 6. etiam] et B *om.* K. si] si ad B. 7. elongetur] elongotur (!) C. 10. terso] terse B. id] illud B. 12. demonstrare] monstrare C. uoluimus] uolumus C. 13. casui] $\overline{\text{cam}}$ (= causam) B. 16. tersis] tergis K. 17. quoque] uero B. imitauerimus] mutauerimus BC. hoc] licet C. 18. motum] totum C. 19. inueniemus] inuenierimus B. 20. tamen] vero K. 23. et . . . alterius] *marg. m. 1.* A. 26. tantum] $\overline{\text{cm}}$ C. motus] ABCK modus P. 32. ymaginauerimus] signauerimus B. *gd* euntem] *ged* eundem B *dg* euntem K. 34. *adg*] *agd* BK. *udb*] *dndb* B. *vab* C. 35. oppositi] opposita (?) P.

Si ergo ymaginauerimus lineam *ab* sicut meguar [i. e. axem]*) fixum in loco suo, scilicet quod fines eius sint fixae apud duas notas *a* et *b*, et moueatur super duos polos *a* et *b*, donec moueatur linea *du* ad partem lineae *ab*, in qua est nota *g*, cooperiet linea *du* lineam *de*, et cadet nota *u* supra notam *e*. Quod sic probatur.

Quia angulus *udb* est aequalis angulo *edb*, quoniam *edb* aequatur *adg*, et linea *db* communis non remouetur a loco suo, tunc quando uoluitur linea *db* super meguar [i. e. axem]*) *db*, donec moueatur angulus *udb* ad partem *e*, cooperit angulum *edb*, et stat linea *ud* super lineam *ed*, et cadit nota *u* supra notam *e*, quoniam linea *ud* est aequalis lineae *ed*, et angulus est aequalis angulo, et linea *db* est communis utrisque.

Quod si angulus non cooperit angulum, tunc linea *db* mouetur de loco suo, eundo ad notam *u* aut ad notam *e* aut aliter eundo sursum aut deorsum.

Non ergo radius solus conuertitur, sed et superficies speculi remouetur simul cum conuersione radii a loco suo, ubi supra ipsum cadit radius. Sed superficies speculi non mouetur propter casum radii supra ipsum. Hoc namque extra naturam est. Motus autem radii est naturalis. Ipse ergo est motus unus simplex, non compositus.

Non ergo mouetur linea *ud* nisi ad partem *e* solum, neque angulus mouetur. Ipse ergo cooperit angulum *bde*, quemadmodum praemisimus. Erit ergo ut radius, qui, si directe protenderetur, iret secundum lineam *gdu*, conuertatur a nota *d* supra lineam *de*. Est ergo angulus *adg* aequalis *bde*. Et illud est, quod demonstrare uoluimus.

18.

Omnis quoque radius a parte sphaerae apparente et a gibbositate sphaerae intrinseca conuersus secundum aequales conuertitur angulos.

Verbi gratia ponam duas sphaeras *abg, dbe* sese supra punctum *b* contingentes. Et protraham lineam *ubz* super *b* nullam duarum sphaerarum secantem. Et ponam uisum notam *u* [lege: *h*]; et radius *hb* conuertatur a nota *b* supra notam *t*.

Angulus igitur *hbu* est aequalis angulo *tbz*; sed angulus *abu* aequatur angulo *gbz*. Restat ergo, ut angulus *abh* sit aequalis angulo *gbt*.

1. meguar] PKB megnar A megar C. 2. scilicet] secundum (?) P. 3. moueatur] mouentur A. 4. *du* lineam] *dv* linea C *om.* A. cadet] cadit C. nota *u*] nota a loco suo, ubi suqer ipsum cadit radius, sed superficies speculi non mouetur per casum radii super ipsum; hoc namque B. 6. Quia] *om.* B. aequatur] sequitur K. 7. *db*] *ab* C. communis] communus C. remouetur] remoueatur A. 8. meguar] megar C. moueatur] mouetur B. 9. cooperit] coperit A. 10. *u*] *m* B. 13. ad] *n* ad B. *u* aut] *u* aut *n* B. *e* aut] *e* aut *n* B. 15. solus] solis B. et] etiam B *om.* C. superficies] super eius A. 16. a] super ipsum a B. 17. supra] super B. 18. extra] contra C. 22. iret] nec K. 23. conuertatur] conuertitur B. supra] super K. *adg*] *ndg* K. 24. illud ... uoluimus] hoc est quod monstrare uolumus C illud est quod mouet K i. e. q. d. u. A. 25. quoque] ergo C. 28. Verbi] Exempli C. *dbe*] *de* C. 29. lineam] *bis* K. *ubz*] *nz* B. nullam] ullam K. 30. *hb*] *ab* K *lb* C. 32. *hbu*] *abn* K *hnb* B. *tbz*] *tbh* C. *abu*] *anb* B. 33. ut] *suprascr. m. 1.* A.

*) mihwar مِحْوَر cfr. Nalliuo, Albattani opus astronomicum I, 319.

Angulus quoque *dbu* est aequalis angulo *ebz*. Ergo totus angulus *dbh* toti angulo *ebt* aequalis existit. Duo ergo anguli *hba, tbg*, qui fiunt ex conuersione radii a gibbositate sphaerae intrinseca, sunt aequales.

Et similiter duo anguli *hbd, tbe*, qui fiunt ex conuersione radii a parte sphaerae manifesta, sunt aequales. Et illud est, quod demonstrare uoluimus.

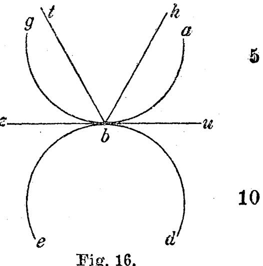


Fig. 16.

Iam ergo manifestum est, quod radii uisibiles et non uisibiles conuertuntur secundum rectos [lege: aequales] angulos a superficiebus rectilineis et sphaericis, uidelicet a gibbositate earum concaua et ab apparente gibbositate earum. Et illud est, quod demonstrare uoluimus.

19.

Nunc itaque inuestigemus causam, qua uisus per specula comprehendit res a sui rectitudine remotas.

Dico ergo, quod sermo secundum naturae semitam procedens de comprehensione singularium per specula est, quod impossibile est, quin aut radii a uisu patientes conuertantur a speculis ad res per specula comprehensas, super quas fiant bases radiorum, et comprehendat eas uisus, sicut comprehendit per radium ab eo patientem ad uisibile egredientem absque medio, aut formae rerum uisu comprenhensarum mediantibus speculis sigillentur in speculis, et cadat super eas radius a uisu patiens et comprehendat eas uisus, quemadmodum comprehendit sine medio, aut hae duae causae sint simul.

Quod si formae uisibilium in speculis sigillantur, tunc aut illud est, quia forma currit, donec contingat speculum et sigilletur in eo, aut quia super speculum impressio tenebrosa occurrit, quemadmodum corporibus accidere cernimus, cum in lumine praeparantur et iaciunt umbras.

Si autem forma in speculo secundum hunc modum sigillatur, scilicet impressione tenebrosa, tunc non oportet, nisi ut quod in speculo sentitur, sit figura tantum, et non sit color neque diuisio neque loci impressio. Quod autem sentitur, huius contrarium est.

Sentimus enim in speculo colorem eius, quod sentitur, et situm partium ipsius et motum eius, eius scilicet effectus et ipsius diuisiones. Eius ergo, quod mediante speculo sentitur, forma non sigillatur in speculo sigillatione tenebrosa.

---

1. Angulus . . . *ebz*] *marg. adiec. m. 1.* A. 2. fiunt] fiut (!) C. 5. *tbe*] *ante tbe literas*: *tde del.* P. 7. est . . . uoluimus] *om.* C. e. q. d. u. A. uoluimus] volumus B. 8—13. Iam . . . uoluimus] *om.* A. 11. uidelicet] scilicet B. concaua] canoma (!) K. 12—13. Et . . . uoluimus] *om.* C. 13. uoluimus] uolumus B. 14. Nunc] Hunc B Tunc C. comprehendit] comprehendunt K. 17. quin aut] quoniam ante ($\overline{qm}$ $\overline{an}$) B. 18. per] propter B. 19. super quas] supra quos C. 21—22. uisu . . . radius] *om.* C. 22. cadat] cadit B. comprehendat] comprehendit B. 24. sint] sunt B. 25. tunc] *om.* B. 26. contingat] attingat B. aut] autem B. 28. cernimus] cerminus K. in lumine] illumine A. 29. hunc] *om.* K. sigillatur] sigillantur C. 31—32. sit figura . . . sentitur] *marg. adiec. m. 1.* A. 31. neque] nec B. 33. et] *om.* B. partium] *om.* K. 34. eius, eius] eius B.

Quod si formae a sensibili ad speculum currunt et sigillantur in eo, sequitur ex hoc, quod sequitur, si formae a sensibilibus non mediantibus speculis currunt, quemadmodum ostendimus, et etiam, ut in speculis posteriora nostra et non facies nostras uideamus, quoniam antecedens currentium, quod occurrit uisui aspicientis, sit postremum, aut ut quandoque uideatur antecedens, et quandoque subsequens, et quandoque e contrario huius, si extimant, quod formae secundum diuersitatem currant, et quod motus inundet, donec occurrat speculo, quoniam propter spatia diuersa, quae sunt inter specula et ea, quae eis opposita considerantur, oportet, ut quae ad ea currunt, obuient eis secundum spatia diuersa. Quod autem sentitur, huius existit contrarium.

Nos enim facies nostras semper uidemus in speculis nobis oppositis secundum quaelibet spatia, neque aliter sentimus. Et etiam non sigillarentur ad speculum currentia, nisi in eo, quod figurae eius magnitudinem reciperet. Quod autem sentitur, huius est contrarium.

Reperimus enim, quod in figura sui magnae existit quantitatis in speculo, quod est paruae quantitatis apud ipsum; et reperimus ipsum in speculis diuersarum figurarum secundum spatium unum diuersarum quantitatum. Neque etiam in speculo ad ipsum currentia sigillarentur nisi superficialiter et non corporaliter; sed uideremus corpus manifeste extra speculum, scilicet fines gibbositatis eius tangentes eius superficiem, apud quam eius forma ad ipsum currens reperitur.

Hoc autem numquam in aliquo speculorum uidemus neque superficialiter solum, sed uidemus corpora in speculo corporaliter secundum figuras suas habentia profunditatem non alterata [!]. Et uidemus inter ea et superficiem speculi spatia aequalia ei, quod est inter id, cuius forma in speculo sentitur, et superficiem speculi. Et etiam uidemus impressionem, quae est in toto illo spatio secundum longitudinem aequalem longitudini ipsius. Neque etiam in speculo sigillarentur res, [si] agregatio mensurarum, quarum quae in speculo sentiuntur, esset maior superficie speculi multis uicibus.

Nos enim fortasse uno uisu multa uidemus corpora in speculo paruo, cum comparatum fuerit ad ea, quae in eo uidentur, sicut cum uidemus centum milites in speculo uno stantes, quorum unusquisque cum sua quantitate perfecta uidetur non in quantitate sua diminutus diametro speculi unius palmi aut minoris mensurae, sicut ille, qui per paruum foramen cor-

---

1. Quod] Idem K. 3. ut] *om.* B. 4. facies] faciens C. 5. occurrit] currit B. ut] *om.* K. quandoque] quando A. 6. uideatur] uideant (?) P. subsequens] consequens K. e] *om.* C. 7. extimant] extimat B. 8. occurrat] occurrant K. spatia] sparsia K. 9. opposita] conposita B. ut] ut ea B. 10. obuient] obtinent K. 12. nostras] nostra C. 13. sigillarentur] sigillaretur C. 14. ad speculum] *om.* B. in] cum C. 15. est] *om.* B. 16. sui] *om.* B. 17. ipsum] *om.* B. 18. quantitatum] quantitatem K. 19. Neque] Et licet B. 20. et non corporaliter] *om.* K. uideremus] uiderentur C. 21. fines gibbositatis] gibbositate B. 24. corpora] corpus K. 26. spatia] et spatia K. id] idem K illud B. cuius] est C. 27. Et] Quia *in. ras.* A. 28. longitudini] *om.* B. Neque etiam] Et licet B. 29. agregatio] agregatem K. mensurarum] superficierum B. quarumque] quae K. 31. Nos] N̄os (= ?) B. fortasse] fortassis B. 32. comparatum] corporatum K. 34. uidetur] uidentur K. sua] sui B. diametro] diametrus K. 35. palmi] palmae B. sicut] aut B. qui] quod B. per] *om.* K.

poris terrae latitudinem considerat, et uidet singularia plura, quorum minus foramine maius existit.

Oportet etiam, ut uideamus in speculo uno unius rei formam in locis pluribus, quemadmodum in multis speculis uidetur, quorum diametri, cum coniunguntur, sunt aequales diametro unius speculi.

Si enim forma ad unumquodque eorum currit, tunc ipsa currit ad illud, cuius diametrus est aequalis diametris illorum plurium speculorum. Quod autem sentitur, huius est contrarium, scilicet non reperitur in speculo uno unius rei nisi forma una, siue speculum sit magnum siue paruum.

Possibile est praeterea, ut hoc multa inconuenientia praeter ea, quae diximus, sequantur. In eis tamen, quae diximus, sufficientia existit ad declarandam falsitatem eius, cuius uoluimus falsitatem demonstrare.

Quod si formae ad specula currunt et sigillantur in eis, et radius conuertitur ad uisibilia, et comprehendit ea, oportet ex hoc, ut in speculo unius rei duae formae uideantur, quarum una sit ea, quam comprehendit radius conuersus, et altera ea, quae in speculo sigillatur. Et sunt in ea, quae in speculo sigillata est, omnia necessaria, quae praediximus, insigillata in speculo. Quod autem sentitur huius est contrarium.

Non ergo restat, nisi ut uisibilia non comprehendantur mediantibus speculis, nisi per conuersionem a speculis ad uisibilia et casum basium radiorum conuersorum super uisibilia, sicut uisus comprehendit sine medio per radium ab eo factum. Hoc autem sensibiliter inuenimus per id, quod ostensuri sumus.

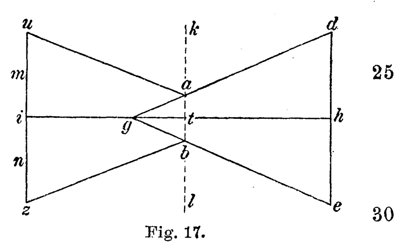


Fig. 17.

Et hoc est, ut ponamus speculum ante nos erectum, cuius superficiem orizon orthogonaliter secet, sicut linea *ab*, et ponatur locus uisus, a quo ad superficiem speculi perpendicularis egreditur, sicut nota *g*. Et protrahamus a nota *g* duas lineas per duas notas *a* et *b* transeuntes aequales, sicut duae lineae *gad*, *gbe*, et coniungamus *d* et *e* linea *de*, et producamus a *g* lineam, quae sit perpendicularis super medium speculi, et perueniat ad lineam *de*, et partiatur ipsam in duo media supra notam *h*. Et signemus

---

1. minus] unus B. 2. existit] existit. Solent etiam fieri speculi, in quibus videntur VII monachi aliquod officium facientes et semper apparentes aut mulieres saltantes uel ludentes, ut suo in loco docebimus C. 3. Oportet] C *marg. m. 1. notat*: „de eodem". rei] regi B. 6. Si] P *marg. m. 1. notat:* „uult, quod tociens uideatur forma in speculo magno, quot sunt specula parua". enim] eum C. tunc ipsa currit] *om.* K. illud] ipsum B. 7. diametrus] dyametrum B. aequalis] aequale B. diametris] diametro B. 8. scilicet] *om.* B. uno] uero B. 9. rei] regi B. 11. sequantur] assequantur B sequuntur K. tamen] cum B. 12. uolumus] ABK uoluimus PC. 13. Quod] Idem K. 14. comprehendit] cum sequitur B. 16. altera] alteram K. 19—20. non . . . uisibilia] *om.* K. 20. et] *post hoc uerbum* ba *del.* C. 21. sine] fine C. 22. autem] autem est, quod monstrare volumus. Hoc itaque C. sensibiliter] simpliciter B. id] illud B. 23. Et . . . ponamus] Quod si posuerimus B. speculum] *ante speculum uerba* locus visus, a quo ad superficiem speculi *del.* C. 24. orizon] *corr. ex* orizontis A. 25. sicut]. Sit B. ponatur] ponantur C. 27. egreditur] egrediatur C. 28. *g*] *om.* K. per duas notas] *om.* C. 30. *gbe*] *gke* B *geb* C. 31. *e*] est C. *a g* lineam] lineam *ag* lineam *a* B. 32 sit] fit C. perueniat] peruenit B.

locum, ubi secat diametrum, nota *t*, et producamus lineam *tg* a nota *g* directe ad notam *i*. Et ponamus *ti* aequalem *th*. Et quia linea cadens supra centrum speculi diuidit lineam *ab* in duo media, tunc duae lineae *ab*, *de* sunt aequidistantes.

Si ergo posuerimus notam, quae diuidit corpus *uz* in duo media, supra notam *i*, et fiat *uz* aequidistans lineae *ab*, et uisus est, apud quem est nota *g*, et coniunxerimus notam *u* notae *a* et notam *z* notae *b*, non breuiabuntur ab eis neque pertransient [!] eas.

Si enim imaginauerimus, *ab* meguar [i. e. axem]*) moueri supra duas notas *a* et *b* et ferre lineam *uz* ad partem *de*, cooperiet figura *uzba* figuram *deba*, eo quod spatium *ti* aequatur longitudini *th*. Sed *uz* aequidistat *de*, et *ab* est communis, ergo linea *ua* est aequalis lineae *da*, et *zb* est aequalis *eb*, et angulus *auz* aequatur angulo *ade*, et *uzb* aequatur *deb*, et *dab* est aequalis *uab*, et residuum est aequale residuo.

Et similiter si uoluatur *ab* deferens *de*, donec cum ea perueniat ad partem *uz*, cooperiet *de*, *uz*. Radius ergo a *g* egrediens et perueniens ad *a* conuertetur ad notam *u*. Si enim lineam *ba* a duabus notis *a* et *b* secundum rectitudinem usque ad duas notas *k* et *l* produxerimus, diuidet angulum *uad* in duo media. Ergo angulus *kau* est aequalis angulo *kad*. Et diuidet etiam angulum *zbe* in duo media. Angulus igitur *lbz* aequatur angulo *lbe*. Sed angulus *kad* est aequalis angulo *gab*. Et angulus *lbe* est aequalis angulo *gba*; ergo angulus *kau* aequalis existit angulo *gab*. Et similiter angulus *lbz* aequatur angulo *gba*.

Duo ergo radii *ga*, *gb* conuertuntur a duabus notis *a* et *b* ad duas notas *u* et *z*. Quod si corpus *uz* appropinquet lineae *ab*, uidebimus duas notas *u* et *z* simul absque duabus finibus *a*, *b*. Et si corpus *uz* elongetur a loco suo retro, non uidebuntur umquam in speculo duae notae *u* et *z*, sed cum duabus notis *a* et *b* uidebuntur duae notae partis *uz* absque *u* et *z*, sicut duae notae *m* et *n*. Hoc tamen non esset possibile, nisi comprehensio singularium mediantibus speculis fieret per conuersionem radii ad uisibilia, quemadmodum praemisimus.

20.

Ex hoc autem, quod aer a uisu subito pati dicitur, oritur difficultas. Si enim uisus subito resoluit totum aerem, cui uidens occurrit, quare ergo, quod conuersum est, resoluitur, cum ipsum non obuiet uidenti, neque occurrat nisi speculo.

1. secat] secet C. 2. *i*] *l* B *j* K. Et ponamus] Exponamus K. aequalem] aequale B. 5. posuerimus] posuimus K. diuidit] diuidet B. in] et C. 7. coniunxerimus] coniuxerimus B. 8. pertransient] pertranseant B. 9. ab] ab in K *post ab uerbum* in *del.* P. meguar] megar C. 12. *zb*] *b* B. 13. *auz*] *auz* et K. *uzb*] *mzb* B. et *dab*] *om.* K et *adb* C. 17. enim] et B. lineam] linea B lia (=?) A. 21. *lbe*] *abe* K. 22. *gba*] *gab* A. 23. *lbz*] *lbgz* K *lbe* et B. *gba*] *gab* B. 25. uidebimus] uidemus K. 26. elongetur] elongatur C. 27. umquam] nunquam C. et] *om.* B. 29. sicut] sint KB. *m* et *n*] *n* et *m* B. esset] est B. 30. speculis] speculo C. 31. praemisimus] praemisimus. Et hoc est quod volumus C. 33. totum] *corr. ex* tantum C. 34. uidens] P *marg. m. 1. notat*: „uidens id est pars oculi, quae uidet". 35. obuiet] obtinet K.

*) mihwar مِحْوَر, cfr. Nallino, Albattani opus astronomicum I, 319.

Quidam autem extimant, quod hic aer resolutus, qui conuersus est, non resoluatur, nisi quia speculum, quod recipit resolutionem, resoluit ipsum, aut aer resolutus, qui obuiat speculo, resoluit ipsum.

Quod si hoc uerum est, tunc in tempore fit, postquam putant, quod aer conuersus resoluatur. Quod autem sensu percipitur, huius est contrarium, quemadmodum praediximus.

Huic uero difficultati accidit, quod aer resolutus, qui occurrit speculo, non resoluit radium conuersum a speculo. Si enim ita esset, tunc resolueret omnem aerem, a quo esset possibile ad hunc aerem rectam produci lineam. Quod autem sentitur est huius contrarium. Quod enim a speculo conuersum est, secundum rectas transit lineas proprie, scilicet secundum lineas peruenientes ad locum speculi resolutum.

Non ergo relinquitur, nisi ut resoluens aerem a speculo conuersum sit alteratio speculi recipientis resolutionem a uisu. Si ergo speculum subito recipit alterationem absque tempore, quemadmodum declarauimus, eo quod a uisu resoluta sine tempore resoluantur, tunc etiam a speculo patiens sine tempore patitur. Si enim, quando speculum patitur, patitur quod ab eo conuertitur, et speculum patitur, cum uidens ei occurrit. Ergo, quando uidens obuiat speculo, quod ab eo conuertitur, patitur. Passio igitur eius, quod conuertitur, fit sine tempore.

21.

Haec autem quaestio ualde etiam est difficilis, quae est: postquam nos non comprehendimus singularia mediantibus speculis nisi per conuersionem radii a speculis ad id, quod uidetur, quare ergo uidemus ipsum in speculo et non uidemus ea in locis suis, cum basis radii comprehendat ipsa, sicut comprehendit res absque medio?

Dico igitur, quod nos uidemus singularia in locis suis. Et hoc est, quia uidemus ea, et ea, in quibus sunt, et totum, quod est inter speculum et ipsa. Ea autem et loca eorum uidemus simul in rectitudine uisus, scilicet a uisu secundum rectam lineam non inclinata ab eius rectitudine. Rectitudo autem uisus est linea recta secans speculi superficiem. Quapropter putant, quod singulare in speculo uideatur.

---

1. Quidam] Quidem B Quia K. autem] enim K. extimant] extimans C. resolutus] *corr. ex* resolitus C. 2. resoluatur] resoluitur K. 4. fit] PAB sit KC. 5. sensu] AKC sensum PB. huius] hiis A. 7. difficultati] difficultari K. 8. esset] eet C. 9. rectam] recta C. 10. est] hoc B. enim] autem K. 13. relinquitur] reliquitur K. ut] *om.* K. 14. speculum] speculi C. 16. resoluantur] resoluatur C. tunc etiam a] AKC communia B tunc etiam P. patiens] faties B. 17. patitur. Si] paritur. Si A. patitur, patitur] *semel* KB. 18. conuertitur] *post conuertitur uerba* patitur passio igitur eius *del.* K. et speculum] *om.* C. occurrit] occurrat P. 19. conuertitur] conuertitur et speculum patitur cum uidens eis occurrit patitur B. igitur] nam igitur B. eius] erit C. 20. fit] sit K. 21. etiam] *om.* KB. quae est] quae K. 22. non] *om.* A. comprehendimus] comprehendemus K. 23. a speculis] a speculo B. id] illud B. 28. quia] quod B. et ea] et B. et] quod et B. 29. ipsa] ipsam KB. eorum] *om.* C. 31. secans] *om.* C. superficiem] superficie C. 32. uideatur] *om.* K.

Verbi gratia sit superficies speculi, a qua conuertitur radius, linea *ab*. Et sit uisus apud notam *g*. Et rectitudo uisus, scilicet perpendicularis radii patientis a uisu, linea *gde*. Et ponamus locum, ubi haec linea secat superficiem speculi, *d*. Et quod uidetur sit apud notam *u*.

Duo igitur anguli *adg*, *bdu* sunt aequales. Angulus autem *edb* est aequalis angulo *udb*, quemadmodum prius ostendimus.

Ergo *u* uidetur apud *e*. Aestimatur ergo, quod sit apud *d*, eo quod ipsa a uisu secundum unam rectitudinem consistant. Sed non est ita, quoniam comprehendimus singularia, quae sunt etiam super totam lineam *du*, ac si essent in speculo. Et unaquaeque rerum, quae sunt super lineam *du*, extimatur, quod in speculo comprehendatur supra notam *d*.

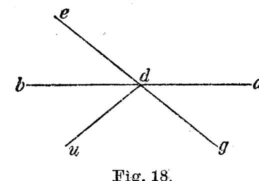


Fig. 18.

Essent ergo singularia multa aequalis magnitudinis simul in loco magnitudini unius eorum aequali. Ergo esset rerum plurium in magnitudine aequalium una earum collectioni in magnitudine aequalis. Hoc autem contrarium est et impossibile.

Non ergo uidentur singularia, quae sunt super lineam *du* in nota *d*, sed supra notas lineae *de*, quarum spatia a *d* sunt aequalia spatiis singularium, quae sunt super lineam *du* a *d*.

Singularia igitur in speculo non uidentur, sed speculum in locis eorum super lineam rectam a uisu egredientem secantem speculi superficiem, a qua radius conuertitur, supra notam, a qua conuertitur radius. Visus autem numquam comprehendit res nisi secundum rectas lineas et non secundum obliquas.

Obliquitas enim radii non est operatio corporea, quae sentiatur, sed est uirtualis. Non ergo sentitur, sed scitur. Scimus igitur, quod rem, quae per speculum uidetur, recipit uisus per conuersionem sui radii, et quod ipsa a uisu est secundum rectitudinem obliquitatis. Nos tamen non ita sentimus, sed secundum rectam lineam a uisu. Et illud est, quod demonstrare uoluimus.

22.

Postquam igitur huius declarationem praemisimus, inuestigemus, quare singularium lumen, cum uisui sunt propinqua,

---

1. Vèrbi] Exempli C. sit] et K. 2. apud] aū (= ante *siue* autem) C. scilicet] *om.* K. 4. *u*] *m* B. 5. *bdu*] *bav* C *dbn* B. Angulus] anguli C. 7. *u*] non B. Aestimatur] Extimatur B. 8. consistant] consistunt B. 9. etiam] et K. 12. extimatur] PAC estimatur K estimantur B. 13. notam] uota C toma B. 14. multa] vlta B. 15. simul] scilicet B. magnitudini] PA magnitudinis KBC. aequali] aequalis K. 16. esset] essent KC. in] in magni in C. aequalium] aequalium rerum B. collectioni] collectionum K collectuum (?) B. 18. super] supra B. *du*] *av* C. in nota] innota A in notam K. 19. quarum] Qrea (= ?) B. 21. uidentur] uidetur K. 27. igitur] PKB enim CA. quod] *om.* K. 28. recipit] conprehendit B *om.* C. radii] radii recipit C. 29. tamen] autem K. 30—31. illud . . . uoluimus] i. e. q. d. u. A. 30. demonstrare] monstrare C. 31. uoluimus] uolumus C. 32. igitur] *om.* B. 33. uisui] PAB uisu KC. sunt] sint A.

manifestius et clarius comprehenditur, quam cum a uisu elongatur, scilicet ab eius instrumento.

Dico igitur nobis necessarium fore, quod ex candelarum luminibus domos illuminantium uidemus, ad concedendum, quod candela una paruum locum fortius illuminet quam magnum.

Nos enim sic esse sensibiliter inuenimus, uidelicet quod candela una paruam domum fortius illuminat quam maiorem ea. Manifestum est igitur, quod uirtus unius corporis luminosi plus illuminat paruum corpus, a quo ipsa non egreditur, quam corpus eo maius, a quo ipsa non egreditur, et etiam secundum mensuram proportionis. Virtutis enim cuiusque luminosi corporis proportio ad ipsum totum est sicut proportio uirtutis partis corporis luminosi ad illam partem.

Verbi gratia sit corpus luminosum corpus *ab*. Dico igitur, quod uirtus corporis *ab* ad corpus *ab* est sicut proportio uirtutis partis eius ad ipsam partem. Quod sic probatur.

Fig. 20.

Non enim est possibile aliter esse. Quod si possibile est, tunc aut est maioris proportionis aut minoris.

Ponam itaque primum, ut sit maioris proportionis. Et ponam uirtutem *ab* lineam *gd* et ut *g* sit uirtus *a* et *d* uirtus *b*. Si ergo proportio *g* ad *a* est maior proportione *gd* ad *ab*, et proportio *d* ad *b* est maior proportione *gd* ad *ab*, tunc, cum nos coniungemus, erit proportio *gd* ad *ab* maior proportione *gd* ad *ab*.

Erunt ergo unius rei ad unam duae proportiones, quarum una altera maior erit. Quod quidem contrarium est et impossibile.

Et etiam si proportio *g* ad *a* est minor proportione *gd* ad *ab*, et proportio *d* ad *b* est minor proportione *gd* ad *ab*, tunc proportio *gd* ad *ab* est minor proportione *gd* ad *ab*. Hoc uero contrarium et etiam impossibile.

Proportio igitur *g* ad *a* est sicut proportio *gd* ad *ab* et non maior neque minor. Et hoc est, quod demonstrare uoluimus.

Ergo proportio corporis luminosi ad corpus luminosum semper est una et non fortior neque debilior, neque minor neque maior, postquam iam ostensum est necessario, quod praediximus.

Virtus autem data in rem datam unam semper facit impressionem et eandem, non maiorem neque minorem, non fortiorem neque debiliorem.

---

1. quam cum] quarum K. elongatur] elongantur P elongatur instrumentum B. 2. instrumento] nutrimento K. 4. concedendum, quod] intelligandum(!), quare B. 7. ea] e B. est] *om.* B. 8. quo ipsa] quo linea C. 9. eo] *ante eo uerbum* en *del.* K. et etiam] Sed B. 10. cuiusque] que *suprascr.* A *m. 1.* 15. est] *om.* K. uirtutis] *om.* K. 18. aut minoris] *suprascr.* A. 19. Ponam] *suprascr.* A. Et ponam] Et ponem B nam C. 21. *a*] *n* C. 21—22. *d* ... proportio] *om.* K. maior ... *ab*] *bis* P. 24. ergo] *om.* B. rei] r̄r̄ (= rerum) B. quarum] quorum B quare K. 26. est minor] maior K. 27. est] *om.* K. 27—28. tunc ... *ab*] *om.* C. 28. Hoc] licet C. uero] idem B. et etiam] est et B. 29. *g*] *om.* B. *ab*] *ba* B. 30. uoluimus] uolumus C. 31. Ergo proportio] Proportio igitur C. 32. et non fortior] *om.* K. 32—33. postquam ... est] *om.* C. 33. necessario] manifestum est B. quod praediximus] quod diximus B *om.* C. 35. non fortiorem] neque fortiorem B.

Verbi gratia sit uirtus data linea *a*, et res data linea *bg*, et res, quam *a* imprimit in *bg*, sit linea *b*. Dico igitur, quod *a* semper imprimit in lineam *bg* lineam *b* et non aliud. Quod sic probatur.

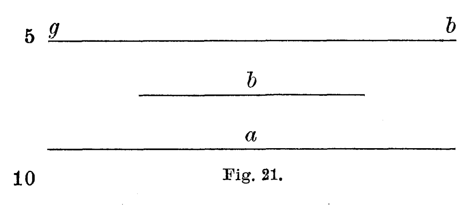


Fig. 21.

Si enim *a* quandoque imprimit in *bg* *b* et quandoque aliud quam *b*, tunc proportio uirtutis *a* ad *a* quandoque est maior et quandoque minor. Iam uero ostensum est, quod proportio uirtutis ad habentem uirtutem semper est una, non maior neque minor, non fortior neque debilior.

Est ergo una non una, quod est contrarium et impossibile. Quod ergo *a* imprimit in *bg*, semper est *b* et non aliud. Et illud est, quod demonstrare uoluimus.

Proportio igitur uirtutis imprimentis ad impressionem suam in corpus impressum semper necessario est una, postquam iam manifestum est, quod praemisimus.

Ergo proportio uirtutis in fortitudine et debilitate diuersae ad impressionem suam in corpus impressum necessario est diuersa.

Virtus data imprimit in corpus datum luminis impressionem fortiorem impressione uirtutis ea debilioris.

Verbi gratia ponam, ut habens uirtutem illuminantem sit apud notam *a*, et corpus illuminatum sit apud lineam *bg*. Virtus ergo illuminans *bg* illuminat etiam aerem, qui continetur a triangulo *abg*. Protraham autem lineam *de* aequidistantem lineae *bg*. Et ponam, ut radius *ab* cadat supra notam lineae *de*, quae est *d*, et radius *ag* cadat supra notam lineae *de*, quae est *e*. Et producam a duabus notis *b* et *g* duas perpendiculares super lineam *de*, quae sint perpendiculares *bu*, *zg*. Linea igitur *uz* aequalis est lineae *bg*. Et producam *au* et *az*. Et signabo locum, ubi *au* secat lineam *bg*, nota *h*, et locum, ubi *az* secat lineam *bg*, nota *t*.

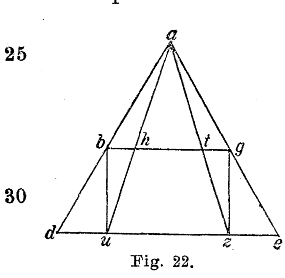


Fig. 22.

Dico igitur, quod lumen cadens super corpus, quod est in loco *bg*, fortius est lumine cadente supra illud corpus, cum uirtus imprimens lumen in eo prima uirtute est debilior. Quod sic probatur.

---

1. Verbi] Exempli C. 2. in lineam] lineam K. 3. *b*] *d* C. 4. quandoque] quando A. 5. *bg b*] *bgd* C *bg* B. quam *b*] quam *d* aliud quam *d* C. 6. ad *a*] ad *b* B. 7. et] *om.* B. 8. quod] quod est K. 10. non fortior] neque fortior B. 13. ergo *a*] ergo autem *corr. ex* autem ergo K. est *b*] *ed* C. 13—14. Et . . . uoluimus] *om.* C. Et i. e. q. d. u. A. 13. illud] hoc K. 16. necessario] in necessario C. 16—17. postquam . . . praemisimus] *om.* C. 17. praemisimus] *ante praemisimus uerbum* diximus *del.* A. 19. diuersa] diuersa. Et iam declarauimus, quod uolumus C. 20. Virtus] Virtus autem A. in] *om.* K. 21. uirtutis ea] uirtutis eo A *om.* B. debilioris] debilitatis B. 22. Verbi gratia] Causa exempli C. 23. sit] *om.* B. 25. Protraham] et protraham B. autem] enim K. 26. Et] *Post Et uerbum* illud *del.* P. ut] *marg. m. 1.* P. 27—28. quae . . . *de*] *om.* K. 27—28. et . . . *e*] *marg. m.* 1. A. 29. notis] *om.* K. super] supra AB. 30. Linea] et linea B. 31. est] *om.* K. *au*] *ab* C a non B. 35. supra] super B. illud] PB idem AKC. 36. eo] re C.

Virtus namque imprimens lumen in corpus *ab* [lege: *bg*] est, quae imprimit lumen in totum corpus, quod est in loco a triangulo *abg* comprehenso. Fines ergo radii, quem uirtus illuminans *bg* imprimit, sunt duae lineae *abd*, *age*. Ipsa ergo procedit in eo, quod a triangulo *abg* continetur. Debilior ergo ea procedit in eo, quod continetur ab *aht*. Fines igitur radii, quem imprimit uirtus illuminans *ht*, sunt duae lineae *ahu*, *atz*. Virtus ergo procedens in triangulo *auz* debilior existit uirtute procedente in triangulo *ade*. Non enim sua impressione ad duas lineas *abd*, *age* ualet peruenire.

Proportio autem uirtutis, quae peruenit ad duas notas *h* et *t*, ad impressionem suam in corpus, cuius fines continent duae notae *u* et *z*, diuersa est a proportione uirtutis, quae peruenit ad duas notas *b* et *g*, ad impressionem suam in corpus, cuius fines duae notae *u* et *z* continent. Et proportio uirtutis peruenientis ad *ht* ad impressionem suam in *uz* est sicut proportio uirtutis peruenientis ad *bg* ad impressionem suam in *uz*. Et cum permutauerimus, erit tunc proportio uirtutis peruenientis ad *ht* ad uirtutem peruenientem ad *bg* sicut impressio *ht* in *uz* ad impressionem *bg* in *uz*.

Iam uero est praemissum, quod lumen perueniens ad *ht* debilius existit lumine perueniente ad *bg*. Ergo impressio perueniens ad *ht* in *uz* debilior est impressione perueniente ad *bg* in *uz*. Et perueniens ad *bg* non imprimit in *uz*, nisi cum fuerit in loco *bg*, quoniam fines uirtutis continent ipsum.

In unum ergo corpus, cum corpori ipsum illuminanti propinquum existit, uirtutem fortiorem imprimit quam uirtus, quam imprimit in ipsum, cum ab eo elongatur. Corpus ergo, cum corpori ipsum illuminanti propinquum existit, magis luminosum est necessario, quam cum ab eo elongatur, postquam manifestum est, quod praediximus, scilicet, quod imprimit in ipsum uirtutem fortiorem. Et illud est, quod demonstrare uoluimus.

23.

Omnia, quae angulo sentiuntur, qui peruenit ex finibus luminis a uisu patientis, sentiuntur aequalia.

Verbi gratia ponam, ut uisus sit apud notam *a*, et fines luminis patientis a uisu sint duae lineae *ab*, *ag*. Dico igitur, quod omnes quantitates, quas duae lineae *ab*, *ag* circumdant, sunt aequales. Quod sic probatur.

Ponam enim, ut linea, quam duae notae *b* et *g* circumdant, sit quantitas *bg*, et sit quantitas altera, quam duae aliae notae duarum linearum

---

1. est, quae] et B. 2. comprehenso] comprehensa A. 3. quem] quod C. sunt] sint A. 4. *abd*, *age*] *ab*, *da*, *age* B. procedit] pro eodem C. 5. igitur] ergo A. 6. quem] quam C. ergo] quoque C. 7. procedente] *om.* B. 8. ualet] uol' C. 10—12. diuersa . . . continent] *om.* K. 14. uirtutis] uirtutis ad *bg* B. 17. existit] existat B. 18—19. Ergo . . . perueniente ad *bg*] *om.* C. 18. ad] in B. 20. fines uirtutis] *corr. ex* virtutis fines K virtutis fines B. 21. existit] existit, transit ad magis luminosum ex omiotelenta (?), ut patet A. 22. quam uirtus] quod uirtus B. 24. elongatur] elongetur B. 24—25. postquam . . . praediximus] *om.* C. 24. postquam] *om.* B. 26. fortiorem] *om.* K. Et . . . uoluimus] Et hoc uolumus declarare C. 27. angulo] angulos C in angulo B. peruenit] prouenit K. 29. Verbi gratia] gratia exempli C. 30. sint] sunt K. *ag*] *Post ag uerba* circumdante sunt aequales. Quod sic probatur *del.* C. 31. *ab*] quas duae *ab* B. 32. enim, ut] quod B. 33. notae] duae notae K.

ab, *ag* circumdant, quae sunt nota *d* lineae *ab* et nota *e* lineae *ag*, quae sit quantitas *de*. Visus itaque cernit duas notas *d*, *b* super lineam unam, scilicet lineam *ab*, et duas notas *e*, *g* super lineam unam, scilicet lineam *ag*.

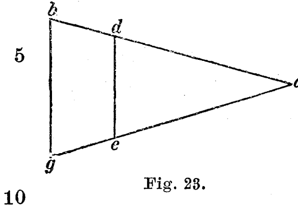


Fig. 23.

Non ergo uidet aliquem finium alicuius duarum quantitatum *bg*, *de* ab alio egredi, sed uidet fines extremitatum aequales. Ea uero, quorum unum aliud superare non uidetur, uidentur aequalia, quoniam unum aliud cooperire uidetur. Duae ergo lineae *de*, *bg* aequales uidentur. Una enim earum alteram cooperit, neque extremitates unius earum superant alterius extremitates. Et illud est, quod demonstrare uoluimus.

24.

Minor angulis, qui perueniunt ex finibus luminis patientis a uisu, sentit rem datam minorem, et maior sentit maiorem.

Verbi gratia ponam, ut uisus sit apud notam *a*, et ponam, ut angulus, qui peruenit ex finibus luminis patientis a uisu, sit angulus *bag*, et coniungam *bg*, et sit alter angulus contentus a duabus lineis *da*, *ag*. Et ponam, ut *d* sit lineae *bg*. Dico igitur, quod quantitas *dg* sentitur angulo *dag* minore minor, quam cum sentitur angulo *bag*. Quod sic probatur.

Protraham enim a nota *d* lineam aequidistantem lineae *ag* peruenientem ad lineam *ab*, quae sit linea *de*. Et producam ab *e* lineam aequidistantem lineae *bg* et peruenientem ad lineam *ag*, quae sit linea *eu*. Quadratum igitur *deug* aequidistantium est laterum. Latera ergo *dg* et *eu* sunt aequalia [Eucl. I, 34]. Notabo autem locum, ubi linea *ad* secat lineam *eu* nota *z*.

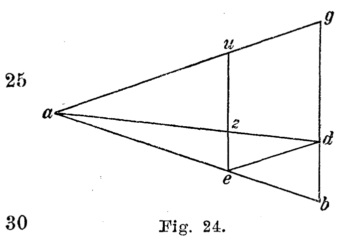


Fig. 24.

Ergo *zu* est pars *eu*; ergo ipsa sentitur minor *eu*. Quantitas autem *dg* sentitur aequalis quantitati *uz*, quoniam ab uno continetur angulo, scilicet angulo *dag* [23]. Sed *dg* secundum

---

1. quae sunt] *Ante uerba quae sunt uerba* sit quantitas *bg* *del.* K. sunt] sit B. nota] *corr. ex* notae P. *d* lineae] *de* B. *e*] *ze* K. 3. *ab*] *ab corr. ex ag m. 1. ut uidetur* A. 3—4. et . . . *ag*] *marg. m. 1.* A. 4. unam] *om.* C. 5. uidet] vidit C. finium] *om.* K. 8. uidetur] videmus C. 11—12. unius . . . extremitates] *om.* C. 11. superant] superat B. 12. Et . . . uoluimus] Et i. e. q. d. u. A Et hoc vol' C. uoluimus] uolumus B. 13. angulis] PK angulus ABCM. perueniunt] PAM proueniunt KC peruenit B. 14. minorem] in minorem M. et . . . maiorem] *om.* M. 16. peruenit] prouenit KC. luminis] lineis C. 18. sit] sint C. igitur] ergo C. *dg*] *om.* M. 19. minore] minor K. minor] minore A. cum] *om.* B. *bag*] *corr. ex bgg* M. 20. enim] autem M. lineam] linea M. *ag*] *Post ag uerbum* et *del.* A. 21—22. ad . . . quae] lineae B. 21. quae] quae linea M. sit] sit quantitas S *post sit uerbum* quantitas *del.* K. 23. linea] lineae(?) P. *eu*] *gn* B. 24. laterum] laterarum C. *dg*] dg ug M. 27. Ergo . . . *eu*] *om.* M. *zu*] *uz* A. *eu*] *om.* B. 28. *eu*] eī (= enim) K. 29. *uz*] *u* et M. continetur] continentur KS. 30—41, 1. scilicet . . . angulo] *om.* KS. 30. Sed *dg*] Sed *bg* B *om.* M.

quantitatem est *eu*, et *eu* sentitur angulo *abg* aequalis *bg*. Ergo *dg* minor sentitur angulo minore, qui est *dag*, et maior angulo maiore, qui est *bag*. Et illud est, quod demonstrare uoluimus.

Explicit liber de aspectu.

---

1. est] exit M. et] et cum B. *bg*] *b* B. Ergo *dg*] Ergo *bg* A *om.* K. 2. maior] minor M. 3. illud] hoc C. 3. quod . . . uoluimus] q. d. u. A quod monstrare volumus C propositum B. 4. Explicit . . . aspectu] PA Explicit liber de aspectibus K Explicit Jacobus Alkindi de aspectibus B finijt liber Jacobi Alchindi de aspectibus C Explicit liber de diuersis causis diuersitatis aspectus Jachobi Alchindi feliciter M *om.* S.

ALKINDI, DE ASPECTIBUS.

ERKLÄRUNG

VON

SEB. VOGL.

VORBEMERKUNG.

Jaʿqûb al Kindî[1]), „der Philosoph", lebte zur Zeit der größten Blüte des arabischen Chalifats unter Al Mamûn und Al Muʿtaṣim. Er wurde wahrscheinlich zu Kufâ als der Sohn des dortigen Statthalters geboren und machte seine Studien in Basra und Bagdad, in welch letzterer Stadt er als Schriftsteller verblieb. Von seiner Lebenszeit, die zwischen 800 und 873 fällt, ist sowohl das Jahr seiner Geburt wie das seines Todes dunkel, ähnlich wie bei seinem späteren abendländischen Schüler Roger Baco. Mit ihm teilt Alkindî auch das Los der Anfeindungen und der Beraubung seiner Bücher bis kurz vor seinem Tode, wozu seine freien Lehren, die vielfach den Anschauungen der orthodoxen Muslim widersprachen, die Veranlassung gegeben hatten. Die Biographien, die sich vielfach auf die Mitteilungen des Fihrist stützen, rühmen sein Wissen in der Arithmetik, Geometrie, Astronomie (Astrologie)[2]), Arzneikunde, Musik und in allen Fächern der Philosophie und heben hervor, daß

1) Über Leben und Schriften Alkindîs siehe: G. Flügel, Alk., genannt der Philos. d. Arab., ein Vorbild seiner Zeit. Lpz. 1857. — Suter, Die Math. u. Astron. d. Arab.; in Abh. z. Gesch. d. Math. X. Heft 1900. S. 23ff., 28. — Suter, Das Math.-Verz. im Fihrist; Ztschr. d. Math. 1892, 37. Suppl. S. 10ff. 46 Anm. 47. — Brockelmann, Gesch. d. arab. Lit. I 209. — E. Wiedemann, Erlanger Sitz.-Ber. 37. Bd. S. 403, 439. — Lackemacher, M. J. Gottfr., De Alkindî, Diss. Helmst. 1719. — Casiri, Bibl. Arab. Hisp. Escur. Madr. tom. I, S. 353ff. — Jacobi Bruckeri, Hist. Crit. Philos. Lpzg. 1743. S. 63—69. — O. Loth, Alkindî als Astrolog; Morgenländ. Forschungen. Lpzg. 1875. S. 263ff. — Martin Schreiner, Beiträge z. G. d. theol. Beweg. im Islam. Ztschr. d. Deutsch-Morgenl. Gesellsch. Bd. 52 S. 463ff. 513ff. — Schmölders, Essai sur les écoles philosophiques chez les Arabes. 1842. S. 130ff. — S. Munk, Dictionnaire des sciences philos. 1847. S. 442. — Des Gregorius Abulfaradsch kurze Geschichten der Dynastien v. G. L. Bauer. Lpz. 1783. 2. Bd. S. 17. — T. J. de Boer, Gesch. d. Philos. im Islam. Stuttg. 1901. S. 90ff. — Steinschneider, Die europäischen Übersetz. aus d. Arabischen bis Mitte des 17. Jahrh. Wien 1904. S. 78: 23; vgl. S. 31.

2) Alkindî trieb die Astrologie nicht als eine popularisierende Einkleidung der Astronomie, sondern um ihrer selbst willen. Er behandelte sie nach mathematischen Methoden und angeblichen physikalischen Gesetzen und polemisierte beständig gegen den vulgären Aberglauben. Näh. O. Loth, Alk. als Astrolog. l. c. Eine ähnliche Behandlung der Astrologie bei Rog. Baco.

er über die meisten dieser Wissenschaften berühmte und umfangreiche Schriften verfaßt habe. Wir haben hier im allgemeinen die Wissenschaften des Quadriviums und Triviums (septem artes liberales), das ist die schulmäßige Form, in welche schon die alexandrinischen Gelehrten die Schätze hellenistischer Weisheit enzyklopädisch zusammenfaßten. In der Tat ruht die wissenschaftliche Bildung Alkindîs vorzugsweise auf den griechischen Autoren. Von diesen kommen für seine naturwissenschaftlichen Arbeiten besonders Hippokrates, Platon, Aristoteles, Euklid, Autolykus, Ptolemaeus und Galenus in Betracht. Grundlage für alle Wissenschaften ist ihm die Mathematik[1]), mit der er aber oft nur ein Spiel mit Zahlen und Buchstaben treibt. Platon und Aristoteles sucht er in neuplatonischer Weise zu vereinigen.[2]) Seine Schriften sind teils Übersetzungen, Kommentare und Paraphrasen griechischer Originale, teils aber auch selbständige Arbeiten. Zu den letzteren gehört auch die vorliegende optische Schrift 'de aspectibus', durch welche Alkindî die artes doctrinales vervollständigen will.[3]) Aber auch sie fußt vielfach auf vorausgehenden Arbeiten, insbesondere auf der Optik Euklids, und zwar in der Rezension von Theon.[4]) Sie wurde von Gerhard von Cremona ins Latein übertragen[5]) und befindet sich, wie der Nachtrag zu der Textausgabe zeigt, in mehreren Bibliotheken.

Alkindî selbst bemerkt zu Anfang seiner Schrift, daß er zuerst zeigen wolle, wie die Strahlen[6]) zu unserer Wahrnehmung gelangen, und dann, wie sie in ihrem Gange den Gesetzen der Geometrie folgen.

In dieser Weise behandelt er:

I. Die Geradlinigkeit der Lichtstrahlen.
II. Den Sehvorgang ohne Spiegel.
III. Den Sehvorgang mittels Spiegels.
IV. Den Einfluß von Distanz und Sehwinkel auf das Sehen nebst optischen Täuschungen.

Die Optik Alkindîs bildete, wie z. B. eine Bemerkung von al Baihagî († 1106) bei der Besprechung des Lebens von Alkindî zeigt, selbst nach der Abfassung der großen Optik von Ibn al Haitam noch für viele die Quelle ihrer optischen Kenntnisse. [Vgl. E. Wiedemann in Eders Jahrb. 1911]. Die Bedeutung der Optik von Alkindî für die Scholastiker wird aus dem Folgenden sich ergeben.

Vorliegende Erklärung schließt sich eng an den lateinischen Text an, ohne jedoch auf eine Übersetzung Anspruch erheben zu wollen.

1) Ähnlich Roger Baco im op. mai. I 97 f.: math. est porta et clavis scientiarum; mit Berufung auf Alfârâbî 'de scientiis'. Vgl. E. Wiedemann, Beiträge XI 99 f.

2) Näh. bei T. J. de Boer l. c.

3) Unter scientia doctrinalis werden bei Cassiodor, Isidor und al Fârâbî die mathematischen Wissenschaften Arithmetik, Geometrie, Optik usw. verstanden. Näh. E. Wiedemann in Beitr. XI d. Erl. Sitzungsb. 1907 S. 79 u. 100. Vgl. Steinschneider, Die europ. Übers. l. c. S. 43.

4) Mit dem in den arabischen Bibliographien aufgeführten Werke Alkindîs: „Verbesserung der Optik Euklids" hat aber unsere Schrift 'de aspectibus' nichts zu tun. Vgl. E. Wiedemann in Beitr. XIII l. c. S. 247.

5) Vgl. unten S. 146 ff. 6) Radius dicitur linea luminosa. Witelo, Opt. l. II.

DAS BUCH DES JAKOB AL KINDI ÜBER DIE URSACHEN DER VERSCHIEDENHEIT DES SEHENS UND DIE GEOMETRISCHEN BEWEISE HIERZU.

I.

GERADLINIGKEIT DER LICHTSTRAHLEN.[1])

Die Geradlinigkeit der Lichtstrahlen suchte Heron folgendermaßen zu beweisen: Alles, was sich mit ununterbrochener Schnelligkeit bewegt, das bewegt sich in gerader Linie, d. h. auf dem kürzesten Wege. Dies zeigt sich besonders bei den Spiegeln, wo von allen auf sie fallenden Strahlen immer diejenigen am kürzesten sind, die unter gleichem Winkel reflektiert werden.[2]) Theon, der die Optik des Euklid rezensierte[3]), geht in der Einleitung zu seiner Rezension von den Schatten aus, welche die Körper werfen, und folgert daraus die Geradlinigkeit der Strahlen. Diese Angaben bei Theon sind es nun, die Alkindî in dem ersten Teile der vorliegenden Schrift in Wort und Bild näher ausführt Als Vorlage möchte vielleicht beiden eine Schrift gedient haben, die den Titel trägt: Aristarch, De magnitudinibus et distantiis Solis et Lunae[4]), in welcher sich dieselben Figuren finden wie hier bei unserem Araber. In derselben Weise wie in unserer Schrift wird die Geradlinigkeit der Strahlen dann von Ibn al Haiṭam[5]), Witelo[6]) und Roger Baco[7]) behandelt. Letzterer beruft sich ausdrücklich auf Alkindî, der folgendes ausführt:

Die Geradlinigkeit der Strahlen, die von einem leuchtenden Körper ausgehen, kennt man aus den Schatten[8]), welche die Körper werfen, sowie aus den Lichtstrahlen, die durch ein Fenster fallen.[9])

Kommt Licht von einem leuchtenden Körper, wie z. B. von der Sonne oder von einer brennenden Kerze[10]), auf einen Gegenstand, so sind die auf ihn treffenden Strahlen die Ursache, daß der Körper auf der dem Lichte zugewendeten Seite beleuchtet wird, während auf der abgewendeten Seite Schatten entsteht.

---

1) Dieser Abschnitt ist schon von E. Wiedemann besprochen in den Beiträgen l. c. Nr. XIII S. 245 ff.

2) Heron, der unter Strahlen hier zunächst die Sehstrahlen versteht, gibt hierfür einen mathematischen Beweis. Näh. Katoptr. Heronis (Nix u. Schmidt), Lpzg. 1901. Nr. II u. IV. S. 323 ff. Witelo V 5.

3) Heiberg, Eukl. op. omnia Bd. VII.

4) Herausgegeben von Frederico Commandino. Pisauri 1577.

5) Alhazeni, opticae thesaurus, Risner, Basel 1572, de crepusculis 2 ff.

6) Optik (Risner) II 26—30.

7) Bridges, op. mai. Rog. Bac. II 459; 494 f.

8) Über Schatten vgl. die Schrift über die Beschaffenheit der Schatten von Ibn al Haiṭam; E. Wiedemann, Beitr. XIII 226 ff.

9) Wenn von „Fenster" die Rede ist, so gilt dies in der allgemeinsten Bedeutung des Wortes als Öffnung, Lücke, Loch in der Wand für den Lichteinfall. Deutsch. Wörterb. der Gebr. Grimm, 3. Bd., S. 1519. Vgl. Curtze in Himmel u. Erde (Monatsschr. d. Urania), 1901, S. 226.

Bei Galenus heißt es: „Du wirst wohl, o Leser, gelegentlich gesehen haben, wie Sonnenstrahlen durch eine enge Öffnung fallen und weiter vorandringen, nirgends abgelenkt und gebogen, sondern ganz genau den gestreckten geradlinigen Weg verfolgend; so nun, stelle dir vor, sei der Weg der Sehstrahlen." Näh. bei Otto Katz, Die Augenheilkunde des Galen, Diss. Berlin 1890.

10) Candela; man kannte Talg- und Wachskerzen. Über Lampen s. E. Wiedemann in Beitr. XII l. c. S. 200 ff. Theon hat λύχνος, lucerna, Lampe mit Docht.

Diese Schatten sind entweder ebenso groß wie die leuchtenden Körper oder kleiner oder größer.[1])

1. Wir sehen, daß Körper, die einen Schatten werfen, der (an Durchmesser) gleich ist den schattengebenden Körpern, auch gleich sind den Lichtquellen.[2]) Die Grenzen dieser Schatten sind dann parallel, so weit sie sich auch erstrecken. Deshalb laufen sie nicht zusammen und die Breite (Dicke) des Schattens nimmt nicht ab und nicht zu, sondern der Schatten bleibt gleich in der Nähe wie in der Ferne.

In Fig. 1 sei der Kreis *abg* mit dem Durchmesser *ag* ein leuchtender Körper, Kreis *deu* mit dem Durchmesser *du* ein beleuchteter, und es sei $ag = du$. Dann nehmen wir den Schatten zwischen den zwei parallelen Linien *adz* und *guh* wahr. Wir finden nämlich, daß die Lote zwischen den Linien *dz* und *uh* gleich den beiden Linien *du* und *ag* sind. Der Schatten liegt also zwischen dem Bogen *deu* und den Linien *dz* und *uh*.

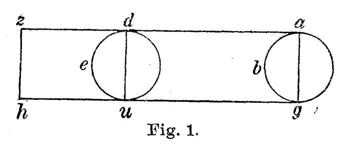


Fig. 1.

2. Schatten, die kleiner sind als die Körper, sehen wir, wenn die Lichtquellen größer sind als die schattengebenden Körper. In diesem Falle verengen sich die Schattengrenzen immer mehr, bis sie zu einer Spitze zusammenlaufen und die Form einer Pinie (eines Kegels) bilden.[3])

Es sei (Fig. 2) der leuchtende Körper vom Kreise *ab* umschlossen, der beleuchtete vom Kreise *gd*.[4]) Der Durchmesser *ab* sei größer als der Durchmesser *gd*. Dann beobachten wir Schatten zwischen den zwei nicht parallelen Linien *gu* und *dz*, und die zwei Winkel *ugd* und *zdg* sind zusammen kleiner als 2 Rechte. Werden also die zwei Linien *gu* und *dz* nach der einen Seite verlängert, so müssen sie sich in einem Punkte *e* schneiden. Denn errichtet man auf der Linie *de* im Punkte *z* ein Lot, so ist der Winkel *uze* ein Rechter und der Winkel *euz* wird kleiner als ein Rechter gefunden. Also müssen sich die verlängerten Linien *gu* und *dz* schneiden. Der Schatten liegt dann zwischen dem Bogen *gd* und den beiden Linien *ge* und *de* und bildet die Form einer Pinie.[5])

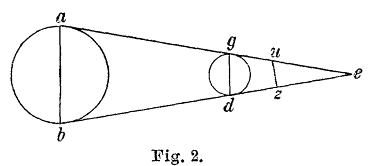


Fig. 2.

3. Wir finden auch Schatten, die größer sind als die Körper, und zwar dann, wenn die Lichtquellen kleiner sind als die beleuchteten Gegenstände. In diesem Falle erweitern sich die Grenzen der Schattenlinien um so mehr, je weiter sie verlängert werden.

Es sei (Fig. 3) der leuchtende Körper vom Kreise *ab* umschlossen, der beleuchtete vom Kreise *gd*; der Durchmesser *ab* sei kleiner als der Durchmesser *gd*. Dann sehen wir den Schatten zwischen zwei nicht parallelen Linien, und der Raum zwischen ihnen nimmt um so mehr zu, je weiter der Schatten sich erstreckt. Denn ziehen wir auf die Linie *dz* eine Senkrechte *uh*, die *ge* in *u* schneidet, so finden wir den Winkel *euh* größer als einen Rechten und die Summe der beiden Winkel *euh* und *zhu* ist größer als zwei Rechte. Also ist die Linie *ez* größer als die Linie *uh*.

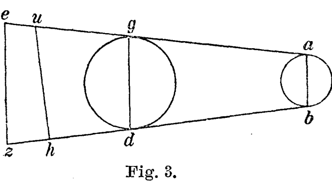


Fig. 3.

---

1) Die Lichtquellen werden meist kugelförmig (Kreis) gezeichnet mit Rücksicht auf die wichtigsten Leuchten Sonne und Mond.

2) Zu beachten ist, daß Alkindî keinen Kern- und Schlagschatten unterscheidet, sondern nur den Kernschatten erörtert.

3) Pinie ist Pinienzapfen, womit auch sonst der Erdschatten verglichen wird. Siehe E. Wiedemann, Beitr. XI S. 86. — Es ist zu beachten, daß durchweg von dem Kegel jenseits von *e* nicht die Rede ist.

4) *gd* ist sowohl die Polare für *c* als Durchmesser! 5) Siehe oben.

Je weiter *ge* und *dz* hinausgezogen werden, desto größer wird ihr Abstand. Der Schatten befindet sich dann zwischen den Bogen *gd* und den beiden Linien *eg* und *zd*.

Dies alles würde nicht der Fall sein, wenn die Strahlen der Lichtquelle nicht nach geraden Linien fortschritten.

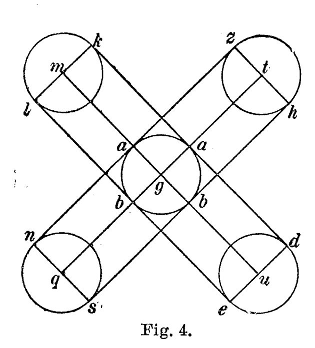


Fig. 4.

4. Ist ferner ein säulenförmiger Körper von mehreren Lichtern umgeben, so beobachten wir Schatten, die der Anzahl der Lichter entsprechen. Zieht man von der Mitte eines jeden Schattens aus eine Linie, die den Schatten halbiert und den schattengebenden Körper in der Mitte trifft, so geht diese Linie in ihrer Verlängerung auch durch die Mitte der Lichtquelle, was wieder nicht stattfände, wenn die Strahlen sich nicht geradlinig fortpflanzten.

Es sei in Fig. 4 durch den Kreis *ab* mit dem Mittelpunkt *g* der beleuchtete Körper dargestellt, durch den Kreis *de* mit dem Mittelpunkt *u* eine der Lichtquellen, eine andere sei der Kreis *zh* mit dem Mittelpunkte *t*. Dann bemerken wir Schatten auf der dem Lichte *de* abgekehrten Seite der Säule, und zwar zwischen den Linien *ak* und *bl*. Halbieren wir nun diesen Schatten durch die Linie, die *g* und *m* verbindet, so werden durch sie auch beleuchteter und leuchtender Körper in zwei Hälften geteilt, weil die Linie durch die Mittelpunkte derselben (*g* und *u*) hindurchgeht. Ähnliches gilt von den übrigen Lichtern und den Schatten, die sie verursachen.[1])

5. Wenn ein leuchtender und ein schattengebender Körper senkrecht auf dem Boden stehen und der leuchtende Körper höher ist als der beleuchtete, so finden wir, daß die Höhen der Körper und die Entfernungen ihrer Fußpunkte von dem Ende der Schattenlänge in Proportion zueinander stehen. Dies würde wiederum nicht stattfinden, wenn das Licht sich nicht geradlinig fortpflanzte.

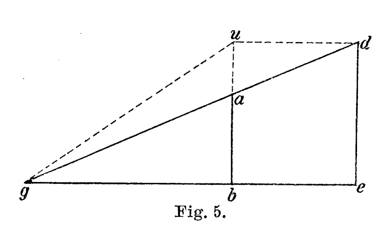


Fig. 5.

Z. B. Es sei Fig. 5 bei *ab* ein Körper, auf den Licht von einer Lichtquelle bei *de* fällt. Dann erstreckt sich der Schatten des Körpers *ab* bis zum Punkte *g* und wir finden, daß die Proportion besteht:

$$bg : ba = eg : de.$$

Da nun *ab* und *de* auf *eg* senkrecht stehen, so sind sie parallel und der Strahl, der von *d* über *a* nach *g* fällt, muß geradlinig sein. Wäre er nicht geradlinig, so müßte die Verbindungslinie *dag* einen Winkel bilden, z. B. *dug*, wodurch unser beobachtetes Verhältnis gestört würde.[2])

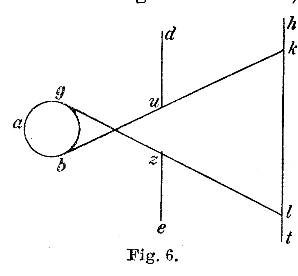


Fig. 6.

6. Einen noch deutlicheren Beweis für die Geradlinigkeit der Lichtstrahlen erhalten wir, wenn wir eine Tafel mit einer gleichmäßig ausgesägten Öffnung nehmen und vor die Mitte derselben ein Licht stellen, so daß eine Linie, die mitten durch die Lichtquelle geht, senkrecht auf der Öffnung der Tafel steht. Parallel zu dieser Tafel errichten wir eine zweite in einiger Entfernung. Nun fällt das Licht durch die Öffnung der ersten Tafel und projiziert sich auf die dahinter stehende. Zieht man jetzt von einem Punkte des Randes der Projektion

1) Dasselbe mit der nämlichen Figur bei Witelo II, 30. Alhazen hat dieses Beispiel nicht.

2) Dasselbe mit der nämlichen Figur bei Witelo II, 10. Vgl. Eukl. Optik, 18. Heiberg S. 28, Theon S. 176.

eine Gerade zu dem entsprechenden Punkte der Lichtquelle, so berührt sie den Rand des Loches in der Tafel, woraus folgt, daß das Licht sich geradlinig fortgepflanzt hat.[1])

Es umfasse (Fig. 6) der Kreis *abg* die Lichtquelle; *de* sei die Tafel mit der Öffnung *uz*. Die zweite Tafel sei *ht* und die Projektion des Lichtes *kl*. Zieht man vom Punkte *k* zum Punkte *u* eine Gerade, so berührt deren Verlängerung den Punkt *b* des Lichtes, welcher dem Punkte *u* schief gegenüberliegt. Desgleichen trifft die Verbindungslinie des Punktes *l* der Projektion mit *z* der Öffnung den schief gegenüberliegenden Punkt *g* der Lichtquelle. Und so ist es bei allen übrigen Punkten.

II.

DER SEHVORGANG.

Auch hier schließt sich Alkindî der Optik Euklids an und läßt vom Auge eine Kraft strahlenförmig ausgehen, die die angeblickten Dinge aufnimmt. Anklänge an seine Ausführungen finden sich auch in der Schrift des Tideus „über die Spiegel“.

7. Nachdem wir nun deutlich gezeigt haben, daß alle Strahlen nach geraden Linien ausgehen, müssen wir genauer darlegen, wie das Auge das Wahrnehmbare aufnimmt.

Ich sage also, es ist nicht anders möglich, als daß das Auge die Gegenstände entweder dadurch erfaßt, daß deren Formen zum Sehorgane eilen und sich dort abbilden, wie mehrere der Alten[2]) annahmen, oder daß vom Auge auf die Objekte eine Kraft ausgeht, durch die sie aufgenommen werden, oder daß beide Vorgänge zugleich stattfinden, oder daß die Formen sich in der Luft abbilden und eindrücken, die Luft sie wiederum im Auge abbildet und eindrückt und das Auge endlich mit seiner Kraft die mittels des Lichtes abgedrückten Formen erfaßt.

Wenn nun aber die Formen der wahrnehmbaren Dinge fortgingen, bis sie zum Auge gelangten und sich dort abbildeten, sei es daß beide Ursachen zugleich stattfänden, der eine Ausfluß also zum anderen wie zu seinem Genossenb eilte, oder daß die Gegenstände ihre Formen in die Luft eindrückten und a[3]) bildeten, so wäre es nötig, daß dann auch Kreise, die in derselben Oberfläche

1) Nach Euklids Optik, Einleitung der Rezension von Theon.

2) Gemeint sind die alten Atomisten, besonders Empedokles, nach dessen Sinnesphysiologie Ausströmungen von den Oberflächen der Dinge stattfinden und zu den Sinnesorganen gelangen.

3) Dies ist der Grundgedanke der Platonischen Synaugie. Plato meinte, die Götter hätten das Tageslicht in den Augen konzentriert und gleichsam verkörpert, weshalb auch das Auge die größte Ähnlichkeit mit der Sonne habe. Ein unaufhörlicher Strom von Feuer fließe während des ganzen Lebens aus den Augen heraus. Das Sehen geschehe nun dadurch, daß das Feuer der Augen die licht- und feuerartige Ausstrahlung der Gegenstände trifft. Beide Ausflüsse pflanzen sich geradlinig fort. Bei der Begegnung bleiben beide stehen, vereinigen sich und bilden eine Art Körper, der durch die feurige Ausstrahlung mit dem Gegenstande sowohl als mit der Seele in Verbindung steht. Die Vereinigung vollzieht sich nach dem Grundsatze, daß Gleiches wieder Gleiches anzieht oder jedes zu seinem Genossen eilt.

Roger Baco nimmt, wohl von dieser Theorie beeinflußt, zwei Strahlenkegel an, die sich an einem bestimmten Orte vereinigen, einen beseelten vom Auge und einen unbeseelten vom Gegenstande. Beide verwirren sich nicht, da sie nicht von derselben Art sind.

Näheres über die Sehtheorie bei den Alten siehe Hirschberg, Gesch. d. Augenheilk. S. 150; auch Nemesii Emesini libri περὶ φύσεως ἀνϑρώπου, vers. lat. Ed. Car. Holzinger, Lpzg., Prag 1887.

wie der Beobachter sich befinden, fortgingen und zum Beobachter eilten, und ganz so wie sie sind, gesehen würden.

Dies ist aber nicht der Fall. Es werden vielmehr die Kreise in keiner Weise gesehen, wenn sie sich in derselben Oberfläche wie der Schauende befinden. So bleibt denn nichts übrig, als daß vom Beobachter zu den angeblickten Dingen eine Kraft hervorgeht, mit der er sie aufnimmt.

Wenn nämlich jene Kraft hervorgeht und in der Luft einen geradlinigen Eindruck macht, so trifft sie die Kreise nicht, die mit dem beobachtenden Auge auf derselben Oberfläche sich befinden. Deshalb werden also die Kreise nicht wahrgenommen.[1])

8. Indem manche sahen, daß die Strahlen der Körper Farben mit sich führen und an den Grenzen der Körper abgeben[2]), schlossen sie, daß das Auge die Figuren der Dinge nur dadurch aufnehme, daß die Farben zum Auge ihren Lauf nehmen.

Die Figuren sind nämlich nach ihnen nichts als die Grenzen der Farben. Es existiert aber keine Ursache für eine derartige Bewegung der Farben in der Luft. Denn sonst behielte ein Glas oder Stein, der neben seiner Dichte Klarheit besitzt, seine rote oder andere Farbe nur so lange, bis sie vollends ausgestrahlt wäre. Die wahre Ursache ist vielmehr, daß die leuchtenden Körper auf die bewegte Luft wirken, sie verändern und ihr eine ähnliche Farbe mitteilen. In derselben Weise wirken rote oder andersfarbige Körper, wenn sie beleuchtet werden, verändernd auf die Luft ein und teilen ihr eine ähnliche Farbe mit.[3])

Es bleibt also auch in diesem Falle unsere Behauptung in Geltung, daß das Auge die Gegenstände nur dadurch wahrnimmt, daß eine Kraft von ihm ausgeht, welche die Luft in gerader Richtung beeinflußt, wenn zwischen Sehorgan und Gegenstand sich Licht befindet. Das Auge[4]) nimmt dann das wahr, worauf der von der Augenkraft beeinflußte Teil der Luft fällt. Denn es kommt manchmal vor, daß jemand seine eigene Gestalt vor sich sieht, nämlich dann, wenn die Kraft, die vom Auge ausgeht, zu schwach ist, um die Luft zu durchdringen. Die

---

1) Zeichnet man einen Kreisbogen auf eine Ebene und hält diese so vor das Auge, daß die Strahlen längs der Ebene hingleiten, also die Ebene nicht zu hoch und nicht zu nieder gehalten wird, so sieht das Auge nicht einen Kreisbogen, sondern eine gerade Linie. Dieser Fall ist ausführlich in der Einleitung zur Optik des Euklid von Theon besprochen; Heiberg S. 153; ebenso in der Eukl. Opt. selbst, Satz 22, S. 35 u. 181. Es sind drei Erklärungen dafür angegeben.

2) Aristoteles scheidet genau: Nicht die Grenze des Körpers ist die Farbe, sondern die Grenze des Durchsichtigen. Was also das Licht im Durchsichtigen, das ist die Farbe im begrenzten Durchsichtigen. Und wie das Licht im unbegrenzten Durchsichtigen durch Anwesenheit eines leuchtenden Körpers aus der akzidentellen Möglichkeit in die Wirklichkeit gerufen wird, so wird auch die Farbe erst wirklich durch die Anwesenheit eines Körpers. — Nach Ptolem. Opt. II S. 8 erkennt das Auge Figur und Größe eines Gegenstandes per terminos rei coloratae. Vgl. Anm. zu Nr. 12 der vorliegenden Arbeit. Weiter heißt es im II. Buche, Govi S. 11: „Die Farbe liegt der Oberfläche näher als alle anderen Merkmale und deshalb nannten die Alten die Oberfläche Farben . . .“ Wer unter den Alten gemeint ist, geht aus einer Schrift hervor mit dem Titel: De Heronis quae feruntur definitionibus, in welcher S. 7 gesagt wird: „Mente cogitari potest superficiem esse omnem umbram et omnem colorem, ex quo colores nominaverunt Pythagoraei superficies.“

3) Vgl. M. Meyerhof und C. Prüfer: Die Aristotel. Lehre vom Licht bei Hunain b. Isḥâq (in Vorbereitung). Die Luft ist ihrem Wesen nach kein gefärbtes Objekt, aber sie nimmt die Farben von Objekten auf. Wäre sie ein gefärbtes Objekt, so würde sie uns die Gegenstände nicht in der wahren Farbe vermitteln, sondern so, wie man sie durch ein gefärbtes Glas sieht. Die Luft besitzt nur virtuell Farbe; erst die Farbe der Gegenstände führen sie vom virtuellen in den aktuellen Zustand über. Die Luft nimmt aber die Farbe nur durch Vermittlung des Lichtes auf.

4) „Visus“. Dieses Wort, das in unserer Schrift viel gebraucht wird, bedeutet sowohl das Sinnesorgan, die Sinnesempfindung (sensus) und auch die Kraft, die das Empfinden bewerkstelligt (virtus sensibilis, Blick). Siehe Nemesii Emeseni libri *περὶ φύσεως ἀνθρώπου* S. 79 l. c.

Luft zwingt sie dann, umzukehren zum Körper des Beschauers selbst, wobei die Einzelheiten des eigenen Körpers wahrgenommen werden.[1])

9. Unter den Beweisen für diese Theorie ist ferner die Tatsache zu erwähnen, daß ein Beobachter, der z. B. eine Schrift betrachtet, die einzelnen Buchstaben nicht auf einmal, sondern nacheinander, also erst nach Verlauf von Zeit wahrnimmt.[2]) Der Grund hierfür liegt darin, daß die Sehkraft, die vom Auge geradlinig ausgeht, auf das, was das Auge sucht, gerichtet sein muß. Fällt sie darauf, dann erfaßt sie das Objekt sogleich.

Würden aber die Formen der Dinge zum Auge kommen, so müßten diejenigen, welche nur eine Handbreit oder eine Elle vom Auge entfernt sind und durch nichts in ihrem Gange behindert werden, merklich schneller herzueilen als diejenigen, deren Abstand so groß ist wie der des Fixsternhimmels.

Und fände die Aufnahme auf jegliche Weise und ohne Aufsuchung[3]) statt, so würden alle Gegenstände, die sich der Sehkraft durch Vermittlung von Luft und Licht und durch einen Körper gehindert darböten, auf einmal wahrgenommen; denn alle würden von selbst dem Auge zueilen. Dies widerspricht jedoch der Wirklichkeit, da wir von den Dingen nur eins nach dem andern wahrnehmen und dasjenige, das dem Sinnesorgane direkt gegenüberliegt, deutlicher erscheint. Je weiter aber ein Punkt von dieser direkten Richtung entfernt ist, desto undeutlicher wird er gesehen, bis er schließlich gar nicht mehr erfaßt wird. Der Beweis dafür liegt, wie schon gesagt, darin, daß, wenn wir die Augen unverrückt auf einen Buchstaben einer Schrift richten, dieser deutlich gesehen wird, während die darauffolgenden um so schwächer gesehen werden, je weiter sie von dem fixierten abstehen, bis man schließlich überhaupt nur etwas Schwarzes auf dem weißen Papier bemerkt und das Lesen unmöglich ist.

Diese Tatsache erklärt sich aber durch die Annahme, daß sich vom Auge aus eine Kraft in Form einer Pinie (Kegel) in die Luft eindrückt, wobei die Spitze beim Auge und die Basis auf dem Objekte sich befindet.[4]) Je mehr sich also diese Kraft vom Sehenden entfernt, desto mehr breitet sie sich aus, und je weiter die Strahlen von der Achse abliegen, desto schwächer sind sie, bis die Kraft endlich ganz aufhört.

10. Einen weiteren Beweis für die Kraftaussendung aus dem Auge folgert Alkindî mit Theon[5]) daraus, daß dem Auge ein Hohlraum zur Aufnahme der Formen, wie ihn das Ohr für den Schall besitzt, abgehe.

Alle Sinnesorgane, sagt er, sind vom Schöpfer zweckmäßig für ihre Funktion eingerichtet. Der Geruchssinn kann die feinen Teilchen aufnehmen, die von den riechenden Dingen ausströmen. Der äußere Teil des Ohres hat die Form einer Höhle, während der innere zusammengezogen ist, weil die Stimme nichts ist als eine Erschütterung der Luft, und die herankommende Luft auf das Gehörsorgan aufstößt. Ähnlich ist das Organ für den Geschmack zweckmäßig eingerichtet. Während aber alle diese Sinneswerkzeuge zur Aufnahme geeignet sind, damit sie das, was herankommt, festhalten, ist das Auge nicht so geschaffen, daß die ankommenden Spezies (Bilder) dort verweilen[6]), sondern es ist beweglich, damit es

1) Dasselbe bei Roger Baco op. mai. II 142 mit Berufung auf Aristoteles und Seneca.

2) Dieses Beispiel ist wieder der Rezension der Optik Euklids von Theon entnommen: Einleitung und prop. 1.

3) D. h. ohne daß das Auge sich darauf zu richten und zu suchen bräuchte.

4) Albertus Magnus nennt bei Erklärung der Sehpyramide Euklid und Alkindî. Vol. IX (Borgnet) parv. nat. p. I tr. I c. 5.

Auch in der Optik des Damianus (eigentlich Domninos von Larissa) ist der Strahlenkegel nicht gleichmäßig von Licht erfüllt. Mit dem axialen Strahl sehen wir am schärfsten; wenn wir etwas genau sehen wollen, richten wir die Achse darauf; in ihr liegt die größte Kraft. (Hirschberg, Gesch. d. Augenheilk. S. 167f.)

Das, was das Auge ausstrahlt, wird im allgemeinen als Licht gefaßt, das von außen in die Pupille eindringt und sich von da geradlinig und kegelartig wieder nach außen ergießt. 5) Einleitung zur Optik Euklids.

6) Theon betont noch, daß das Auge gerade infolge der Konvexität zum Aussenden geeignet sei.

sich überall hinwende und erfasse, was es wolle. Wenn wir daher irgendein Ding sehen wollen, so müssen wir ihm die Augen zukehren, sonst sehen wir nichts davon. Zum Gehör und zum Riechorgan hingegen gelangen Stimme und Gerüche, ob wir uns davon abkehren oder uns zu ihnen hinwenden.

11. Alkindî wendet sich nun der Behauptung Euklids zu, daß die Lichtstrahlen des kegelförmigen Bündels, das vom Auge ausgeht, nicht ununterbrochen den Raum erfüllen, sondern einen gewissen Abstand voneinander haben. Fällt demnach der Blick auf ein Objekt, so bleiben Lücken, auf die keine Sehstrahlen treffen. Das ist, wie Hirschberg bemerkt[1]), derselbe Gedanke, wie wenn wir heutzutage sagen, das Netzhautbild ist musivisch und besteht aus einzelnen Punkten, die den lichtauffangenden Endorganen (Zapfen oder Stäbchen) entsprechen. In Übereinstimmung damit steht auch der Satz, daß kein sichtbarer Gegenstand gleichzeitig ganz gesehen wird.[2]) Wir glauben aber das Ganze auf einmal zu sehen, da die Sehstrahlen rasch zur Seite bewegt werden. Offenbar, sagt Hirschberg, liegt diesen Erörterungen die Ungenauigkeit des exzentrischen Sehens und ihr Ausgleich durch Seitwärtsbewegung der Blickachse zugrunde. Theon erläutert die Lehre vom Fixierpunkt durch die Beispiele von der Nadel, die zu Boden fällt und erst bei zufälligem Auftreffen von Sehstrahlen wahrgenommen wird, und von der Schrift, deren Buchstaben nicht auf einmal gesehen werden, weil eben die Sehstrahlen unter sich Zwischenräume haben.

Auch dort, wo Euklid vom Sehwinkel als Maß für die Größe eines Gegenstandes spricht, ist zu beachten, daß er sich einen größeren Winkel mit mehr Strahlen erfüllt denkt als einen kleineren. So erklärt sich auch sein Beweis für das Vorhandensein eines kleinsten Unterscheidungswinkels oder vielmehr eines minimum visibile. In einem gewissen Abstande vom Auge ist ein Gegenstand K dann nicht mehr sichtbar, wenn er in den Zwischenraum zweier benachbarter Sehstrahlen (die mit der Entfernung immer weiter divergieren) hineinfällt. Dort wird nämlich kein vom Auge ausgehender Strahl auf K treffen.

Diese Ansicht von den Zwischenräumen unter den Sehstrahlen bekämpfte 500 Jahre nachher Ptolemaeus und kam der Wahrheit näher, indem er lehrte, daß der Blick die Größe eines Objektes dann erkennt, wenn die Durchmesser der Basis des Gegenstandes in einem wahrnehmbaren Verhältnis zu dem Abstande vom Auge stehen. Dies ist dann der Fall, wenn die Strahlen, die den Gegenstand einschließen, einen merklichen Winkel an der Spitze des Sehkegels bilden. Deshalb werden Größen, die in der Nähe noch wahrgenommen werden, in der Ferne nicht mehr gesehen, weil dann die Strahlen des Sehwinkels zu nahe zusammentreten und einen Winkel von nicht wahrnehmbarer Größe bilden. (Wir würden sagen: weil dann das Netzhautbild weniger als zwei Nervenstäbchen überdeckt.)

Da die Einwände des Ptolemaeus gegen die Zwischenräume auch von Alkindî wieder herangezogen werden, wollen wir sie näher angeben. Er schreibt:[3])

„Angenommen, daß ein größerer Winkel eines Sehkegels mehr Strahlen enthält als ein kleinerer, so nimmt doch das Sehorgan einen Gegenstand

1) Hirschberg, Gesch. d. Augenheilk. S. 153 f.
2) Euklid, Opt. (Heiberg) S. 2; Theon S. 156.
3) Opt. d. Ptolem. (Govi) II, S. 23 ff.

nicht deshalb größer wahr, weil eine größere Anzahl von Strahlen darauf fällt, wie manche glaubten, die die Ursache hierfür der Distanz zuschrieben. Diese meinten nämlich, daß ein und dieselbe Größe von fern gesehen deshalb kleiner erscheine, weil weniger Strahlen darauf fallen, ja daß ein Ding gar nicht gesehen wird, wenn keiner der Strahlen darauf trifft und es in die Zwischenräume der Strahlen hineinfällt (in defectum et minutionem radiorum).

Aber keine dieser Ansichten ist richtig. Denn nicht wegen der größeren oder geringeren Anzahl der Sehstrahlen wird ein Gegenstand größer oder kleiner gesehen, da eben die Zahl derselben nicht durch die Größe des Winkels bedingt ist, sondern von der Anhäufung und Ansammlung abhängt. Auch nicht die größere Menge von Licht im größeren Winkel und ebenso nicht der größere Durchmesser des Gegenstandes sind die wesentliche Ursache hierfür . . .

Ist nun ein Gegenstand sehr klein und wird er infolge seiner kleinen Dimensionen nicht gesehen, so geschieht dies nicht deshalb, weil er in eine Lücke der Sehstrahlen gefallen ist. Man muß nämlich einsehen, daß der Sehstrahl, soweit es sich um die Sinneswahrnehmung handelt, von Natur aus notwendig zusammenhängend und nicht zerstreut ist. Fassen wir aber die Sehstrahlen mathematisch als gerade Linien auf, so werden hinlänglich große Gegenstände, die sich in einer Entfernung befinden, in welcher kleine Dinge infolge ihrer geringen Ausdehnung nicht mehr gesehen werden, deutlich erscheinen, was nicht stattfinden würde, wenn die Sehstrahlen an jener Stelle sich verminderten und zerstreuten. Zugleich würde aber dort etwas Großes und etwas Kleines in ähnlicher Weise erscheinen. Denn was von den Strahlen auf die Durchmesser der ganzen Basis fällt, sind einzelne Strahlen, und was von jedem einzelnen Strahl erfaßt wird, ist ein Punkt, und zwischen diesen Punkten befinden sich Abstände von bestimmter Größe. Es kann aber das, was auf diesen Abständen liegt, nicht gesehen werden, weil kein Sehstrahl darauf fällt. Auch die Punkte können nicht gesehen werden, da sie keine Quantität haben und von keinem Winkel umfaßt werden. So müßte also jeder Gegenstand unsichtbar sein. Wollte aber jemand annehmen, daß die einen Strahlen zerstreut, die anderen in derselben Entfernung zusammenhängend seien, so würde diese Ansicht nur neue Irrtümer und Zweifel hervorrufen . . .“

Kehren wir nun zu Alkindî zurück, der ebenfalls gegen die Annahme von Zwischenräumen unter den Sehstrahlen Widerspruch erhebt, wie folgt:

a) Von den Alten[1]) nahmen manche an, daß vom blickenden Auge mehrere Strahlen nach geraden Linien ausgehen, die unter sich Zwischenräume haben. Diese Lehre trifft jedoch auf die Schwierigkeit, daß nach der Ansicht ihres Autors und anderer scharfsinniger Gelehrter die Linie eine Größe ist, die nur eine Längenausdehnung, aber keine Breite hat.[2]) Nun ist aber der Strahl der Eindruck der

---

1) Vor allen die Optik des Euklid; dann auch die Optik des sogenannten Damianus c. 6.

2) „Linea est longitudo sine latitudine.“ Eukl. Elem. I def. 2. Die Definitionen von Punkt, Linie, Fläche usw. finden sich eingehender erörtert in der Schrift: De Heronis, quae feruntur definitionibus, auctore Godefredo Friedlein. Romae 1871. Ähnlich bei einer Reihe arabischer Autoren, die E. Wiedemann in Beitr. XIV Bd. 40 (1908) angibt. Vgl. Optik des Alhazen IV 16; Witelo II 3; V 6; Cardanus rühmt eine Schrift von Alkindî selbst: libellus de Ratione sex

leuchtenden Körper auf die dunklen und hat seine Bezeichnung nach dem Lichte wegen der Umwandlung der Akzidentien in den Körpern, die den Eindruck aufnehmen.[1]) Der Eindruck bildet also mit dem, worin er stattfindet, zugleich den Strahl. Da nun der den Eindruck verursachende Körper drei Dimensionen hat (Länge, Breite und Tiefe), so könnten auch die Strahlen nicht (mathematische) gerade Linien mit Zwischenräumen sein. Denn würde der Strahl nach Linien mit Zwischenräumen verlaufen, so müßte jeder Strahl der Breite entbehren, da eben die Linie keine Breite hat. Was aber der Breite entbehrt, wird nicht wahrgenommen; und alles, was wahrgenommen wird, wird zugleich mit der Breitenausdehnung gesehen. Alles nämlich, was wahrgenommen wird, hat Breite oder wird in dem, was Breite hat, überbracht; die Linie aber hat keine Breite. Es wird demnach die Linie nicht gesehen und auch nicht, daß sie irgendwohin gelangt, wenn dies der Fall sein sollte.

Der Strahl wird also nicht gesehen und doch gesehen, was sich widerspricht und unmöglich ist.[2])

b) Nehmen wir an, der Strahl habe nur eine Längendimension. Dann sind auch die Enden desselben nur unteilbare Punkte.[3]) Es erfassen also beim Sehen die Enden des Strahles nur einen unteilbaren Punkt des Objektes. Ein unteilbarer Punkt, der keine Länge und Breite hat, kann aber nicht wahrgenommen werden. Die Erfahrung lehrt aber, daß einzelne Punkte wahrgenommen werden.[4])

c) Hängen außerdem die Teile des Auges zusammen und bestehen sie aus einer Substanz, so ist die Sehkraft im ganzen Instrumente und das eindrückende Werkzeug ist ein einheitliches Ganzes, das keine Zwischenräume hat. Es gibt demnach keinen Grund, aus dem man auf einen Strahlenkegel mit Zwischenräumen schließen müßte. Denn sonst würde ein Teil in der Luft einen Strahl eindrücken, ein anderer nicht, und es wären die Kräfte der verschiedenen Teile verschieden. Ist aber die Kraft nur eine einzige, so hat sie auch nur eine einzige Wirkung. Also findet nur ein einziger Eindruck statt und nicht zwei, von denen der eine eine Strahlenlinie verursacht, der andere nicht.

d) Wollte aber jemand annehmen, daß die Ursache für die Zwischenräume in der Luft liege, und zwar in der Weise, daß die Luft mit zwei verschiedenen Substanzen erfüllt sei, von denen die eine Licht aufnehme, die andere nicht, so müßte man auch glauben, daß die Luft ganz mit verschiedenen Linien erfüllt sei, die unbeweglich feststehen und nicht durcheinander fließen, von denen das Ende einer jeden auf einen Punkt fixiert sei, und daß dieser Punkt zum Mittelpunkt des Auges des Beobachters hinziele, bis er es erreicht, wie das Eisen nach dem Magnetstein hinstrebt. Dies wäre aber doch eine ganz törichte Annahme.

e) Aber selbst dann, wenn wir den Augenstrahlen Breite zuerkennen, werden die Zwischenräume nicht erklärt. Schaut jemand in ein Buch, so sieht er verschiedene Buchstaben, und zwischen ihnen befinden sich an mehreren Stellen

---

quantitatum. Aus dem Verzeichnis der Schriften Alkindîs ist jedoch nicht zu ersehen, welche damit gemeint sein könnte. (De subtilitate lib. XVI.) Vgl. Heiberg, Mathem. zu Aristot. 7 ff.

1) Das Licht wird im Mittelalter als eine reale Eigenschaft oder akzidentelle Form des Durchsichtigen erklärt. Erst bei Anwesenheit eines leuchtenden Körpers geht das Diaphanum von der akzidentellen Potenz in den Akt des Lichtes über, die Teile des Durchsichtigen, die an sich schon disponiert sind, werden in einen anderen Zustand übergeführt. Dabei ist ein leuchtender Körper selbst wieder eine Zusammendrängung von Teilen des Durchsichtigen, das an sich wirklich hell ist.

2) Roger Baco kommt im op. mai. II 459 auf die Ansicht Alkindîs über die Natur der Strahlen zu sprechen und zeigt, wie die Spezies, trotzdem sie drei Dimensionen und materielle Natur hat, dennoch kein Körper ist. Vgl. Vogl, Die Physik Roger Bacos, S. 43. Alhazen, Opt. IV 16: Licht und Farben werden nach physikalischen Linien reflektiert, die eine bestimmte, wenn auch sehr kleine Breite haben.

3) „Punctum est, cuius pars nulla; lineae autem termini puncta." Euklid, Elem. I def. 1 u. 3.

4) Dasselbe Ptolem. Opt. II (Govi) S. 25.

Zwischenräume. Dabei sieht er das nicht, was in diesen Intervallen liegt. Dies erklärt man nun daraus, daß kein Strahl dorthin fällt. In Wirklichkeit ist es aber anders. Man sieht nämlich, wie schon gesagt, nur eine einzige Stelle genau[1]), und zwar diejenige, welche in gerader Linie mit dem Mittelpunkte des Auges liegt. Je weiter eine Stelle davon entfernt ist, desto undeutlicher erscheint sie, bis nur mehr etwas Schwarzes auf dem Weißen sich zeigt.

f) Trotz dieser Einwände ist es aber nicht nötig die Lehre jenes Autors als irrtümlich zu erklären. Wir kennen ja seine Tüchtigkeit in dieser Wissenschaft und sind überzeugt, daß auch er unsere angeführten Gründe kannte. Deshalb wollen wir seinen Lehren einen guten Sinn unterlegen, indem wir sie so auffassen, als trete vom Auge der Sehstrahl nach unzähligen geraden Linien mit Zwischenräumen aus, und zwar in der Gestalt eines Kegels, der von der Sehkraft in die Luft eingedrückt wird und sich geradlinig fortpflanzt. Ein Bild hierfür könnten wir uns an einem Senfkörnlein machen, durch das nach allen Richtungen gerade Linien in unbeschränkter Zahl gezogen werden können. Und weil die Zahl unbeschränkt ist, so müssen unter ihnen Zwischenräume sein. Denn wären keine Zwischenräume, so stünde die Zahl der Linien fest.

g) Einer glaubte jenen Autor gegen obige Einwände schützen zu können, indem er sagte, daß von allen Strahlen, unter denen Zwischenräume bestehen, nur einer die Sehobjekte erfasse. Damit verwickelt er ihn aber in noch größere Schwierigkeiten. Denn er selbst und alle, die der Lehre von den Zwischenräumen zuneigen, geben zu, daß die Augenstrahlen nicht wahrgenommen werden. Das aber, was man nicht wahrnimmt, kann man nur aus seinen Wirkungen erkennen, und diese bestehen hier in den Eindrücken an der Stelle, wo der Strahl seine Kraft dazu hat. Da nun aber diesen Strahlen keine Kraft zur Wirkung innewohnen soll, so können sie sich in keiner Weise kundgeben. Wozu also soll vom Auge ein Kegel ausgehen, wenn nur eine einzige Strahlenlinie die Wahrnehmung vermittelt? Man nehme entweder nur einen einzigen Strahl an oder bleibe beim Strahlenkegel, da zweifelsohne das Sinnesorgan die Sehstrahlen kegelförmig enthält und auch nach Kegelform wirkt und nicht nach der Figur einer Säule, eines Würfels, einer Kugel usw. verläuft.

h) Übrigens ergibt sich aus ihren eigenen Schriften ein Widerspruch. Sie sagen nämlich, daß der eine Strahl, der nach ihnen die Objekte erfassen soll, die Achse eines Kegels ist, der vom Auge ausgeht und senkrecht auf dem Mittelpunkte des Kreises steht, der die Basis des Kegels bildet. Nun behaupten sie aber an einer anderen Stelle, gleich als ob sie ihre Theorie wieder vergessen hätten, daß das, was im Mittelpunkte dieses Kreises sich befindet, deutlich gesehen wird und das, was diesem Mittelpunkt benachbart ist, genauer als das, was weiter von ihm entfernt liegt. Wenn nun aber der wirksame Strahl die einzige Lotlinie ist, dann kann man auch nichts anderes sehen als den Mittelpunkt der Kegelbasis; denn wie sie selbst vorher behaupteten, wird nur das, worauf der Strahl fällt, vom Auge wahrgenommen. Werden auch Stellen neben dem Mittelpunkt des Grundkreises erfaßt, so kann der Strahl, der die Gegenstände aufnimmt, nicht eine einzige Linie sein. Nach den Worten jener geschähe also die Aufnahme der Objekte durch einen einzigen und zugleich durch mehrere Strahlen, und es würden eine einzige und zugleich mehrere Stellen erfaßt, was einen Widerspruch in sich schließt.

12. Damit glaubten jene ihre Theorie erledigt zu haben, indem sie nur noch einen Grund geltend machten, nämlich daß jeder Strahl, der nicht in den Mittelpunkt der Sehkegelbasis trifft, als Hypotenuse länger sei als der Achsenstrahl und demnach einen Punkt erfasse, der weiter vom Auge entfernt ist als der genannte Mittelpunkt. Je weiter aber ein Punkt vom Auge abstehe, desto schwächer sei der Strahl, der auf ihn fällt[2]) und desto mehr werde der Punkt selbst verdunkelt gesehen, gleich als ob es einen Satz gäbe, der sagt: Wenn ein Strahl

1) Ebenso Ptolem. II S. 13f. — Euklid (Heiberg S. 4f.) und Rezension von Theon S. 156: Nur infolge der Schnelligkeit der vorübereilenden Strahlen meint man, daß das Auge die Gegenstände auf einmal erfaßt.

2) Ptolemaeus lehrt in seiner Optik II S. 13: Das, was eine große Distanz vom Auge hat, wird deshalb weniger gesehen, weil die Augenstrahlen bei ihrem

sich entfernt, so erfaßt er schwächer, und wenn er auf die Nähe geht, deutlicher. Einen solchen gibt es aber schlechthin nicht.

Denn bei allen gründlichen Kennern der Natur ist bekannt, daß das, was vom Auge ohne Breitendimension erfaßt wird, die Farbe ist; die Figuren aber sind die Grenzen der Farben.[1]) Je weiter nun eine Farbe vom Auge entfernt ist, desto schwächer wird sie vom Sehstrahl erfaßt und erscheint um so dunkler. Es sei z. B. das Auge (Fig. 7) bei *a*, die Basis des Sehstrahlenkegels sei *bg*, das Zentrum des Grundkreises *d* und die Achse des Kegels, der von den Strahlen *ab* und *ag* eingeschlossen ist, sei *ad*. Nun bezeichnen wir auf *ab* einen Punkt *e*, so daß *ae* so groß ist wie ein Teil der Linie *ad*. Dann müßte ein farbiger Gegenstand, der in *d* sich befindet, dunkler erscheinen als in *e*. Jene sagten aber schon vorher, daß das, was längs der Achse gesehen wird, deutlicher erscheint als das, was außerhalb derselben liegt. Ja, während das Auge Dinge, die nur um eine Elle von der Achsenrichtung des Sehkegels abliegen, nicht mehr sieht, dringt es in dieser Richtung bis zum Fixsternhimmel; um so klarer muß es in dieser Richtung das sehen, was viel näher liegt. Die Länge des Strahles allein kann es demnach nicht ausmachen, daß eine entfernte Farbe dunkler erscheint als eine nahe. Es sind vielmehr hierbei noch zwei andere Ursachen im Spiele:

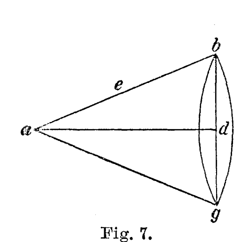


Fig. 7.

Die erste ist das Licht.[2])

Ohne Licht wird keine Farbe wahrgenommen.[3]) Ist ein starkes Licht vorhanden, so ist die Farbe deutlicher als bei einem schwachen Lichte.[4])

Die zweite Ursache liegt in der Kraft des Blickes.[5])

Gange in die Ferne etwas von dem Schwarzen der Luft, durch die sie hindurchgehen, mit sich führen, weshalb auch entfernte Gegenstände luftartig (aereae) und wie unter einem Schleier gesehen werden. Das, was mittels des Achsenstrahles gesehen wird, wird deutlicher gesehen als das, was man mit den Seitenstrahlen erblickt, weil diese mehr der Wirksamkeit beraubt sind.

1) Nach Ptolemaeus Opt. II S. 8ff. werden die Farben 'primo' gesehen, da abgesehen vom Lichte nichts gesehen wird, das nicht Farbe hat. Größe, Lage und Figur werden durch die beleuchteten Oberflächen der Gegenstände erkannt, die die Farben berühren. Die erhellten Farben erkennt das Auge „simpliciter", alle übrigen Merkmale aber durch die Farben, aber nicht insofern sie Farbe, sondern nur insofern sie Grenzen haben. Die Figuren und Größen erkennt das Auge „per terminos rei coloratae". S. 11: Die Farbe liegt der Oberfläche näher als alle anderen Merkmale und deshalb nannten die Alten die Oberflächen „Farben". Vgl. Anm. in Nr. 8 dieser Arbeit. Von den (in der dort genannten Schrift des Heron) angegebenen Definitionen der Oberfläche lautet die erste: „Eine Oberfläche ist das, was nur Längen- und Breitenausdehnung hat." Dasselbe bei Euklid, Elem. I, def. 4. Wenn also gesagt wird, die Farbe werde ohne Breite wahrgenommen, so bedeutet das, daß sie ohne eine Oberfläche wahrgenommen werden kann, wie dies auch beim Licht der Fall ist. Nur braucht die Farbe, die nach Ptolemaeus nicht bloß ein accidens ist, sondern eigene Substanz hat, selbst Licht und eine gewisse Dichte. Deshalb können sich durch die Farben auch Täuschungen ergeben, die von der Oberfläche ganz unabhängig sind. Lebhafte Farbe wirkt im Auge nach und modifiziert die Farbenempfindung, die durch andere Gegenstände verursacht wird usw.

2) Vgl. Ptolem. Optik II S. 13. 3) Ptolem. l. c. S. 8. Vgl. Meyerhofer und Prüfer: Die aristotelische Lehre vom Licht bei Hunain al Ishâq (in Vorbereitung): „Licht und Farbe vervollkommnen dis Luft Aber die Luft nimmt die Farbe nur durch Vermittlung des Lichtes auf, indem dieses die Luft zuerst leuchtend macht; wenn sie dann leuchtend ist, nimmt sie die Farbe auf."

4) Erst später folgt der Beweis, daß die Helligkeit mit der Entfernung eines Gegenstandes abnimmt.

5) Ptolem. l. c. S. 12f.: „Ein Ding wird besser gesehen, wenn auf dasselbe mehr Helligkeit (claritas) des Auges fällt."

Je kräftiger der Blick ist, desto deutlicher sieht er die Farbe. Die Kraft des Blickes wird aber nach der Wirkung beurteilt, insofern diese mehr oder weniger vollkommen ist. Wie nun allgemein bekannt, besteht die Wirkung des Blickes (visus) darin, daß der Sehstrahl den Teil, der dem Gegenstande begegnet, verändert. Derjenige Blick also, der eine vollkommenere Veränderung herbeiführt, erfaßt auch das Sehobjekt kräftiger. Der Körper, auf den demnach ein stärkerer Strahl fällt, wird deutlicher gesehen als der, auf den ein schwacher fällt.

Nun aber fällt gerade aus der Mitte des Blickes ein stärkerer Sehstrahl, das ist die Achse des Sehkegels, und darum wird das, worauf die Achse gerichtet ist, deutlich gesehen, während jeder andere Strahl schwächer ist und das Sehen um so undeutlicher vermittelt, je weiter er von der Achse absteht.

13. Bevor wir jedoch diese Tatsache näher begründen, wollen wir zeigen, daß die leuchtenden Körper durch ihre Kraft die sie umgebende Luft beeinflussen und sie verändern, nämlich alles erhellen, so weit sie leuchten können.

Ein leuchtender Körper erhellt einen dunklen dadurch, daß er die Luft bis zu ihm hin verändert, oder wie jene annahmen dadurch, daß vom leuchtenden Körper Strahlenlinien mit Zwischenräumen ausgehen, die sich auf den Körper erstrecken, den sie beleuchten. Für den Fall, daß solche Strahlenlinien ausgehen, sind nun verschiedene Möglichkeiten gegeben.

Wir denken uns den leuchtenden Körper als Kugel. Dann frägt es sich, ob die Strahlen vom Mittelpunkt derselben ausgehen und demnach mit der Oberfläche gleiche Winkel bilden. Oder ob sie vom Zentrum nicht ausgehen und also mit der Kugelfläche auch keine gleichen Winkel bilden. Im letzteren Falle könnten die Strahlen unter sich noch parallel oder nicht parallel sein. Wir werden zeigen, daß keiner dieser Fälle möglich ist.[1]

Vor allem kann das Licht nicht vom Mittelpunkt der leuchtenden Kugel ausgehen.[2]

Es sei in Fig. 8 *ab* der leuchtende Körper, *g* dessen Mittelpunkt, *de* der beleuchtete Körper.

Zwei von *g* ausgehende Linien *gdu* und *gez* berühren den Körper in *d* und *e*. Dann hat der Teil *dhe* Licht, der Teil *udtez*, wohin kein Strahl fällt, ist im Schatten. Da nun die Linien *de* und *uz* parallel sind, so ist das Dreieck *ugz* ähnlich dem Dreieck *dge*. Also gilt die Proportion $uz : ug = de : dg$. Da aber $ug > dg$, so muß auch $uz > de$ sein.

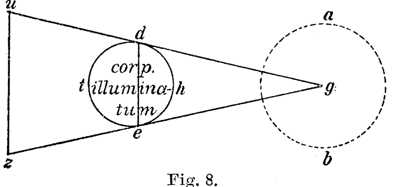


Fig. 8.

Es müßte sich also in diesem Falle der Schatten eines jeden Körpers mit der Entfernung von der Lichtquelle bis ins Unendliche erweitern, ganz gleich, ob der leuchtende Körper größer, kleiner oder gleich dem beleuchteten ist. Die Erfahrung lehrt aber, wie schon anfangs gesagt, daß sich die Schatten wie ein Pinienzapfen (Kegel) immer mehr verengen, wenn der leuchtende Körper größer als der beleuchtete ist, und daß die Schattengrenzen parallel sind, wenn leuchtender und beleuchteter Körper gleich groß sind. Nur wenn der leuchtende Körper kleiner ist als der beleuchtete, divergieren die Grenzen des Schattens.

Es ist also nicht möglich, daß das vom leuchtenden Körper ausgehende Licht die Oberfläche der Lichtkugel nach gleichen Winkeln schneidet.

Es ist aber auch nicht möglich, daß die Strahlen parallel[3]) von der Lichtquelle ausgehen.

---

1) Roger Baco behandelt diese Frage in derselben Weise und mit Berufung auf Alkindî 'de aspectibus' op. mai. II 494ff.

2) Witelo Opt. II 17: Es ist unmöglich, daß die Strahlen nur vom Zentrum des leuchtenden Körpers ausgehen. Sie müssen von jedem Punkte der Oberfläche der Lichtquelle sich ergießen.

3) Alhazen läßt die Sonnenstrahlen parallel auf eine Brennkugel fallen. Näh. E. Wiedemann in den Annalen d. Phys. 1879 S. 679ff. u. 1890 S. 565ff. Beitr. XIII in d. Sitz.-B. d. phys.-med. Soz. Erlangen 1904 S. 332.

Roger Baco bemerkt, daß die Sonnenstrahlen zwar nicht philosophisch, jedoch für die Praxis parallel genommen werden können. op. mai. I 126, II 118. 497.

Es werde (Fig. 9) der leuchtende Körper durch den Kreis *ab*, der beleuchtete durch den Kreis *gd* dargestellt. Von dem leuchtenden Körper mögen nur parallele Strahlen ausgehen, von denen *age* und *bdu* den beleuchteten berühren. Dann ist der Teil *gzd* im Lichte, *ghd* im Schatten, der sich zwischen den parallelen Strahlen *eg* und *ud* hinzieht. Er vergrößert sich und vermindert sich nicht, so weit man ihn auch verfolgt. In Wirklichkeit findet dies aber, wie schon gesagt, nur dann statt, wenn leuchtender und beleuchteter Körper gleich groß sind; außerdem nicht. Es ist also nicht möglich, daß die vom leuchtenden Körper ausgehenden Strahlen sämtlich parallel sind.

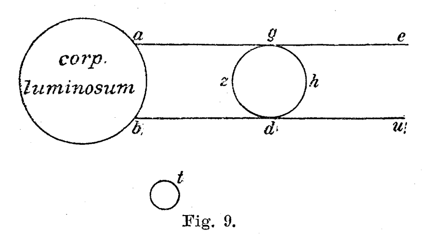


Fig. 9.

Gehen vom leuchtenden Körper nur parallele Strahlen aus, so ist es auch unmöglich, daß ein anderer Körper, der seitwärts von *gd* liegt, Licht empfange, wie z. B. der Körper *t*. Auf die Seite, wo sich der Körper *t* befindet, erstrecken sich nämlich keine parallelen Linien, nachdem sie einmal nach der Seite *gd* hin verlaufen. Daraus folgt notwendig, daß auch das Licht nur auf entsprechenden Teilen ist, nämlich auf denjenigen, zu denen parallele Linien gelangen. Dies widerspricht aber der Natur der Sache. Denn die Teile der leuchtenden Körper sind einander ähnlich. Es kann also auch die Wirkung der einzelnen Teile nicht verschieden sein[1]), und es ist nicht möglich, daß von der einen Seite her Licht ausgeht, von der anderen nicht.[2]) Denn dann wären die ähnlichen Teile des Körpers zugleich einander unähnlich, was nicht sein kann.

Ferner ist es auch nicht möglich, daß die Linien nicht parallel sind und zugleich nicht vom Zentrum des leuchtenden Körpers ausgehen. Denn wäre dies der Fall, so könnten die Teile des leuchtenden Körpers nicht einander ähnlich sein. Es würden die einen Teile ihre Linien nach der einen Richtung entsenden, die anderen nach einer anderen Seite des Körpers. Die einzelnen Teile zeigten also verschiedene Wirkung, könnten demnach nicht ähnlich sein. Ähnliche Teile haben nämlich eine ähnliche Wirkung. Auf diese Weise ergäben sich demnach wieder ähnliche Teile, die zugleich unähnlich wären, was sich widerspricht.

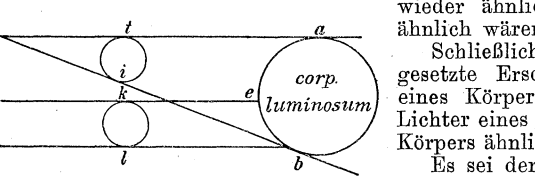


Fig. 10.

Schließlich müßten sich auch entgegengesetzte Erscheinungen an den Schatten eines Körpers ergeben, während doch die Lichter eines jeden Teiles eines leuchtenden Körpers ähnlich sind. Hierfür ein Beispiel: Es sei der Kreis *ab* (Fig. 10) der leuchtende Körper. Unter den vielen Strahlen,

---

Die Annahme, daß die Sonnenstrahlen nicht parallel seien, hat eine besondere Bedeutung für die Konstruktion des Brennpunktes von Hohlspiegeln bei Euklid und Roger Baco. Näh. Vogl, Die Physik Roger Bacos, S. 67. Vgl. (Pseudo) Euklid 'de speculis' Nr. 11 und 12. S. unten.

1) Dieselbe Erörterung findet sich bei Witelo II 18, 19 und Roger Baco, op. mai. II 495 f. — Alkindî hat 'effectus non diversificatur'; ebenso Witelo. Roger Baco hat 'natura operatur uno modo'.

Nach den Ausführungen beider heißt dies: Die Teile wirken, da sie homogen (homogenea, Witelo: unigenea) sind, in der Weise, daß alle Strahlen entweder parallel verlaufen, oder alle divergent, oder alle konvergent. Je nachdem dies der Fall ist, erhalten wir einen Schatten, dessen Grenzlinien parallel sind, divergieren oder konvergieren. Wenn nun bei ein und derselben Lichtquelle diese drei Arten von Schatten auftreten können, so würde dies voraussetzen, daß auch die drei Arten von Strahlen vorhanden seien, nämlich parallele, divergente und konvergente. Dies ist aber nicht möglich, weil die Teile der leuchtenden Körper ähnlich sind und deshalb auch ähnlich wirken.

2) D. h. die Natur lehrt, daß ein leuchtender Körper nach allen Seiten hin Licht entsendet, und nicht bloß nach einer einzigen (*gd*) hin.

die von seinen Teilen ausgehen, würden sicher auch zwei sein, die sich schneiden, wie z. B. *ag* und *bg*; und ebenso auch zwei, die parallel verlaufen, wie *eu* und *bz*. Bringen wir nun einen Körper *ti* zwischen die sich schneidenden Geraden *ag* und *bg*, so daß sie den Körper berühren, und ebenso einen Körper *kl* zwischen das parallele Strahlenpaar *eu* und *bz*, so müssen wir zweierlei Schatten erhalten, im ersten Falle einen kegelförmigen mit der Spitze in *g*, im zweiten einen solchen, der sich zwischen den parallelen Strahlen gleichmäßig erstreckt. Davon nehmen wir aber nichts wahr, auch dann nicht, wenn wir einen und denselben Körper vor der Lichtquelle hin und her bewegen oder wenn die Lichtquelle selbst oder beide zugleich bewegt werden. Die Form des Schattens ist, wie gesagt, von der Größe des leuchtenden Körpers gegenüber dem beleuchteten bedingt und bleibt dann stets konstant.

Es bleibt demnach nichts anderes übrig, als daß sich das Licht eines leuchtenden Körpers in der ganzen Luft ausbreitet, die ihn umgibt, und daß jede Stelle des Raumes, von der aus man eine gerade Linie zu einem Punkte des leuchtenden Körpers ziehen kann, Licht von ihm empfängt.

Als Beispiel[1]) hierfür diene (Fig. 11) ein leuchtender Körper, der durch den Kreis *ab*, und ein beleuchteter, der durch den Kreisbogen *eu* dargestellt werde. Eine Linie *gd*, die den Kreis im Punkte *a* berühren möge, schneidet den Bogen *eu* in den Punkten *z* und *h*. Dann kann man von jedem Punkte auf dem Bogen *zh* eine gerade Linie zum Punkte *a* ziehen. Von den Bogenstücken *ez* und *hu* aus ist dies aber nicht möglich, denn wie aus den Abhandlungen über die Oberflächen[2]) erhellt, muß jede Linie, die von einem Punkte dieser Bogenstücke ausgeht, wie z. B. *ua*, den Kreis *ab* schneiden. Und weil sie ihn schneidet, trifft sie ihn in einem anderen Punkte *t* eher als in *a*. Es kann also vom Punkte *a* keine gerade Linie nach *u* gezogen werden, da die Krümmung *at* im Wege steht; ebensowenig zu einem Punkte des Bogens *hu*.

Fig. 11.

Damit haben wir anschaulich gezeigt, wie ein jeder Teil eines leuchtenden Körpers auf das, was ihm begegnet, Licht entsendet, und zwar überall dahin, wohin eine gerade Linie von einem Punkte der Lichtquelle gezogen werden kann.

14. Nach dieser Erörterung greift Alkindî den Gegenstand wieder auf, den wir in Nr. 12 verlassen haben. Dort sagte er, daß für das Deutlichsehen die Länge des Achsenstrahles allein nicht maßgebend sei, sondern noch andere Ursachen mit im Spiele stehen. Die wichtigste derselben sei das Licht, und zwar insofern, als auf den Mittelpunkt der Sehkegelbasis ein starkes Licht aus dem Auge fällt, das mit der Entfernung von diesem Punkte abnimmt. Dies beweist er in folgender Weise:

Jeder Ort, der von mehreren Seiten her Licht empfängt, wird stärker beleuchtet als einer, der nur von wenigen Punkten aus vom Lichte getroffen wird. Denn ein jeder der leuchtenden Teile erhellt den Ort, dem er gegenüberliegt. Wir sehen dies, wenn ein Ort das eine Mal von einer einzigen Lampe, das andere Mal von mehreren erhellt wird.

---

1) Roger Baco bedient sich op. mai. II 499 des nämlichen Beispiels und derselben Figur mit Berufung auf Alkindî. Das gleiche Beispiel mit Figur hat auch Witelo Opt. II 19.

2) Eine Abhandlung Alkindîs „über die Oberflächen, de superficiebus" wird nicht aufgezählt. Gemeint ist wohl eine griechische Schrift, vielleicht Archimedis de conoidibus et sphaeroidibus, möglicherweise Apollonii conica ed. Heiberg, Buch I, Satz 32 [in der defekten Übersetzung von Apollonius, vgl. Heibergs prolegomena LXXV ff. fehlt dieser Satz] oder Archim. de sphaera et cylindro I, def. 2. Diese Schrift heißt in der lat. Übersetzung (Archim. III ed. Heiberg, proleg. LXXXVII) de curvis superficiebus. Vielleicht liegt nur im allg. eine Hinweisung auf die Stereometrie vor.

Nun behaupte ich, daß auf die Stelle des Sehmittelpunktes (centrum visus, Mittelpunkt der Sehkegelbasis) von mehreren Teilen des Sehorganes Licht fällt, als auf die anderen Punkte, weshalb gerade diese Stelle stärkeres Licht erhält.

Es stelle[1]) (Fig. 12) der Kreis *abg* mit dem Mittelpunkte *d* das Auge dar. Der Bogen *abg* bedeute die äußere Augenwölbung, jenen Teil, dem die Aufnahmskraft für die Sehdinge innewohnt.[2]) In den Endpunkten *a* und *g* sowie im Mittelpunkte *b* seien Tangenten an den Kreis gezogen: *ht*, *ki* und *ze*. Das Sehobjekt werde durch den Bogen *heitzk* dargestellt. Der Achsenstrahl des Sehkegels, der auf der Tangente *ez* senkrecht steht, treffe den Gegenstand im Punkte *l*. Nun sehen wir, daß jeder Teil des Bogens *ht* Licht vom Teile *a* empfängt; es wird also auch *l* davon erhellt.

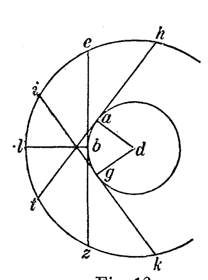


Fig. 12.

Ebenso erhält jeder Teil des Bogens *ik* Licht vom Teile *g*. Es bekommt also *l* auch von diesem Teile Licht.

Endlich wird jeder Teil des Bogens *ez* vom Teile *b* erhellt; also wird *l* auch vom Teile *b* getroffen.

Es empfängt demnach *l* Licht von drei Teilen, von *a*, *b* und *g*, während der Bogen *ei*, der nur den zwei Bögen *ht* und *ez* gemeinsam ist, auch nur von zwei Teilen, von *a* und *b*, beleuchtet wird, und ebenso der Bogen *zt* nur von *g* und *b* Licht empfängt.

Der Bogen *he* aber ist nur ein Teil des Bogens *ht* und wird deshalb nur von *a* aus bestrahlt; ebenso der Bogen *zk* nur von *g* aus.

Die Beleuchtung von *l* ist deshalb stärker als die irgendeines anderen Punktes in den Bögen *ei* und *tz*. Anderseits ist aber das Licht in *ei* und *tz* wieder stärker als das der Bögen *he* und *zk*. Und je weiter wir die Teilung fortsetzen, desto mehr Stellen werden sich in der Beleuchtungsabstufung zwischen *l* und den beiden Punkten *h* und *k* ergeben.

Es ist also klar, daß der Mittelpunkt der Sehkegelbasis stärker beleuchtet wird als die anderen Punkte und daß die Teile um so mehr erhellt werden, je näher sie dem Mittelpunkte liegen.

15. Die Einwirkung des Auges auf die Luft oder sonst ein Patiens vollzieht sich nach Alkindî vom Anfang bis zum Ende „plötzlich", also ohne Zeit. Damit kommt Alkindî auf die im ganzen Altertum und Mittelalter ungelöste Frage zu sprechen, ob der Gang des Lichtes in der Zeit oder zeitlos sich abspielt.

Der Sizilianer Empedokles (492—432 v. Chr.) hatte gelehrt, daß das Licht Zeit brauche zur Fortpflanzung. Aristoteles widersprach ihm, indem er sich vom Scheine täuschen ließ. Ihm folgten die meisten anderen, darunter Seneca und Heron[3]), die Araber Alkindî, Averroes, später sogar noch Leonardo da Vinci[4]), Baco von Verulam, Descartes. Eine Ausnahme machten besonders der Araber Alhazen und nach ihm Roger Baco.[5]) Erst 1675 wurde von O. Roemer der erste sichere Nachweis erbracht, daß das Licht Zeit zur Fortpflanzung benötigt.

---

1) Dasselbe bei Witelo II 21 mit der nämlichen Figur; ebenso Roger Baco II 542 mit Berufung auf Alkindî.

2) Es ist wohl die Oberfläche der Linse gemeint (extrinseca gibbositas), in welche die Araber nach dem Vorbilde des Galenus die eigentliche Sehkraft zu verlegen pflegten.

3) Vgl. Heron; Katoptr. v. Nix u. Schmidt S. 321 2. Satz. Rose Anecdota 319 th. 2.

4) Vgl. O. Werner: Die Physik Leon. da Vinci. Inaug.-Diss. Erlangen 1910.

5) Näh. Vogl, Die Physik Roger Bacos, S. 45f. Roger Baco bekämpft Alkindî in dieser Frage.

Hören wir nun, wie Alkindî seine Ansicht begründet:

Wenn das Auge einen Einfluß auf ein Patiens, z. B. die Luft, ausübt, so erleiden die Teilchen des letzteren nacheinander eine Einwirkung, und zwar so, daß entweder der Teil, der das Auge berührt, den Einfluß aufnimmt, dieser Teil den nächsten verändert und so fort bis zum Ende; oder so, daß das Auge zuerst das anstoßende Teilchen, hernach das zweite usw. bis zum Schlusse beeinflußt, wobei also jedes Teilchen direkt von der Augenkraft den Eindruck empfängt.

Im ersten Falle, wo stets das nächstfolgende Teilchen vom vorhergehenden die Einwirkung erfährt, muß man annehmen, daß alle Teile untereinander zusammenhängen und sich berühren. Sie hängen dann auch mit dem ersten Teilchen zusammen, das die Veränderung vom Blicke erhält. Von diesem ersten geht dann der Eindruck auf alle Teilchen über, die mit ihm unmittelbar in Berührung stehen, und von den zweiten Teilchen auf alle, die an sie angrenzen. Dann müßte aber die Luft und jedes andere Medium sowohl in gerader Richtung vor dem Auge als auch seitwärts und hinter demselben eine Veränderung von der Sehkraft erfahren; es hängen nämlich alle Teile der Welt untereinander zusammen. Und weiter müßte ein Beobachter, der einen Gegenstand auf einer bestimmten Seite betrachten will, zugleich alles sehen, was sich im Medium befindet, von dem das Auge umgeben ist, mit anderen Worten, er müßte zugleich vor sich, hinter sich und nach allen Seiten hin sehen, was aber nicht der Fall ist, da das Auge nur das sieht, was in gerader Linie vor ihm liegt. Diese erste Annahme kann deshalb nicht richtig sein.

Im zweiten Falle, wo das Auge zuerst das angrenzende Teilchen, dann das zweite, hierauf das dritte und so fort bis zum Ende des Mediums beeinflußt, muß sich der Verlauf über die ganze Sehstrecke hin notwendig in einer gewissen Zeit abspielen, da immer ein Teilchen nach dem andern von der Augenkraft verändert wird. Daraus folgte weiter, daß, wenn wir einen Gegenstand sehen wollen, der etwa eine Elle vom Auge entfernt ist, wir diesen erst dann erfaßten, wenn wir das Auge eine gewisse Zeit, und mag diese auch unmerklich kurz sein, auf ihn gerichtet haben. Vervielfältigte sich aber die Entfernung, so müßte auch die Zeit entsprechend zunehmen und jedenfalls könnte sie dann nicht unbemerkt bleiben, wenn die Entfernung sich bis zum Fixsternhimmel erstreckt. Es müßte also Zeit verstreichen zwischen dem Moment, wo man sehen will und wirklich sieht.

Es sei z. B. in Fig. 13 das Auge beim Punkte a, und die Teile, die einen Eindruck erfahren, erstrecken sich bis zu b. Der betrachtete Gegenstand sei beim Punkte g. Wenn also die Zeit, welche zwischen dem Willensakt zu sehen und dem wirklichen Erfassen des Punktes g liegt, zu kurz ist, um wahrgenommen zu werden, so nehmen wir ein großes Vielfaches der Strecke ag, etwa ad, und richten das Auge auf d. Dann muß auch die Zeit sich vervielfältigen, die verstreicht zwischen dem Willensakte d zu sehen und dem wirklichen Erfassen von d, und zwar im gleichen Verhältnisse. Wenn nun aber auch bei dieser vielfachen Entfernung die Zeit nicht wahrnehmbar ist und in gleicher Weise nicht, wenn wir bis zum Punkte b fortschreiten, dann darf man nicht annehmen, daß die Gesichtswahrnehmung unter Verlauf von Zeit stattfindet. Wenn wir nämlich am äußersten Orte der sichtbaren Dinge, wie z. B. in der Entfernung der Sphäre der Fixsterne, etwas sehen wollen, so gewahren wir noch keine Zeit, die vergeht von dem Momente an, da wir das Auge dahin richten, und dem Momente, da wir wirklich sehen, weil wir eben schon beim Willensakte zu sehen das erfassen, was vor dem Auge liegt, wenn das Medium erhellt ist und kein Hindernis dazwischen liegt.[1])

b d g a

Fig. 13.

1) Diese ganze Darstellung nach Heron: Katoptr. l. c. S. 321 f. Wenn wir, nachdem wir die Augen geschlossen hatten, wieder zum Himmel sehen, so gelangen die Augenstrahlen ohne irgendwelchen zeitlichen Zwischenraum zum Himmel. Denn in demselben Augenblicke, in dem wir emporblicken, sehen wir die Sterne, obgleich doch ihre Entfernung sozusagen unendlich ist.

Die sichtbaren Dinge werden also nicht mit der Zeit wahrgenommen, sondern das Patiens (Luft) erfährt vom Auge plötzlich einen Eindruck vom Anfang bis zum Ende und nicht unter Verlauf von Zeit.

III.

DER SEHVORGANG MITTELS DER SPIEGEL.

16. Der auf einen Spiegel fallende Strahl wird unter gleichen Winkeln geknickt.[1])

Nachdem wir nun gesehen haben, wie der Sehvorgang ohne Spiegel sich vollzieht, wollen wir untersuchen, wie der Gesichtssinn die einzelnen Dinge mittels der Spiegel erfaßt. Vorerst aber wollen wir das Gesetz kennen lernen, auf das sich unsere Untersuchungen aufbauen. Dieses lautet:

Die Strahlen, die von einem leuchtenden Körper ausgehen und zu einer Spiegelfläche gelangen, erfahren an dieser eine Emporknickung, und zwar nach gleichen Winkeln, so daß also der einfallende und der umgebogene Strahl mit der Spiegelfläche den gleichen Winkel bildet. Dafür ein Beispiel. Es sei (Fig. 14) *ab* ein spiegelnder Körper, der die Strahlen umbiegt. Bei *g* befinde sich ein leuchtender Körper, von dem ein Strahl *gd* ausgehen möge, der die Spiegelfläche in *d* trifft und nach *de* umgebogen wird.

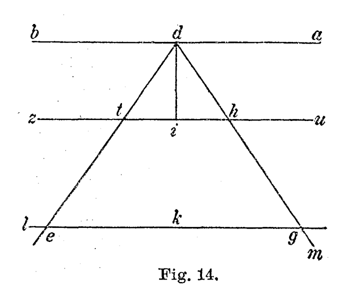


Fig. 14.

Nun behaupte ich, daß der Winkel *adg* gleich dem Winkel *edb* ist.

Zum Beweise stellen wir parallel der spiegelnden Fläche *ab* eine Tafel *uz* auf und fällen von *d* ein Lot *di* auf *uz*. Sodann bohren wir bei Punkt *h*, wo der Strahl *gd* die Tafel durchdringen muß, ein Loch, und ein zweites gleich großes bei Punkt *t*, der von *i* die gleiche Entfernung hat wie *h*. Endlich stellen wir parallel zur Tafel *uz* noch eine zweite Tafel *kl* auf.

Es geht dann der Strahl von *g* aus nach *d*, wird dort nach der Richtung *dt* umgebogen und fällt auf Punkt *e* der Tafel *kel*. Da $id = id$, $hi = ti$ und $\sphericalangle hid = \sphericalangle tid$ ist, so folgt aus der Kongruenz der Dreiecke, daß $hd = dt$ ist und $\sphericalangle dhi = \sphericalangle dti$.

Nun sind aber die Linien *ab* und *uz* parallel. Folglich ist $\sphericalangle adh = \sphericalangle dhi$; also auch $\sphericalangle dti = \sphericalangle adh$, und da $\sphericalangle dti = \sphericalangle bdt$, so ist $\sphericalangle bdt = \sphericalangle adh$, d. h. es sind jene Winkel gleich, die einfallender und umgebogener Strahl mit der Spiegelfläche bilden.

Wenn also irgendein leuchtender Körper einen Strahl von der Richtung *gm* auf den Spiegel nach *d* sendet, so fällt der umgebogene Strahl nach *e* der zweiten Tafel und weicht nicht nach rechts und nicht nach links ab, auch dann nicht, wenn die Öffnung *t* ihre Entfernung von *i* verändert.

---

1) Alkindî hält sich hierbei ganz an die sogenannte Katoptrik des Euklid. — Unter den gleichen Winkeln sind diejenigen gemeint, die der auffallende (radius egrediens a luminoso) und der geknickte (radius conversus) Strahl mit der Spiegelfläche bildet.

Al Fârâbî unterscheidet genauer: radius reflexus, der auf seitlich vom Spiegel gelegene Gegenstände reflektierte, radius conversus, der auf der ursprünglichen Bahn umgekehrte Strahl, mittels dessen der Beschauer sich selbst sieht; radius refractus, der zur Seite des Beschauers hingelenkte Strahl, der das zu seiner Rechten oder Linken oder hinter ihm Befindliche sichtbar macht. Näh. E. Wiedemann in Beitr. XI S. 88f.

17. Was von den gewöhnlichen Lichtstrahlen gilt, wendet nun Alkindî auf die Sehstrahlen an, die jenen ähnlich sind[1]) und erklärt daraus schließlich das Sehen der Dinge mittels der Spiegel durch Strahlen, die vom Auge ausgehen, auf den Spiegel fallen und von dort auf das Objekt reflektiert werden.

Die Luft, heißt es weiter, erleidet durch den Blick einen ähnlichen Einfluß wie durch das Auftreffen des Lichtes eines leuchtenden Gegenstandes. Denn auch vom Auge geht der Strahl geradlinig aus, pflanzt sich bis zur spiegelnden Fläche fort und wird dort nach gleichen Winkeln umgebogen. So finden wir es nämlich, wenn wir den Spuren der Natur nachgehen.

Diese lehrt uns, daß die natürliche[2]) Bewegung einfach ist, nämlich geradlinig oder kreisförmig und nicht zusammengesetzt. Auch die geradlinige treffen wir nicht als eine Vereinigung aus geradliniger und kreisförmiger zugleich, sie ändert sich vielmehr nur nach Anfang und Ende, so daß also der Anfang der einen Bewegung am Ende einer anderen, und das Ende der einen beim Beginne einer anderen ist.[3]) Die natürliche geradlinige Bewegung ist demnach auch nicht aus zwei einfachen Bewegungen zusammengesetzt, sondern ist nur eine einfache Bewegung.

Dies vorausgesetzt lassen wir jetzt (Fig. 15) auf eine Spiegelfläche *ab* von einem Auge in *g* einen Strahl fallen. Er treffe die Spiegelfläche in *d*. Von *d* aus ziehen wir eine Linie *de*, die mit der Spiegelfläche denselben Winkel bildet, wie der Augenstrahl *gd*. Denken wir uns nun den Strahl *gd* durch den Spiegel hindurch geradlinig um $du = de$ verlängert, so bildet diese Verlängerung mit der Rückseite des Spiegels denselben Winkel, wie die Linien *gd* und *ed* mit der Vorderseite. Und wenn wir uns nun den Spiegel mitsamt den Strahlen um *ab* als Achse, die in *a* und *b* auf festen Punkten ruhen möge, gedreht denken, so müssen die Linien *du* und *de* zusammenfallen und die Punkte *u* und *e* sich decken.[4])

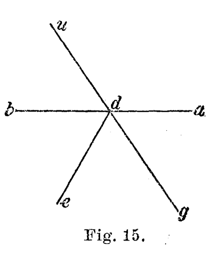


Fig. 15.

1) In der schon mehrmals zitierten Optik des sogenannten Damianus heißt es cap. II: „Daß aber das, was von uns (aus dem Auge) entsandt wird, Licht ist, ist ersichtlich aus dem Funkeln, ferner daraus, daß es auch wirklich solche Menschen gab, die nachts ohne äußeres Licht sahen. Ebenso gibt es Tiere, die nachts ihre Nahrung suchen. So ein Mensch war z. B. der Kaiser Tiberius. Die Augen der Tiere, die des Nachts Beute suchen, erscheinen sogar glänzend wie Feuer. cap. III: Daher die Ähnlichkeit unseres Auges mit der Sonne. — Im ersten Buche der Optik des Ptolemaeus war, wie aus dem Anfange des zweiten sich ergibt, von der Ähnlichkeit und dem Unterschied zwischen Sehen und dem Lichte die Rede.

2) Diese ganze Zwischenbemerkung Alkindîs über die Bewegung ist aus Aristoteles, 4. u. 8. B. d. Phys. Dieser unterscheidet zwei grundsätzlich voneinander verschiedene Bewegungen: 1. die natürliche, 2. die gewaltsame Bewegung. Die erstere ist entweder geradlinig oder kreisförmig. Es kann ein Körper von der kugelförmigen Erde auf- und niedersteigen und es kann der Mond seine Bahn um die Erde beschreiben. Der Kreis ist eine krumme Linie, die überall gleiche Krümmung hat. Jede Bewegung, die gekrümmt ist, ohne kreisförmig zu sein, ist „gewaltsam". Das deutlichste Beispiel für letztere erblickt er in der Wurfbewegung. Die Ursache, daß beim Wurf sich keine geradlinige und keine kreisförmige Bewegung ergibt, ist die Luft. Wäre keine Luft, so wäre auch die Wurfbewegung geradlinig oder kreisförmig. Vgl. M. Meyerhof und C. Prüfer: Die Aristotel. Lehre vom Licht bei Hunain b. Ishâq (in Vorber.) Nr. 2. Erst Galilei (1610) hat die Unrichtigkeit dieser Theorie endgültig beseitigt. Näh. bei Mach, Die Mechanik in ihrer Entwicklung. Lpzg. 1901. S. 125ff.

3) Dies dürfte sich an einer gebrochenen Linie veranschaulichen lassen.

4) Dasselbe bei Rog. Baco op. mai. II 484 mit Berufung auf Alkindî und Euklid prop. V sui libri. Letztere Angabe stimmt auf die pseudo-euklidische Schrift 'de speculis' Nr. 5 (vgl. unten). — Die Darstellung Alkindîs findet sich ebenso bei Witelo V 20.

Beweis: Es ist der Winkel *udb* gleich dem Winkel *edb*, da Winkel *edb* gleich dem Winkel *adg* und die Linie *db*, die den Winkeln gemeinschaftlich ist, sich nicht von der Stelle bewegt. Erfolgt nun eine Drehung um *db* als Achse, bis der Winkel *udb* dorthin gelangt, wo Punkt *e* liegt, so wird er den Winkel *edb* bedecken, Linie *ud* wird mit *ed* zusammenfallen und Punkt *u* mit Punkt *e*, da ja Linie *ud* gleich der Linie *ed*, die Winkel gleich und *db* gemeinschaftlich ist.

Decken sich die Winkel nicht, so bewegt sich die Linie *db* von ihrer Stelle entweder zum Punkte *u* oder zum Punkte *e* hin, oder irgendwie aufwärts oder abwärts. Dabei wird also nicht der Strahl allein umgebogen, sondern es bewegt sich zugleich mit dem sich umbiegenden Strahl die Spiegelfläche von dem Orte, wo auf sie der Strahl auftrifft.

In Wirklichkeit verursacht aber der auffallende Strahl keine Drehung des Spiegels; denn das liegt ganz außer der Natur. Wohl aber ist die Bewegung des Strahles eine natürliche.[1] Folglich ist sie nur eine, einfach und nicht zusammengesetzt. Es bewegt sich demnach die Linie *ud* nur zur Seite *e*, und der Winkel bewegt sich nicht. Es wird also der Strahl, der direkt verlängert in der Richtung *gdu* verlaufen würde, beim Punkte *d* nach *de* umgebogen. Und so ist Winkel *adg* gleich dem Winkel *bde*.

18. Der Satz, daß einfallender und umgebogener Strahl mit der Spiegelfläche gleiche Winkel bilden, gilt nun nicht bloß bei ebenen, sondern auch bei konkaven und konvexen sphärischen Spiegeln, wie schon in der Katoptrik gelehrt wird, die man dem Euklid zuschrieb.[2]

Auch der Augenstrahl, fährt Alkindî fort, der an einer konkaven oder konvexen Kugelfläche umgebogen wird, erfährt diese Umbiegung nach gleichen Winkeln. Wir nehmen beispielsweise (Fig. 16) zwei Kugelflächen *abg* und *dbe*, die sich im Punkte *b* berühren, und ziehen die Linie *ubz*, die keine der beiden Kugeln schneidet, sondern sie nur berührt.[3] Nun möge vom Auge ein Strahl *hb* ausgehen, der bei *b* nach *t* umgeknickt wird. Dann ist nach dem vorhergehenden $\sphericalangle hbu = \sphericalangle tbz$. Es ist aber auch $\sphericalangle abu = \sphericalangle gbz$ und $\sphericalangle dbu = \sphericalangle ebz$.[4] Durch Subtrahieren resp. Addieren dieser Winkel von jenen, die einfallender und umgebogener Strahl mit dem Planspiegel (*uz*) bilden, erfolgt auch die Gleichheit der Winkel *hba* und *tbg* im Konkavspiegel sowie *hbd* und *tbe* am Konvexspiegel. Man sieht also deutlich, daß einfallender und umgeknickter Strahl auch mit konkaven und konvexen Kugelflächen gleiche Winkel bildet.

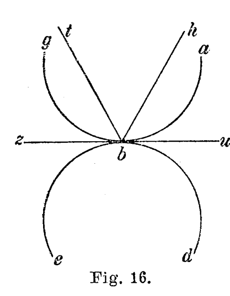


Fig. 16.

Damit ist also der Beweis geliefert, daß alle Strahlen, mögen sie vom Auge oder von sonst einem Gegenstande ausgehen, sowohl an Planspiegeln als auch an konkaven wie konvexen Kugelflächen nach gleichen Winkeln umgebogen werden.

19. Nachdem wir jetzt gesehen haben, daß auch die Augenstrahlen an spiegelnden Flächen nach gleichen Winkeln umgebogen werden können, soll bewiesen werden, daß dies die einzige Möglichkeit ist, Gegenstände, die nicht in gerader Linie vor dem Auge liegen, vermittelst der Spiegel wahrzunehmen.

Für die Wahrnehmung der Gegenstände mittels der Spiegel sind drei Möglichkeiten gegeben, von denen wir sehen werden, daß nur die erste bestehen kann[5]:

---

1) Siehe obige Bemerkung.

2) Eukl. Katoptr. 1 Heiberg S. 288f. — Optik des Ptolem. l. III (Govi) S. 62f. Fig. 15 (dort experim. Beweis). — Rog. Baco op. mai. II 485 und Witelo V 20.

3) *uz* stellt einen Planspiegel vor, der die Tangentialebene zu beiden Kugeln ist.

4) Die Katoptrik Euklids beweist den Satz ebenso.

5) Vgl. Alhazen, Opt. IV 21. Witelo V 24.

Entweder werden die Strahlen, die vom Auge kommen, von den Spiegeln zu den Dingen gelenkt, die mittels des Spiegels gesehen werden, so daß die Basen der Strahlen auf den Gegenständen sich befinden und der Blick sie erfaßt wie ohne Vermittlung des Spiegels. Oder es bilden sich die Formen der Dinge vermittelst der Spiegel auf ihren Oberflächen ab, auf die dann der Strahl vom Auge fällt und die Formen aufnimmt wie auch sonst ohne Spiegel. Oder es finden beide Ursachen zugleich statt, so daß sowohl die Formen der Gegenstände sich auf dem Spiegel abbilden als auch die Strahlen, die vom Auge kommen, mittels der Spiegel zum Gegenstande gelenkt werden.

Sollen sich nun unsichtbare Formen auf den Spiegeln abbilden, so könnte dies in der Weise geschehen, daß entweder die Form zum Spiegel eilt, bis sie ihn berührt und sich auf ihm abbildet, oder daß auf dem Spiegel ein dunkler Eindruck stattfindet, wie wir bei den Körpern sehen, wenn das Licht auf sie fällt und sie Schatten werfen. In diesem letzteren Falle könnten aber auf dem Spiegel nur die äußeren Umrisse gesehen werden, aber nicht auch Farbe, Gliederung, Lage und Bewegung der Teile und überhaupt die ganze Tätigkeit eines Gegenstandes, was alles wir im Spiegel wahrnehmen.

Würden die Formen zum Spiegel eilen und sich dort in irgendeiner Weise abbilden, so müßte sich dabei dieselbe Erscheinung zeigen, wie wenn kein Spiegel vorhanden wäre. Wir müßten nämlich im Spiegel unsere Rückseite und nicht unser Antlitz sehen; denn was von uns wegflieht, ist die Form unserer Gestalt, und diese müßte das Auge von hinten sehen. Und wenn man auch annehmen wollte, daß die Formen verschiedene Bewegungen ausführen, bis sie zum Spiegel gelangen, da ja die räumlichen Abstände zwischen Spiegel und Gegenstand stets wechseln und die Formen dann ungleiche Wege zurückzulegen haben, so müßte man doch bald die Vorderseite, bald eine ihr benachbarte, bald die Kehrseite sehen, was wiederum nicht der Fall ist. Denn wir sehen in dem uns gegenüberstehenden Spiegel stets unser Antlitz, und zwar bei jeder Entfernung von demselben.

Eine weitere Forderung wäre, daß sich die zum Spiegel eilenden Formen nach ihrer wirklichen Größe abbilden müßten. Aber auch hiervon nehmen wir nur das Gegenteil wahr. Denn wir finden, daß ein Gegenstand von großer Ausdehnung in einem kleinen ebenen Spiegel gesehen wird, und zwar in seiner wahren Größe. Und sind die Spiegel verschiedenartig, so ändert sich auch bei gleichbleibendem Abstand die Quantität des Objektes.

Sodann könnten sich die Formen, die zum Spiegel eilen, nicht körperlich abbilden, sondern es könnten nur die Konturen sichtbar werden, nach welchen die erhabenen Teile die Spiegelfläche berühren würden. Wir gewahren aber bei keinem Spiegel eine bloß ebene Abbildung, sondern wir sehen die Dinge körperlich, ganz in ihrer wahren Gestalt und mit unveränderten Tiefenverhältnissen. Zugleich bleiben zwischen Spiegelbild und Spiegelebene die Zwischenräume erhalten, die zwischen Objekt und Spiegelebene bestehen. Desgleichen sehen wir jeden Vorgang, der in dem Raume zwischen Objekt und Spiegel stattfindet, und zwar wiederum im gleichen Abstande hinter der Spiegelebene.

Eilten die Formen zum Spiegel, so würden in demselben auch nicht Dinge abgebildet, die eine Ansammlung von Größen darstellen, wie sie in der Tat im Spiegel wahrgenommen werden, wenn auch die Ansammlung vielmals größer ist als die Oberfläche des Spiegels. So sehen wir z. B. mit einem einzigen Blick viele Körper in einem kleinen Spiegel, wenn er passend aufgestellt ist. Hundert Soldaten, die aufgestellt sind, sieht man in ihrer wirklichen Größe in einem Spiegel, der nur eine Hand breit ist oder noch kleiner, gerade so wie man durch ein kleines Loch eine ganze Gegend überschauen und viele einzelne Dinge sehen kann, die alle größer sind als die Öffnung. Man pflegt auch Spiegel zu fertigen, in denen man deutlich Mönche beobachten kann, die irgendeine Arbeit verrichten, oder tanzende und spielende Frauen, wie wir an einer anderen Stelle zeigen werden.[1])

1) Vgl. hierzu die Zauber- und Theaterspiegel in der Katoptrik des Heron (Rose, Anecdota II 326; Nix u. Schmidt S. 319): „Wie sollte einer nicht für nützlich halten zu sehen, wie zahlreich die Insassen im gegenüberstehenden Hause



Wenn die Formen zum Spiegel kämen, so müßte man auch in einem einzigen Spiegel die Form eines Gegenstandes an mehreren Stellen seiner Oberfläche sehen, wie es der Fall ist, wenn man mehrere kleine Spiegel vereinigt, die zusammen die gleiche Größe haben wie der eine.[1]) Wenn nämlich die Form zu einem jeden dieser kleinen Spiegel eilt, dann muß sie auch ebensooft zu dem einen Spiegel kommen, der dieselbe Größe hat wie die kleinen zusammen. Wir sehen aber gerade das Gegenteil, nämlich nur ein einziges Bild des Objektes in dem einen Spiegel, mag es groß oder klein sein.

Diese Beispiele, die sich noch vermehren ließen, mögen genügen, um darzutun, daß von den Objekten keine Formen ausgehen und sich auf dem Spiegel abbilden.

Aber auch die dritte Möglichkeit kann nicht bestehen, daß Formen zum Spiegel eilen und sich dort abbilden und daß zugleich vom Auge Strahlen ausgehen, die vom Spiegel zum Objekte reflektiert werden, um dasselbe zu erfassen. Denn dann müßten mittels eines Spiegels stets zwei Formen eines Objektes gesehen werden, die eine, die der geknickte Augenstrahl erfaßt, und die andere, die sich auf dem Spiegel abbildet. Dabei würde für die im Spiegel abgebildete Form all das notwendig zutreffen, was wir vorher erörtert haben. Wir nehmen aber wiederum nichts von zwei Bildern wahr.

Es bleibt also nur die erste Möglichkeit übrig, daß die Gegenstände mittels der Spiegel durch Strahlen vom Auge wahrgenommen werden, die von der Spiegelfläche zum Gegenstande gelenkt werden, wobei die Basen der geknickten Sehstrahlen so auf die Objekte fallen, wie es auch ohne Spiegel geschieht.

Wir können dies anschaulich an folgendem Beispiel zeigen (Fig. 17).

Wir stellen vor uns einen Spiegel *ab* auf, dessen Oberfläche von einer Horizontalebene senkrecht halbiert wird. In dieser Horizontalebene wählen wir einen Punkt *g* für den Ort des Auges, und zwar so, daß das Lot von *g* auf den Spiegel durch den Mittelpunkt *t* geht. Sodann ziehen wir von *g* aus durch die Endpunkte des Spiegels *a* und *b* zwei gleich lange Strecken *gad* und *gbe*. Die Punkte *d* und *e* verbinden wir durch eine Gerade, die von *gt* im Punkte *h* senkrecht halbiert wird und zu *ab* parallel ist.

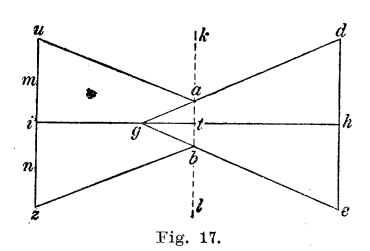


Fig. 17.

Nun verlängern wir *tg* auch nach der anderen Seite bis zum Punkte *i*, der von *t* denselben Abstand hat wie *h*, stellen bei *i* eine Tafel *uz* parallel zu *ab* auf und so, daß bei *i* die Mitte ist. Verbinden wir jetzt *u* mit *a* und *z* mit *b*, so gehen diese Linien bei *a* und *b* nicht geradlinig weiter, weil sie die Spiegelfläche daran verhindert, finden aber dort auch ihr Ende nicht.

Denn denken wir uns die linke Seite *uz* des Systems nach der Seite *de* um *ab* als Achse gedreht, so wird nach dem vorhergehenden die Figur *uzba* die Figur *deba* bedecken. Es ist also Linie $ua = da$ und $zb = be$; $\sphericalangle auz = \sphericalangle ade$, $\sphericalangle uzb = \sphericalangle deb$; $\sphericalangle dab = \sphericalangle uab$. Verlängern wir *ab* bis *k* und *l*, so halbiert diese Gerade die Winkel *uad* und *zbe*. Also ist dann $\sphericalangle kau = \sphericalangle kad$ und $\sphericalangle lbz = \sphericalangle lbe$. Es ist aber $\sphericalangle kad = \sphericalangle gab$ und $\sphericalangle lbe = \sphericalangle gba$. Folglich $\sphericalangle kau = \sphericalangle gab$ und $\sphericalangle lbz = \sphericalangle gba$. Die zwei Strahlen *ga* und *gb* werden demnach vom Spiegel an den zwei Punkten *a* und *b* zu den Punkten *u* und *z* gelenkt.

Nähert sich *uz* dem Spiegel *ab*, so sehen wir *u* und *z* von *g* aus nicht mehr mit den Punkten *a* und *b*. Und entfernen wir *uz* von *ab*, so sehen wir *u* und *z* überhaupt nicht mehr im Spiegel, sondern es werden zwei andere Punkte *m* und *n* mit *a* und *b* zugleich gesehen. Dies alles wäre nicht der Fall, wenn nicht

---

sind, oder wenn sie sich zufällig auf den Gassen aufhalten, was sie machen?" — Witelo V 57: „Es ist möglich, einen ebenen Spiegel so in einem Gemache aufzustellen, daß man sieht, was in einem Hause oder in den Gassen oder auf der Straße vorgeht." — Roger Baco: op. mai. II 165.

1) Roger Baco sagt genauer, daß dieses nur dann der Fall sei, wenn die Stücke nicht in einer Ebene liegen; op. mai. II 145. 481.

die einzelnen Dinge mittels des Spiegels durch Strahlen erfaßt würden, die durch Knickung zum Objekte gelangen.[1])

20. Gegen die Annahme, daß die Luft vom Auge plötzlich einen Einfluß erleidet, erhebt sich übrigens eine Schwierigkeit.

Wenn nämlich der Blick plötzlich die ganze Luft, die dem Auge begegnet, lockert (resolvit), wie kann die Luft dort, wo sie dem Spiegel und nicht dem Auge zugewendet ist, in ihren Teilen gelockert werden?[2]) Manche sind hier der Ansicht, daß entweder der Spiegel, der den Einfluß (Resolution) vom Auge her aufnimmt, die Luft weiter resolviert, oder daß die resolvierte Luft selbst vom Spiegel aus das Lockern weiter besorgt. Dann muß aber der Vorgang in der Zeit sich abspielen, was, wie gesagt, unserer Wahrnehmung widerspricht. Dazu kommt noch, daß dann auch die vom Auge resolvierte Luft, die dem Spiegel gegenüber sich befindet, nicht bloß in der Richtung des geknickten Strahles die Luft weiter resolvieren würde, sondern nach jeder Richtung hin, was wiederum der Wahrnehmung widerspricht. Denn der vom Spiegel geknickte Strahl geht in gerader Richtung nach einem ganz bestimmten vom Spiegel resolvierten Ort.

Es kann also wohl nicht anders sein, als daß das, was vom Spiegel aus die Luft resolviert, ein verändernder Einfluß sei, der vom Auge ausging und an der Spiegelfläche geknickt wurde. Und hierzu ist keine Zeit erforderlich.

Denn wenn der Spiegel plötzlich den verändernden Einfluß ohne Zeit empfängt, da das Auge das Resolvieren ohne Zeit vollbringt, so erleidet auch weiter das dem Spiegel gegenüber sich befindende Medium von ihm den Einfluß ohne Zeit. In demselben Momente, da der Spiegel den Einfluß erleidet, empfängt ihn auch schon das Medium in der Richtung des geknickten Strahles, und der Spiegel erleidet den Einfluß, sobald der Beobachter ihm gegenüber steht. Also findet der Einfluß, den das Medium vom Spiegel nach der Richtung der Knickung hin erleidet, ohne Zeit statt.

21. Eine weitere große Schwierigkeit besteht darin, daß wir die Gegenstände mittels des Spiegels nicht an ihrem Platze wahrnehmen, obwohl wir sie durch Strahlen erfassen, die an der Spiegelfläche geknickt werden und dann ihre Basis auf das Objekt richten, wie auch beim Sehen ohne Spiegel. Es werden zwar die Einzelheiten der Dinge, sowie ihre Umgebung und alles, was sonst zwischen Spiegel und Gegenstand sich befindet, in der richtigen Anordnung zueinander gesehen, allein alles befindet sich in gerader Sehlinie hinter dem Spiegel, so daß also die Sehlinie die Spiegelfläche zu schneiden scheint und man meint, es sei alles hinter der Spiegelfläche.[3])

Nehmen wir z. B. (Fig. 18) ab als Spiegelfläche. Das Auge sei bei g und gde die Richtung, nach welcher der Blick, d. h. die Achse des Sehkegels, fällt. Bei d treffe sie den Spiegel und werde nach u gelenkt, wo sich ein Gegenstand befindet. Es ist dann $\sphericalangle\, adg = \sphericalangle\, bdu$, da $\sphericalangle\, edb = \sphericalangle\, udb$, wie wir schon früher gezeigt haben. Die Erfahrung lehrt nun, daß u bei e gesehen wird und nicht bei d, wie man glauben möchte. Denn wir sehen sogar alle einzelnen Dinge im Spiegel, die sich auf der ganzen Linie du befinden; und auch diese sollten in d sein. Es fände demnach bei d eine Anhäufung von vielen Bildern gleicher Größe statt, was nicht möglich ist. Man sieht vielmehr alle Einzeldinge der Strecke du als Einzeldinge auf der Strecke de mit den gleichen Abständen voneinander. Die Dinge werden also nicht auf der Spiegelfläche wahrgenommen, sondern auf der geraden Linie, die vom Auge ausgeht und die Spiegel-

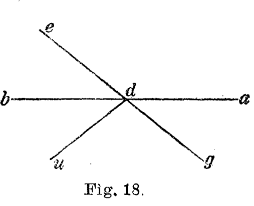


Fig. 18.

1) Dasselbe nebst Figur bei Witelo V 23f.

2) Nach Plato dehnt das Licht durch seine feurige Natur die Luft aus, lockert sie gleichsam in ihren Teilen. — Empedokles läßt die abgelösten Formen auf dem Spiegel kommen, die durch etwas Feuriges im Spiegel durch die Luft hindurch zum Auge weitergeführt werden. — Tideus spricht von einer Umwandlung der Luft zur Natur des Blickes. Vgl. S. 76.

3) Dasselbe bei Ptolemaeus Opt. II (Govi) S. 64f., der aber den Vorgang noch weiter begründet.

fläche an der Stelle, wo die Knickung des Strahles stattfindet, durchschneiden sollte. Und dies kommt daher, daß unser Auge nur nach geraden Linien sieht und nicht nach ungeraden. Die Knickung des Strahles ist nur ein virtueller Vorgang, den man zwar weiß, aber nicht wie einen körperlichen sinnlich wahrnehmen kann. Wir wissen, daß der Blick einen Gegenstand, der durch einen Spiegel gesehen wird, durch Knickung des Sehstrahles erfaßt, und daß diese Knickung aus einer geraden Linie, die abgebogen ist, entsteht; wir nehmen dies aber nicht sinnlich wahr, da wir nur nach gerader Richtung sehen können.[1])

IV.

EINFLUSS VON DISTANZ UND SEHWINKEL AUF DAS SEHEN.

22. Wie schon früher (Nr. 12) erörtert, ist der Abstand allein eines Gegenstandes vom Auge für das Deutlichsehen nicht maßgebend.

Er bildet aber doch einen wichtigen Faktor für die Helligkeit eines Gegenstandes, insofern das Licht der einzelnen Dinge deutlicher und klarer wahrgenommen wird, wenn sie dem Auge nahe sind, als wenn sie von demselben weiter entfernt sich befinden.[2])

Um dies zu zeigen, gehen wir von der Tatsache aus, daß ein und dieselbe Lampe (candela) einen kleinen Ort, wie z. B. ein Gemach, stärker erhellt als einen großen Raum.[3]) Daraus ersieht man also deutlich, daß die Leuchtkraft eines und desselben Körpers auch einen beliebigen anderen kleinen Körper mehr beleuchtet als einen größeren und zwar im Verhältnis ihrer Quantitäten. Dies ergibt sich aus folgender Erwägung:

---

1) Lucretius erklärt als Vertreter der Formenstrahlung die Wahrnehmung der Dinge und besonders ihr Erscheinen hinter dem Spiegel in folgender Weise (de rerum nat. IV 244 ff. u. 270 ff.): Sobald sich das Bild vom Gegenstande ablöst, treibt und stößt es alle Luft vor sich her bis zum Auge. Die Luftschichten bestreichen die Pupille, dringen ein und führen das Bild mit sich. Dadurch wird nun der Abstand jeglichen Dinges wahrgenommen. Denn je größer die Masse und je länger die Luftsäule ist, desto entfernter erscheint der Gegenstand.

Beim Sehen der Dinge in einem Spiegel löst sich zuerst die Form des Spiegels selbst ab und stößt die Luft vor sich her, die dann mit dem Bilde des Spiegels zum Auge gelangt. Unterdessen hat sich aber auch von unserem Körper, der vor dem Spiegel steht, ein Bild abgelöst, das die Luft vor sich her zum Spiegel und dann wieder zum Auge getrieben hat und auf diesem Wege selbst zum Gesichtsorgane gelangt. Aus der Zeit, die verstreicht zwischen dem ersten Eindrucke der Spiegelform und dem zweiten des Körperbildes vermittels des Spiegels, urteilen wir, daß unser Bild sich hinter dem Spiegel von ihm getrennt und entfernt befinde.

Vgl. Gottlieb Schneider, Anm. u. Erläut. zu Eklogas Phys. Jena u. Leipzig 1831. S. 247 f.

2) Alhazen opt. thes. II 40: Ein Gegenstand, der dem Auge nahe ist, wird deutlicher gesehen.

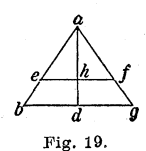


Fig. 19.

3) Witelo II 24: Jeder leuchtende Körper erhellt einen kleinen um sich herum abgeschlossenen Raum stärker als einen größeren. Eine einzige Lampe erhellt eine kleine Kammer stärker als ein Haus oder eine große Kammer. Im Raume *aehf* (Fig. 19) werden die Strahlen, die vom Lichte *a* kommen, mehr zusammengedrängt (gehäuft) als im Raume *abdg*. Sie wirken also im kleineren Raume stärker, weil ihre Kräfte mehr geeint sind. Vgl. Tideus de spec. unten S. 91.

Es verhält sich die Leuchtkraft eines Körpers zum Körper selbst wie die Leuchtkraft eines Teiles des Körpers zu diesem Teile.[1]) Ist z. B. ab ein leuchtender Körper, so verhält sich die Leuchtkraft von ab zum Körper ab wie die Leuchtkraft eines Teiles von ab zu diesem Teile. Dies läßt sich folgendermaßen beweisen:

Wären die beiden Verhältnisse nicht gleich, so müßte das eine entweder größer oder kleiner sein als das andere. Nehmen wir zunächst den ersten Fall an, daß das eine Verhältnis größer sei als das andere.

Wir stellen (Fig. 20) die Kraft von ab durch die Linie gd dar, g sei die Kraft von a, d die Kraft von b. Wenn also $g:a > gd:ab$ und $d:b > gd:ab$, dann ist, wenn wir verbinden[2]) $gd:ab > gd:ab$, was ein Unding ist.

Und wenn wir das Verhältnis

$$g:a < gd:ab$$

und

$$d:b < gd:ab$$

bilden, so ergibt sich ganz ähnlich $gd:ab < gd:ab$, was wiederum unmöglich ist. Folglich kann nur die Proportion bestehen:

$$g:a = gd:ab.$$

g d
b a

Fig. 20.

Daraus folgt aber, daß das Verhältnis eines leuchtenden Körpers zur Leuchtkraft stets ein und dasselbe ist und nicht bald größer und bald kleiner. Eine gegebene Kraft (vis data) übt auf einen gegebenen Gegenstand stets einen und denselben Einfluß aus und nicht bald einen stärkeren, bald einen schwächeren.

Wirkt z. B. (Fig. 21) eine gegebene Kraft a auf einen gegebenen Körper bg mit dem Erfolge b, dann verursacht a stets diesen Eindruck b auf bg und nicht bald einen größeren, bald einen geringeren als b. Würde nämlich die Kraft a bald einen Eindruck b auf bg machen, bald einen von b verschiedenen, dann wäre das Verhältnis der Kraft a zum Körper a bald größer, bald kleiner, was gegen das verstößt, was wir soeben bewiesen haben. Folglich ist der Einfluß eines leuch-

g b
b
a

Fig. 21.

1) Witelo Opt. II 6: Das Verhältnis der Kraft eines ganzen leuchtenden Körpers zum ganzen leuchtenden Körper selbst ist wie das Verhältnis eines bestimmten Kraftteiles zu dem ihm proportionalen Körperteil.

2) a, b, g, d, ab, gd sind Strecken, die in dem Zusammenhange stehen sollen, daß $a+b=\overline{ab}$; $g+d=\overline{gd}$ ist und daß zugleich $\frac{g}{a} > \frac{\overline{gd}}{\overline{ab}}$ und $\frac{d}{b} > \frac{\overline{gd}}{\overline{ab}}$. Diese Bedingungen können aber nicht zugleich erfüllt sein, denn bilden wir:

$$g > \frac{\overline{gd}}{\overline{ab}} \cdot a,$$

$$d > \frac{\overline{gd}}{\overline{ab}} \cdot b,$$

so erhalten wir:

$$g+d > \frac{\overline{gd}\cdot(a+b)}{\overline{ab}}$$

oder

$$(g+d):(a+b) > \overline{gd}:\overline{ab},$$

was sich widerspricht.

tenden Körpers auf einen Gegenstand unveränderlich.[1]) Wechselt hingegen die einwirkende Kraft, so ändert sich dementsprechend auch notwendig der Eindruck. Es muß also auch ein stärkeres Licht einen größeren Lichteindruck auf einen gegebenen Körper ausüben als ein schwächeres, wie wir noch besonders an folgendem Beispiel zeigen wollen.

Es sei (Fig. 22)[2]) die Lichtquelle bei *a*, der beleuchtete Körper *bg*. Die Kraft, die *bg* beleuchtet, erhellt dann auch die im Dreieck *abg* enthaltene Luft. Wir ziehen zu *bg* eine Parallele *de* und nehmen *d* und *e* als Schnittpunkte mit *ab* und *ag*. Von *b* und *g* aus seien ferner die Lote auf *de* gefällt, *bu* und *gz*. Dann ist $uz = bg$. Die Punkte *u* und *z* verbinden wir noch mit *a* und bezeichnen die Schnitte dieser Linien und *bg* mit *h* und *t*.

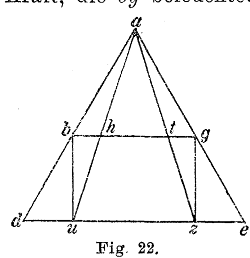


Fig. 22.

Nun behaupten wir, daß ein Gegenstand bei *bg* stärker beleuchtet wird als in größerer Entfernung, z. B. bei *de*, und zwar deshalb, weil in letzterem Falle die Kraft, die das Licht eindrückt, schwächer ist. Dies beweisen wir, wie folgt:

Die Kraft, durch welche das Licht auf den Körper *bg* eingedrückt wird, ist dieselbe, die das Licht auf die ganze Dreiecksfläche *abg* ergießt, deren Grenzen die Strahlen *abd* und *age* bilden. In dem Bereiche *aht* schreitet deshalb nur ein Teil dieser Kraft, mithin eine schwächere, fort[3]), und zwar erstreckt sie sich zwischen den Grenzlinien *ahu* und *atz*. Darum ist auch die Kraft, die im Dreieck *auz* fortschreitet, schwächer als die im Dreieck *ade*, denn die im Dreieck *auz* fortschreitende kann nicht bis zu den Linien *abd* und *age* gelangen.

Nun ist aber das Verhältnis der Kraft, die zu *h* und *t* gelangt, zu ihrem Eindruck auf den Körper, der von den zwei Punkten *u* und *z* begrenzt wird, ein anderes[4]) als das Verhältnis der Kraft, die zu den zwei Punkten *b* und *g* kommt, zu ihrem Eindruck auf den Körper zwischen *u* und *z*.[5])

Aber das Verhältnis der auf *ht* fallenden Kraft zu ihrem Eindruck auf *uz* ist gleich dem Verhältnis der Kraft, die auf *bg* kommt, zu ihrem Eindruck auf *uz*.[6]) Und wenn wir vertauschen, so erhalten wir:

Das Verhältnis der Kraft auf *ht* zur Kraft auf *bg* ist gleich dem Verhältnis des Eindruckes von *ht* auf *uz* zum Eindruck der Kraft *bg* auf *uz*. Nun haben wir aber schon gezeigt, daß das Licht bei *ht* schwächer ist als das Licht bei *bg*. Folglich ist auch der Eindruck von *ht* auf *uz* schwächer als der Eindruck von *bg* auf *uz*. Und die Kraft, die zu *bg* kommt, wirkt erst auf *uz*, wenn sie schon in *bg* gewesen ist, denn sie ist immer von den Grenzen *abd* und *age* eingeschlossen.

So ergibt sich also unser Satz, daß eine Lichtquelle auf einen nahen Körper einen stärkeren Eindruck macht als auf einen entfernteren, weshalb ein Gegen-

---

1) Witelo II 7: Von jedem leuchtenden Körper, der nach Form und Lage unveränderlich ist, erstreckt sich auf einen anderen gleichen und homogenen Körper, der dem ersten unmittelbar oder gleichmäßig mittelbar gegenübergestellt ist, immer eine gleiche und gleichmäßige Wirkung.

2) Denselben Beweis mit Figur hat wiederum Witelo aufgenommen, Opt. II 22: Jeder dunkle Körper wird von einem leuchtenden nahen Körper stärker erhellt als von einem entfernten.

3) Witelo, der diesen Beweis nebst Zeichnung aus Alkindî entnimmt (II 22), fügt hier bei: Da jeder Punkt in dem Dreieck *abg* gleichmäßig erhellt ist, so enthält Dreieck *aht* als Teil von Dreieck *abg* weniger Licht.

4) Das Verhältnis ist kleiner, wie Witelo l. c. bemerkt.

5) Witelo: Weil das auf *bg* fallende Licht mehr ist als das auf *ht* kommende.

6) Witelo hat *bg* (das aber gleich *uz* ist) nach dem Satze: Das Verhältnis der Kraft des ganzen leuchtenden Körpers zum ganzen leuchtenden Körper ist wie das eines bestimmten Teiles der Kraft zum entsprechenden Teile des Körpers.

stand notwendig mehr erhellt wird, wenn er der Lichtquelle nahe ist, als wenn er weiter von ihr absteht.[1])

23. Nun werden zwei optische Täuschungen besprochen, die aus der Beschaffenheit des Sehwinkels folgen.

Was unter gleichem Winkel gesehen wird, erscheint dem Auge gleich groß.[2])

Es sei (Fig. 23) das Auge bei *a* und die Grenzlinien des Lichtes, das vom Auge aus gewirkt wird, seien die beiden Linien *ab* und *ag*. Dann scheinen die Quantitäten, welche die Linien *ab* und *ag* einschließen, für den Blick gleich zu sein, was sich in folgender Weise zeigen läßt:

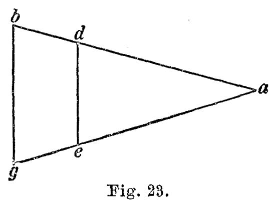


Fig. 23.

Wir nehmen an, es stellen die Verbindungslinien der Punkte *b*, *g* und *d*, *e* die in Frage stehenden Größen dar. Das Auge sieht nun die beiden Punkte *d* und *b* auf einer Linie, nämlich auf *ab*, und ebenso die Punkte *g* und *e* auf der Linie *ag*. Es sieht also keinen der Endpunkte der beiden Linien *bg* und *de* vor den anderen Punkten der einschließenden Strahlen hervorragen, sondern sieht sie genau hintereinander. Wenn aber ein Gegenstand einen anderen nicht zu überragen scheint, so werden beide gleich groß gesehen, weil einer den anderen genau bedeckt. Aus diesem Grunde scheinen auch die Quantitäten *de* und *bg* gleich hoch zu sein, weil die vordere die hintere genau verdeckt.

24. Von den Winkeln, die durch die Grenzlinien des aus dem Auge austretenden Lichtes gebildet werden, nimmt ein kleinerer einen gegebenen Gegenstand als kleiner wahr, ein größerer als größer.[3])

Wir bezeichnen (Fig. 24) mit *a* das Auge und den Winkel *bag* als den Winkel, den die Grenzstrahlen des aus dem Auge tretenden Lichtes bilden. Die Punkte *b* und *g* werden durch eine Linie verbunden, und auf dieser eine Strecke *gd* angenommen, die von dem Winkel *dag* eingeschlossen wird.

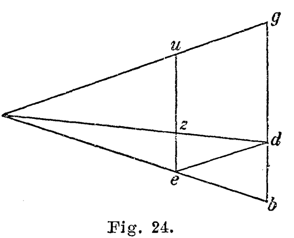


Fig. 24.

Dann behaupte ich, daß die Quantität von *dg* unter dem kleineren Winkel *dag* kleiner gesehen wird als eine gleich große Strecke *ue* unter dem größeren Winkel *bag*.

Zum Beweise werde von *d* aus eine Parallele zu *ag* gezogen; sie sei *de*. Von *e* aus ziehe man eine Parallele zu *bg*, bis sie *ag* schneidet; sie sei *eu*. Dann ist das Viereck *deug* ein Parallelogramm und die Seite *dg* gleich unserer Strecke *ue*. Bezeichnet man nun den Ort, wo die Linie *ad* die Linie *eu* schneidet, mit *z*, so ist *zu* ein Teil von *eu* und deshalb kleiner als *eu*. Zugleich aber wird nach dem vorausgehenden Satze *zu* gleich groß wie *dg* gesehen, da beide unter demselben Winkel stehen. *dg* ist aber gleich *ue*, und *ue* wird unter dem größeren Winkel *bag* ebenso groß wie *bg* wahrgenommen. Also muß *dg* unter dem kleineren Winkel *dag* kleiner gesehen werden und größer, wenn es von dem größeren Winkel *bag* eingeschlossen wird.

---

1) Euklid behandelt diese Frage in seiner Optik prop. II. Sein Beweis ist kurz der, daß *bg* von mehr Strahlen erfaßt wird und also mehr Licht bekommt als *uz*, weshalb es auch deutlicher gesehen wird. Vgl. Nr. 11 dieser Abhandlung. Witelo IV 15.

2) Dasselbe bei Euklid, Optik pr. 7; Witelo IV 19. — Ptolemaeus bemerkt hierzu Opt. II S. 26: „Wenn die Quantität des Abstandes der beiden Strecken (*bg* und *de*) nicht merklich groß ist."

3) Euklid, Opt. Satz 5; 6: „Ein Gegenstand, der unter kleinerem Sehwinkel gesehen wird, erscheint dem Auge kleiner, als wenn er unter größerem gesehen wird." Witelo IV 20. — Roger Baco op. mai. II 114f. lehrt mit Berufung auf Alhazen, daß der Sehwinkel allein nicht hinreiche. Vgl. Nr. 11 unserer Abhandlung.

SCHLUSS.

Die vorliegende Arbeit ist ein Versuch, die optische Schrift 'de aspectibus' von Alkindî nach ihrem Inhalte, ihren Quellen sowie ihrem Einfluß auf die physikalische Literatur der nachfolgenden Zeit darzustellen. Wie schon eingangs erwähnt, trägt sie ganz das Gepräge der alexandrinischen Schule, lehnt sich aber vorzugsweise an die Optik des Euklid an, die dem Verfasser wohl in der Rezension des Theon aus Alexandrien (gegen Ende des 4. Jahrh. n. Chr.) vorlag. Wir schließen dies daraus, daß Alkindî gerade die Einleitung zur Euklidischen Optik, die sich nur in der Rezension von Theon vorfindet, in ausgiebigster Weise verwertet. Außerdem finden sich aber in unserer Schrift auch Lehren aus der angeblichen Katoptrik des Euklid, aus der Optik des Ptolemaeus, der Katoptrik des Heron, der letzterem zugeschriebenen Abhandlung über die Definitionen und aus der Optik des Domninos benützt. Daneben sind Platonische und Aristotelische Anschauungen und Begriffe unverkennbar. Auffallend ist, daß die Strahlenbrechung (Dioptrik) nicht behandelt wird, die doch Ptolemaeus ziemlich genau kannte.

Bedeutend ist der Einfluß der Alkindischen Schrift auf spätere Arbeiten, besonders im Zeitalter der nachfolgenden Scholastik. Hier ist es vor allem Roger Baco, der den gelehrten Araber nicht bloß zu den Meistern der Perspektive zählt, sondern sich auch in seiner Perspectiva sowie in dem Traktat über die Fortpflanzung der Spezies (Strahlen) immer wieder auf unsere Schrift beruft (vgl. op. mai. II 2f. 50. 68. 71. 459f. 483f. 494—496. 499. 528. 542). Einen großen Teil derselben hat sodann auch Witelo in seine Optik aufgenommen, ohne jedoch den Autor zu nennen (vgl. II 6f. 10. 17 – 22. 24. 27. 28ff.; IV 15. 19f.; V 6. 20. 23f.). Es kommt also auch die Schrift 'de aspectibus' von Alkindî wesentlich in Betracht neben der Optik des Alhazen, des Ptolemaeus, Euklid, der Katoptrik des Heron, der (Pseudo-) Euklidischen Schrift 'de speculis' (siehe unten) u. a., aus denen Witelo seine Optik kompiliert hat. Ferner kennt auch Albertus Magnus unsere Schrift und zitiert sie z. B. in parv. nat. p. I tr. I c. 5. Vincenz von Beauvais bespricht im spec. nat. III 80 die Erscheinung, daß man die vor dem Spiegel befindlichen Dinge in der Tiefe des Spiegels sieht, ferner daß der Beschauer seine eigene Vorderseite und nicht seine Rückseite wahrnimmt, was ganz an das erinnert, was wir in Nr. 19 unserer Alkindischen Schrift gehört haben. Der Einfluß derselben erstreckt sich auch noch auf Leonardo da Vinci, wie eine vor kurzem in Erlangen erschienene Dissertation über die Physik des Leonardo da Vinci von O. Werner zeigt. Ja sogar D. Schwenter († 1636, vgl. F. Klee, Gesch. d. Phys. a. d. Altd. Univ., Erlangen, Diss. 1908, S. 122) zitiert noch die 'Scientia de aspectibus' des Alkindî, und Cardanus († 1576) zählt ihn zu den zwölf bis zu seiner Zeit bekannten größten Geistern (De Subtilitate l. XVI).

TIDEUS DE SPECULIS

EDIDIT

AXEL ANTHON BJÖRNBO

COMMENTARIIS INSTRUXIT

SEB. VOGL

SERMO DE EO QUOD [UIDET] HOMO IN SPECULO ET IN EO, QUOD NON EST SPECULUM, ET DE CAUSIS ILLIUS, QUEM COLLEGIT EX LIBRIS ANTIQUORUM TIDEUS FILIUS THEODORI A REGOUI MEDICUS.

Scias, quod illud, quod uidet homo in speculo terso boni ferri, uidetur uerius. Ferrum enim bonum tersum, propterea quod est magis appropriatum redditione luminis cadentis in aere continente quam plurimae res, sicut lapis magnetes appropriatur delatione ferri sine alio lapidum; et sicut iterum appropriatur lapillus alius incessione ad acetum sine alio lapillorum, reddit speculum tersum boni ferri lumen cadens in aere continente redditione optima. Speculum ergo, ubicunque praesens est lumen, reddit ipsum ualde bene.

Quicquid ergo opponitur speculo ex re, cui est aliquid luminis aut ex essentia sua et ipsius substantia aut ex eo, super quod lucet ex lumine rei alterius, recipit speculum ex lumine illius rei oppositae sibi lumen, deinde reddit ipsum simul aut uelocissime ipsi eidem aut alii ex eo, quod uehementius ei est oppositum. Et haec est res, quam scit ille, qui eam expertus est et studet in ea. Nichil est ergo, super quod cadit lumen speculi, quod non reddat formam sui ipsius et suum colorem illi lumini cadenti super se ex illo speculo. Et si uis, dic quod illud lumen, cadens super illam rem, recipit formam illius rei et eius colorem.

1—5. SERMO . . . MEDICUS] PAL Incipit liber Tidei de ymagine speculi K Incipit liber Tadei de speculis *adiec.* L *om.* B. 1. homo] est L. 3. de] *om.* L. ex] L ea ex PA *post ea uerba* libris a *del.* P. 4. Tideus] Tadeus L. 5. a Regoui] a Regoiu P a Ruegoui A arinogoni L. 6. Scias] *post uerbum Scias* equidem *inserit* K. 7. uerius] melius seu uerius L. enim] esse B appropriatum] approbatum L. 9—10. delatione . . . appropriatur] A *bis.* 9. sine] siue B. alio lapidum] aliquo lapide K. 10. sicut] sic B. lapillus alius] id est glareae *marg. adiec.* P lapillis scilicet clareae B. acetum] cetum L acelum B ortum K. sine] siue KB. alio] *om.* PA. lapillorum] lapillo quod refugit ab aceto sicut quidem dicunt B id est qui refugit ab aceto sicut quidam dicunt *marg. adiec.* P. 11—12. tersum . . . Speculum] *om.* A. 11. cadens] *bis* B. 12. Speculum ergo] Speculus igitur B. 13. bene] bonum K. 14. ergo] igitur B. opponitur] opponuntur K. aliquid luminis] numerus K. 15. sua] *om.* K. 16. deinde] LK demum (?) P. 17. reddit] B *bis.* ipsi eidem] ipse eiusdem K. aut alii] alii B. 18. est res] res K. scit] sit A. qui] et B. eam] *om.* K. 19. studet] *corr. ex* stidet B. cadit] cadat B. 20. reddat] PA(?) reddit KLB. formam] *om.* L. lumini] lumen K. 21. uis] nil B.

Et sapientes quidem diuersificati sunt in hoc. Dixerunt enim quidam eorum, quod dispositio in speculo et luminibus in ipso est sicut dispositio luminis uisus, cum obuiat ei, quod aspicitur. Et dixerunt quidam eorum, quod uisus apprehendit per lumen egrediens ex se aut per lumen aeris continentis, quod habet ex longitudine spatii mille stadia, sicut aspectus noster ad stellas in hictu oculi. Et nos non inuenimus huiusmodi uelocitatem in aliqua specierum motuum mobilis de loco ad locum. Neque potest aliquis dicere, quod aliquid spargatur ex uisu et perueniat ad illud, quod uidetur, aut ab eo, quod aspicitur, ad uisum, propterea quod scimus, quod non est possibile in aliqua specierum motus esse speciem, cui sit haec uelocitas. Relinquitur ergo, ut fiat uisus per aerem continentem sparsum inter aspectum et illud quod aspicitur. Est ergo aer uisui sicut instrumentum faciens, quo agit. Dixerunt ergo: Non potest esse, quin aer agens faciat, quod agit existens fixus secundum suam dispositionem aut alteratus a sua dispositione. Si uero est alteratus, tunc non potest esse, quin eius alteratio sit aut propter aspicientem, aut propter illud quod aspicitur, aut ex utrisque simul.

Quod si aliquis dixerit, quod aer agit existens secundum suam dispositionem non alteratus, et quod non apprehendit res nisi per rem, qua homo obuiat corporibus duris, sicut est baculus aut uirga, per quem homo obuiat rei prohibenti ex corporibus duris in tenebris uehementibus et cognoscit eam et sentit eam per tactum, dicatur ei, quod omne, cuius dispositio est haec dispositio non apprehendit rem nisi per cogitationem et ratiocinationem. Et apprehensio uisus in aere sparso est absque cogitatione et sine ratiocinatione.

Qui autem dicit, quod aer lucidus alteratur et conuertitur propter diuersitatem colorum rerum sensibilium, et quod, quando conuertitur, peruenit eius alteratio uelocissime ad uisum, et sentit eam uisus et apprehendit eam, tunc illud est uerum, apparens, detectum.

Verumtamen haec apprehensio non significat cum colore quantitatem eius, quod aspicitur, neque ipsius situm in loco suo neque longitudinem spatii inter aspectum et eius, quod aspicitur, neque ipsius figuram, neque motum eius. Verum quandoque apprehendit uisus omnia ista. Non est igitur negatum, quin aer continens alteratus ex coloribus rerum, quae aspiciuntur, significet colores earum, cum fiat color eius color earum, et fiat

---

1. quidem] quidam L. 1—3. enim . . . dixerunt] *om.* B. 2. eorum] *om.* K. 4. egrediens . . . lumen] *om.* K. 6. hictu] PA ictu KBL. huiusmodi] huius K. 7. specierum] spē K. mobilis] mouebitur B. 8. illud] illum K. 10. motus] motas A. 12. Est] Cum K. 13. Dixerunt] *Ante hoc uerbum* dixit iterum *del.* P. 14. fixus] *om.* K. suam dispositionem] PAB dispositionem suam KL. 15. quin] *om.* K. eius] *om.* B. 16. illud] *om.* K. aut] aut quod K. 18. agit] agens uel agit L. suam] *om.* K. 19. per rem] p tē (= partem) L. 20. aut] uel L. quem] A q̃ (= quem) PB quam KL. 22. et sentit eam] *om.* L. omne, cuius] omnis eius L. 23. haec dispositio] *marg. adiec.* P. cogitationem] PAB cog°nē K cognitionem L. ratiocinationem. Et] apprehensionem rationis L. 24. aere sparso] aere sparsa B se sparsi L. sine] *om.* KL. 26. et conuertitur] *om.* L. 28—33 et . . . uisus] *om.* K. 31. situm] situm BLPA. 32. et] *om.* B. 33. neque motum eius] nec eius motum L. uisus] *om.* L. ista] ista uisus L. est] *om.* KL. 34. igitur] ergo B. negatum] PAB negant KL. alteratus] PKL alteratas A *om.* B.

alteratio humiditatum contentarum cum oculo cum alteratione eius. Et non alterantur humiditates, nisi quia sunt homogeneae cum albedine et claritate et luce.

Et si non esset possibile uisum apprehendere per hanc significationem quantitatem rei et eius situm et ipsius elongationem et figuram eius et ipsius motum, contingeret, ne aer redderet uisui nisi colores tantum. Sed nos inuenimus uisum, cum obuiat ei, quod aspicitur, apprehendere has omnes species. Et esset impossibile, ut uidens apprehenderet situm rerum in locis suis et spacia earum, si uirtus uidentis non perueniret ad illud, quod aspicitur. Et similiter iterum non cognosceret uisus quantitatem rei, si uirtus eius non contineret eam ex omnibus partibus eius. Oportet ergo, ut apprehensio eorum, quae aspiciuntur, sit apud ea et in locis suis. Et hanc quidem apprehensionem non potest, quin faciat aer, aut quia in natura eius est uirtus uisus, quae apprehendit, sicut apprehendit uisus, aut quin conuertitur ad naturam uidentis per hoc, quod obuiat ei, quamuis illud non inueniatur in aere toto nisi in illo, qui lucidus est.

Et similiter iterum non euacuatur sua receptio luminis a uisu, quin sit aut propterea quia obuiat corpori claro apparente in oculo, aut propter permixtionem suam cum lumine egrediente ab oculo.

Qui autem dicit, quod res egrediens ex oculo peruenit per se ad illud, quod aspicitur, est inconueniens, quoniam nos non inuenimus aliquam specierum motuum mobilis de loco ad locum, cui sit haec uelocitas.

Qui autem dicit, quod lumen lucidum egrediens ex oculo, cum permiscetur aeri sparso, alterat ipsum uelocissime ad essentiam et substantiam suam, est non negatum [lege: negandus] et non inconueniens. Oportet ergo ex hoc sermone, ut sit aer lucidus, sparsus, continens instrumentum uisus, in quo apprehendat omnes res. Et illud est, quoniam est creatura ex genere eius, et est ei similis, et est ei permixtus et commixtus. Et similiter uirtutem uisus claram, lucidam, egredientem superat aer tenebrosus et alterat eam et conuertit ipsam ad naturam sui. Et haec est causa, propter quam non uidetur in nocte.

Et sicut lumen solis alterat aerem ad lumen in hictu oculi, similiter lumen egrediens ex oculo alterat aerem in hictu oculi. Et similiter iterum alteratur lumen egrediens ex oculo ab aere in hictu oculi.

---

4. hanc] hanc ergo K. 5. rei] *om.* K. eius . . . ipsius] ipsius situm et L situm eius et ipsius K. et figuram] ac figuram L. 7. quod] *om.* L. 8. species] *Ante hoc uerbum* res *del.* P. esset] est K. uidens] PAB uisus KL. rerum] et non K 9. spatia] PAL spatio B spatium K. earum] eorum K 10. quantitatem rei] cuius quantitatem B. 11. eius non] non L. 13. aut] et K. 14. eius] *suprascr.* B. quin] AL quoniam PKB. 15. obuiat] obuia (!) K. illud] res B. 16. toto] loco K. 17. quin] PAL quoniam KB. 18. aut] *om.* K. quia] PA quod KBL. 19. permixtionem] PAL mixtionem KB. 20. ex oculu] ab oculo K *om.* L. illud] alium K. 21. est] *om.* K. 23. cum permiscetur] commiscetur K. 24 ad essentiam] *om.* B. 25. negatum] PAL neḡt B negant K. 26. uisus, in] A uisui PBL uisu K. 27. et est ei] et etiam ei B *om.* L. 28. similiter] aliter B. uirtutem] uirtute B. 29. conuertit] conuertet B. 30. ipsam] eam K. propter quam] quapropter B. 32. hictu] PA ictu KBL. 32—33. similiter . . . oculi] *om.* K. 33. hictu] PA ictu BL. iterum] uero K. 34. ex] ab K. ab] ex K. hictu] PA ictu KBL.

Significatio autem, quod quantitas rei et eius situs et quae sunt illi similia non apprehenduntur, nisi in suo situ et loco eius, est haec: Si uisus apprehendit quantitatem rei et eius situm, tunc peruenit ad eam uirtus uisus. Sed uisus apprehendit quantitatem rei et eius situm, ergo procul dubio peruenit ad eam uirtus uisus. Et similiter est res in reliquis speciebus. Si ergo uirtus uisus peruenit ad sensatum, aut peruenit per se ipsam, aut per instrumentum deferens eam. Et non peruenit per se ipsam, propter prohibitionem illius in inuentione motus moti de loco ad locum motu, cui sit huiusmodi uelocitas. Et non fit illud nisi per instrumentum aeris et eius conuersionem ad naturam uisus.

Et dixerunt similiter iterum: lumen delatum in aere sparsum ex speculo non euacuatur, quin ipsum reddat formam sui ipsius aeri, super quem cadit, et lumen recipit illud ab aere. Cum ergo speculi lumen formam eius recipit, super quod cadit, et ipsius colorem, reddit utrumque speculo simul, quod est eius radix et minera et sedes. Et similiter omnia lumina suscipiunt formam omnis rei, super quam lucent, et reddunt eam simul uelocissime suis sedibus et suis mineris et radicibus suis, ex quibus est eorum exitus.

Verum tamen elementa propterea quod diuersificantur — et sunt ex eis ignis et aer et aqua et terra et quae sunt post ea partium, quorum multitudo non numeratur — diuersificatur lumen cuiusque eorum a suo compari per quantitatem diuersitatis, quae est inter ipsum et ipsam, propter quam diuersificantur lumina. Et propterea quod diuersificantur lumina rerum, quae sunt eis ex naturis et creationibus earum, aut ex eo quod lucet super eas ex luminibus rerum aliarum, est receptio cuiusque partis a suo lumine de eo, quod ei reddit, et penetratio eius, quod ei reddit in ipsa secundum quantitatem compositionis illius corporis et permixtionis eius et secundum quantitatem commixtionis luminis, quod affert ei illud, quod affert iterum. Sic ergo si ferrum et lignum ponantur in sole calido, ualde retinebit ferrum

---

1. eius] eiusdem B. et quae] quae ei B. illi] illis L *om.* B. 2. loco] in loco K. 3. apprehendit] *corr. ex* apprehendat B. situm] non sit(!) K. peruenit] uenit L. 5. Et . . . res] *om.* B. reliquis] ceteris K. 6. uisus] *om.* B. per] ad KB. per] propter K ad B. 7. eam] ipsam K. ipsam] *om.* K. 8. inuentione] in iunctione K. motu] motus B. cui] cuius P. sit] fit B. 9. fit] PBL sit AK. per] *om.* K. 10. conuersionem] conuersione K. 11. iterum] v^{m} K. 12. quin] per B. reddat] reddit B. super] similiter *et post hoc uerbum* iterum lumen delatum in aere sparsum *del.* B. 13. lumen] lume B. illud] *om.* B. 14. super] similiter B. et] q^{a} B. 15. est] *om.* K. eius] ei(!) L. et minera] *om.* K. sedes] uel quies *marg. m. 1. adiec.* P sedes uel quies AB sedes (*corr. ex* sedis) vel quies K quies et sedes L. 16. formam] *post hoc uerbum* eius *del.* K. super] similiter B. quam] KL quae PAB. reddunt] reddant B. 16—17. uelocissime . . . ex] super sedi et super mineris et super radicibus ex L. 17. sedibus] *om.* B. mineris] *corr. ex* mineribus P numeris (?) K. 17—19. et . . . sunt] *infra post uerba* „quod diuersificantur lumina" *false posita* K. 16. ex] a K. 18. propterea quod] quae K. ex eis ignis et] *om.* B. ex eis ignis L. 19. aer et] aer BL. post ea partium] partium postea L. quorum] quarum K. 20. eorum] earum B. 21. diuersitatis] diuersitatem K. ipsum] ipsam B. propter] per K. quam] quod L. 22. propterea quod] pcm^{a} *del. et* propterea *marg. adiec.* B. 23. eis] res K *om.* B. naturis] natures A. et] eis B. creationibus] rationibus K creationibus et B. aut] autem B. 24. eas] eos K. 25. et . . . reddit] *om.* K. 26. et] *om.* K. 27. affert] PAL aft' B asserit K. ei . . . affert] *om.* BK. iterum] ei iterum L. 28. Sic] PBL Sic̄ (= Sicut) AK.

ex calore illud, quod non retinebit lignum. Similiter speculum tersum retinet lumina et formas et colores et figuras, quae reddunt ei illa lumina, retentione optima, cuius similis non est alii de illis, cuius natura non est natura eius.

Quod si dixerit aliquis: quae est natura luminis, an est substantia, an accidens? Si autem est substantia, an est corpus, an non corpus? Si autem est corpus, an est ignis, an aer, an terra, an aqua? Dicatur ei, quod responsio in hoc est plurima, et diuersitas in eo est uehemens. Nam si responderimus in eo exquisite, prolongabitur sermo in ipso et egrediemur ab intentione nostra. Intentio namque in hoc nostro libro est enuntiare de qualitate eius quod uidetur in speculo et in non speculo. Verumtamen nos loquimur in illo secundum quantitatem uirtutis quam breuiore sermone poterimus.

Quidam autem phylosophi dixerunt, quod lumen est ignis et quod est corpus. Et ratiocinati sunt, quod est corpus, quoniam dixerunt: Propterea quod uidemus pupillam unius duorum oculorum dilatari, cum clauditur alter, scimus, quod non esset illud, si non substantia corporea repleret eos. Et ratiocinati sunt, quod est ignis, quoniam dixerunt: Cum aggregatur in speculo terso aut corpore terso, adhurit.

Redeamus ergo ad intentionem nostram in speculo, et dicamus: Non est aliquid habens lumen, cuius lumen in aere delatum, sparsum ab eo, non sit latius eo in quantitate, sicut candela ignis quantitatis paruae, cuius lumen replet domum. Et hoc fit, quod aspiciens in speculo, quod est aequale suae faciei aut maior [lege: maius] facie ipsius, uidet faciem suam cum quantitate ipsius non maiorem neque minorem, et fit, quod aspiciens in speculo, quod est minus facie sua, uidet faciem suam paruam. Et illud est, quoniam ex speculo magno oritur lumen maioris quantitatis, quam sit facies aspicientis in eo. Cum ergo cadit illud lumen super faciem aspicientis in illo speculo, formatur forma faciei in illo lumine cum quantitate sua, aequaliter sicut fit in sigillo, quo sigillatur cera aut lutum. Accipit enim

---

1. illud] id B. non] *om.* K. 2. retinet] *corr. ex* retinerit (?) P retinebit K. lumina et] lumina L. illa lumina] lumina illa KL. 3. alii] alia B. illis] istis K. 4. natura] vera K. 5. quae] qualis K. an est] an sit L. an] aut L. 6. autem] *om.* K. an] autem K. an non corpus] an non B autem non corpus K. 7. est] *om.* B. an] autem K. an] autem est K *om.* B. an] autem K aut B. an] aut K. 8. in] *om.* K. et] c̄ (= cum) K. eo] PA ea KB hoc L. uehemens] plus est uehemens K. 9. responderimus] PAL respondemus KB. eo] ea B. prolongabitur] in ea prolongabitur B. egrediemur] ingrediemur B. 11. uidetur] videbitur K. in] *corr. ex* de K. in non] non in B. 12. loquimur] AKB loquemur PL. in illo] AKL cum illo B nullo (?) P. 15. Et ratiocinati] ratiocinati super B. quod] *om.* BK. 16. quod uidemus] *om.* L. 17. esset] est B. si non] sn̄ (= sine) K. 18. Et . . . quod] Ratiocinati B. 19. aut] aut in B. adhurit] PA adurit BL addidit K. 21. aliquid] aliquis K. 22. cuius lumen] *om.* KL. non] PAB vt K quod L. ignis] igitur K. 23. Et] In L. 24. suae] L *bis.* aut maior] an minor B. facie] *corr. ex* faciei P. uidet] videntis K. cum] in K. 25. neque] nec L. et fit quod] quod sit K et sit quod B. 26—27. quod . . . speculo] *om.* K. 27. ex] in B. oritur] uel relucet *marg. m.* 1. *adiec.* P relucet L oritur et relucet B. 28. facies aspicientis] facies aspicien (!) K. 29. in illo] AL nullo PBK. faciei] facie B. in illo] ALB nullo P in nullo K. cum] quam L. quantitate] quantitate uel m̄ B. sua] B *bis.* 30. sicut] si B. quo] cum L quod K. aut lutum] verumptamen K.

illud lutum aut cera ex illo sigillo cum quantitate sua aequaliter, et remanet illud, quod superfluit de luto uacuum a figura et forma nichil habens. Reddit ergo illud lumen formam illam, sicut suscepit eam suo corpori, quod est speculum, et formatur facies in illo speculo cum integritate suae quantitatis. Quod si speculum fuerit cum faciei quantitate aequaliter, implebitur forma faciei, sicut impletur lutum, quod sigillatur cum sigillo aequali sibi in quantitate. Et si speculum fuerit maius facie in quantitate, recipiet forma de speculo per mensuram suam, et remanebit illud, quod superfluit de speculo, uacuum.

Hoc fit, cum non elongatur speculum a facie aspicientis in eo, nisi sicut oportet ex spatio, et est propinquum faciei, ita ut quasi non sit inter eam et inter ipsum nisi quantitas palmi. Cum autem elongatur speculum, tunc indicium eius est aliud ab hoc. Si autem speculum, quod est minus facie aspicientis in eo, fuerit paruae quantitatis taliter, ne egrediatur, quin sit superius lumen eius latius facie aspicientis in eo, tunc lumen eius, illud cum cadit super faciem aspicientis, informatur forma faciei suae in superiori illius luminis cum integritate quantitatis suae aequaliter, et reddit eam illud lumen superius ei, quod sequitur ipsum, et reddit eam illi, quod sequitur ipsum, semper, donec perueniat forma ad speculum ipsum. Et est illud per coartationem et aggregationem. Et lumen indiget illo. Et ex hoc modo fit, quod aspiciens in speculo stricto longo uidet formam faciei suae longam, quoniam superius luminis sui est multae quantitatis amplum. Cadit ergo super faciem et recipit formam cum integritate quantitatis eius. Deinde reddit eam radici strictae longe per coartationem, quam facit in illa forma et diminutionem latitudinis eius et additionem in ipsius longitudine, donec ponit eam cum mensura, quam comprehendit illud speculum paruae latitudinis longum. Et indiget re illa, sicut indigent sigillatores prolongatione luti sigillo longo et rotundatione eius ad sigillum rotundum.

Et ex hoc modo fit, quod aspiciens in speculo paruo, cum appropinquat ipsum faciei, ita ut, quasi sit cum facie sua simul, non uidet eam totam.

---

1. illud] *om.* K. quantitate] uel mensura *marg. m. 1. adiec.* P quantitate uel mensura A. 2. a] et B. 4. et] *om.* B. illo] *ante hoc uerbum* eo *del.* K. 7. cum] *om.* K. aequali] aequale K. in] *om.* B. 7—8. Et . . . quantitate] *om.* K. 7. Et] *om.* B. 7—8. fuerit . . . quantitate] *marg. m. 1. adiec.* A. 7. maius] magis B. 10. fit] sit B. cum] cui K. nisi sicut] nisi sic B quod sint K. 11. est] etiam B. ut quasi] quod B ut KL. inter eam] A inteream B inter ea P interea K quasi inter eam L. 12. inter] *om.* BL. quantitas] qualitas K. elongatur] elongat B. 14. facie] a facie B. 14—15. fuerit . . . eo] *om.* L. 14. fuerit] fuit B. egrediatur] egrediantur B. 15. superius] supius(!) B. facie] a facie B. 16. cum] est, cum K quod L. 17. cum] est *in corr.* K. aequaliter] qualiter B. 18. lumen] *om.* P. ei] *om.* K. sequitur] se B. 18—19. et . . . sequitur ipsum] PL *marg. m. 1. uel 2. adiec.* A *om.* KB. 19. ipsum] *om.* K. est] cum K. coartationem et] coactationem K. 20. illo] illa K. 22. sui] suae B. amplum] amplius K. 23. recipit] recepto A. 23—25. Deinde . . . eius] *om.* K. 24. quam] quoniam L. 25. diminutionem] diminutione L. eius] id est formae *marg. m. 1. adiec.* P eius formae B *om.* L. 26. ponit] ponat L. comprehendit] apprehendit L. 27. re] rem L *om.* B. sicut] et sicut B. sigillatores] sigillationes(?) P. 28. rotundatione] PA rotundie K rotunditate L longe re rotundatione B. eius] ipsius L. ad sigillum rotundum] sigillo rotundo K ad sigillum longum L. 29. paruo] *om.* B. 30. quasi] *om.* K. simul] *om.* B.

Et quando elongat ipsum a facie sua, uidet formam faciei suae totam. Quoniam quando propinquat faciem suam ei, illud, quod cadit super faciem suam de lumine eius, non comprehendit faciem eius totam, quoniam inferius omnis luminis est strictius superiore eius, et minoris quantitatis. Et cum elongatur facies eius ab eo, quod cadit super faciem suam de ipsius lumine, comprehendit faciem eius totam propter amplitudinem luminis superioris. Quod si speculum fuerit adeo paruae quantitatis, ut superius luminis eius non contineat faciem eius totam, tunc aspiciens in ipsum non uidebit formam faciei suae totam, neque si appropinquauerit ipsam, neque si elongauerit. Et illud est, quoniam superius luminis eius non comprehendit faciem aspicientis. Et hoc quidem non bene intelligit, nisi qui studiosus est in aspectu eius, quoniam quasi uidet illud, quod dicimus, uisibiliter. Ille uero, qui non est sic, indiget testimonio et mora.

Si autem aliquis dixerit: Quo modo fit, quod lumen, cum recipit formam rei, coartat eam et ponit eam cum quantitate corporis sui, a quo incepit, cum corpus eius sit minus forma illius rei in quantitate? Ponite ergo animas uestras ueridicas in speculo paruae latitudinis longo, quod illud, quod minuitur de latitudine formae, additur in eius longitudine, quomodo est uia credulitatis earum in facie, quae est unius palmi in palmum, ut minoretur, donec fiat unius nodi in nodum?

Dicemus: Iam inuenimus sermoni nostro exemplum. Et illud est, quod candela ponitur in domo magno, et impletur domus lumine ex lumine eius; deinde aliquis tegit illam candelam liurello, et comprehendit liurellus illud, quod implebat domum; deinde aliquis super illam candelam ponit uas paruum, et continet uas totum illud lumen. Iam ergo manifestum est, quod lumen coartatur et dilatatur, secundum quod exemplificauimus. Quid ergo prohibet formam in lumine delatam coartari et dilatari? Et neque est res luminis in hoc, quod coartat formam, et aggregat eam, cum cogit

---

2. Quoniam] *om.* B. propinquat] PA appropinquat BKL. ei] Si B ea K. illud] uidet K. 4. luminis] *om.* K. strictius] fructus K. superiore] superioris B. minoris] minore K. cum] non K. 5. eius] *suprascr.* K. quod] *om.* B. suam] *om.* K. 6—7. superioris . . . luminis] *om.* K. 7. eius] *om.* B. 8. ipsum] ipsam K. 9. formam faciei] faciei formam faciei *et ante haec uerba* portionem *del.* B. neque] licet L. appropinquauerit] appropinquauit K appropinquat B. neque] nec L. 10. luminis] est luminis K lumine L 11. non] *om.* K. qui] quia B. 12. quasi] PAL qui KB. 13. uero] etiam K. et mora] AL *marg. m. 1. adiec.* uel statione P et mora vel statione K vel statione et mora B. 14. aliquis dixerit] AKL dixerit quis B aliquis dixerit aliquis P. fit] PAL sit KB. cum] non B. recipit] recepit (?) P. 15. rei] *om.* K. coartat] cartat B. ponit] ponat K po^t B corporis sui] *om.* K. incepit] PAL incipit KB. 16. Ponite] forme K. 17. uestras] nostras K ueridicas] *om.* B. longo] longe K. 19. earum] *om.* L. unius] minus B *om.* K. palmi] palme B. 20. minoretur] minorentur B. 21. Iam] et iam L. sermoni] sermone (?) P. 22. ponitur in domo] in domo ponitur K. magna] BL magno PAK. eius] illius K. 23. tegit] tetigit K. illam . . . illud] intellectum et comprehendit intellectus K. liurello] lintello L lurello B. liurellus] lurellas B luitellus L. 24. implebat] implebit K. domum] domus B. 25. lumen] luminis B. 26. et] quia K. exemplificauimus] PAL exemplificauerimus K exemplificamus B. 28. aggregat] congregat L. 28—80, 1. cum cogit . . . mirabilior] *ad* cogit *marg. m. 1. adiec.* uel facit, ut illud sit necessarium P et facit, ut illud sit necessarium cum cogit . . . mirabilior L et facit ipsum, ut sit necessarium cum cogit . . . mirabilior B cum cogit . . . mirabilior uel facit, ut illud sit necessarium AK.

ipsum ad hoc corpus, quod est radix eius mirabilior, quam quod lapis sustinet ferrum, cum faciunt ipsum indigere hoc quaedam causae eius.

Quod si iterum dixerit aliquis: Quae est causa, propter quam homo uidet unum duo, cum separata est aut separatur una duarum pupillarum eius a loco suo? Dicatur ei, quod duo oculi, quando sunt secundum praeparationem aequalitatis creationis suae, unusquisque eorum reddit illud, quod uidet, loco, cui alter reddit illud idem, quod uidet. Cum uero alterati sunt a praeparatione aequalitatis creationis, unus eorum reddit illud loco alio a loco, cui reddit illud, quod uidet alter. Videt ergo tunc unum duo, scilicet hic et hic.

Et propter illud fit, quod illi, qui ex hominibus est monoculus, non accidit istud. Et significatio super illud est, quod ille, cui aduenit hoc, si claudat unum oculorum suorum aut cooperiat ipsum, non uidet unum nisi unum semper.

Et quidam dixerunt, quod causa in hoc est separatio pupillae a loco suo aut superius aut inferius. Sed illud non est uerum. Nam si esset propter separationem pupillae, accideret in oculo uno. Sed non accidit illud in oculo uno. Illud ergo non est propter separationem pupillae, cum non accidat nisi ambobus.

Quidam autem estimauerunt, quod causa in hoc est permixtio luminis duorum oculorum, et exemplificauerunt illud in domo, intra quam sunt duae candelae. Videt ergo homo sibi ipsi in lumine ambarum permixtarum duas umbras. Sed res non est, sicut isti estimauerunt, in uisu, quamuis sit, sicut estimauerunt, in duabus candelis. Et illud est, quoniam homo uidet sibi ipsi in domo habente duas candelas duas umbras, et non uidet se ipsum nisi unum. Quod si esset res, secundum quod intendunt illi, qui locuntur de candelis, oporteret, ut homo uideret socium suum in domo habente duas candelas duos homines, sicut uidet socium suum, quando separatur [!] pupillam suam, duos homines.

Et dixerunt quidam alii, quod causa in hoc est separatio luminis duo-

---

2. indigere] *om.* K. quaedam] quidam K *corr. ex* quaeque B. causae] causa L esse (eē *pro* cē) K. 3. Quae] Quod K. propter] *om.* KL. quam] quod BL. homo] *om.* P. 4. separata est aut] *om.* K. 5. oculi] circuli K. praeparationem] *marg. adiec.* B. 6. creationis] praeparationis K. suae] siue B suae, tunc L. eorum] *om.* K. 7—9. idem . . . illud] *om.* A. 7. idem] *om.* B. 8. a praeparatione] KL apparitione P apparatione B. aequalitatis] *om.* L. eorum reddit] illorum reddat B. illud] *om.* K. 9. cui] qui K. tunc unum duo] bene duos B. 10. scilicet] *om.* AB. et hic] et ibi L. 11. propter] per P. fit, quod illi, qui] quod fit illi quae B. monoculus] monoculis B. 12. illud] istud K. significatio] si ergo KB. quod] *om.* B. cui] *om.* B. 13. claudat] claudit L. oculorum] oculum K. *bis* aut] an B. 15. in] *om.* K. 16. *bis* aut] an B. 17. oculo] *om.* K. 18. illud] *om.* B. est] est ergo B. 20. estimauerunt] PKL extimauerunt A existimauerunt B. 21. illud] hoc L. 22. ambarum] umbrarum A. 23. sicut] ita sicut K. isti] ipsi L. estimauerunt] PKL extimauerunt A ex(!) B. 24. estimauerunt] PKL extimauerunt A existimauerunt B. in] *om.* K. uidet] *om.* K. 25. habente] habentes P. duas candelas duas umbras] duas umbras PAKB candelas duas L. 26. si] *om.* L. intendunt] intendit K. illi] ipsi L. locuntur] PAB loquuntur L loq² K. 27. oporteret] PKL oportet AB. uideret] uideat B. 28. duos] duo K. 28—29. sicut . . . homines] *om.* K. 28. separatur] separat B. 29 duos homines] *om.* L. 30. luminis] *om.* L.

rum oculorum, et estimauerunt, quod lumen duorum oculorum in praeparatione ipsorum est sicut praeparatio duarum spinarum, quarum radix est separata, et quarum extremitates sunt aggregatae secundum aequalitatem. Et hoc iterum non est uerum. Et testimonium super hoc est appropinquitas eius, quod aspicitur, et eius elongatio. Nam si esset, sicut estimauerunt, uerum, homo, cum appropinquaret rem oculis suis, propinquitate uicina uideret unum duos homines, quoniam duo lumina per estimationem eorum in illo loco sunt separata. Et similiter consequeretur eos, cum elongatur res ab oculis suis elongatione pertranseunte occurrente duabus extremitatibus duorum luminum, aut ut non uiderent eum paenitus, aut ut uiderent eum duos homines. Et noster aspectus ad stellas caeli, et quod est ex stellis, est propinquior significatio ad destruendum sermonem eorum.

Quod si aliquis dixerit: Quae est causa in hoc, quod comprehendimus magnitudinem et paruitatem in rebus? dicatur: paruitas quidem rei et occultatio uestigiorum eius, cum elongatur, et magnitudo eius et apparitio uestigiorum eius, cum appropinquat, est propterea, quod uisus hominum non apprehendunt res nisi per species determinatas ex lumine. Quod ergo uidet homo, est sicut candela. Candelae enim cum approximat res, magnificatur umbra eius, et demonstratur demonstratione ultima. Et quando elongatur res ab ea, minoratur eius umbra, et non demonstratur nisi declaratione debili, quoniam quando approximat illud, quod cooperit, radici luminis, est illud, quod tegit de radice luminis, maius, et est illud, quod cooperit ipsum, fortioris luminis. Et quando elongatur, non cooperit, de radice luminis nisi minus, et est illud, quod cooperit ipsum, debilioris luminis. Et res lucida sicut candela quanto plus elongatur, est illud, quod cadit de lumine eius super oculum, minus et debilius; et quanto plus appropinquat, est illud, quod cadit de lumine eius super oculum, maius et fortius. Et propter illud quanto plus appropinquat, uidet eam oculus maiorem, et lineas eius et eius impressiones clarius et manifestius; et quanto plus elongatur, uidet eam oculus minorem, et lineas eius et ipsius impressiones occultiores et magis tectas.

---

1. estimauerunt] extimauerunt A. 2. ipsorum] ipsarum B. praeparatio] conperdictio(!) B. 4. non] *ante hoc uerbum* est *del.* K. uerum] iterum K non B. appropinquitas] P propinquitas AKL appropinquatis(!) B. 5. Nam] *ante hoc uerbum* Quod *del.* P. sicut] et K. 6. homo cum] homini (hōī *pro* hō c̄) B. rem] re B. propinquitate] propinquatite(!) B. 9. pertranseunte] transeunte K pertranseunte et B. 10. ut non] *non* BL. ut non uiderent eum] ut uideret cum *corr. ex* uideret ut cum K. ut] *om.* L. 11. uiderent] uideret B uideant K. noster] nunc (n̄c *pro* n̄r) B. 12. stellis, est] stellis B. 14. et . . . rebus] in rebus et paruitatem L. dicatur . . . rei] *om.* K. et] est L. 15. eius et] eius est L. 17. apprehendunt] apprehendit KB. species] speciem K. 18. est] *om.* K. enim] *om.* B. approximat] PA appropinquat LB approximant *et ante hoc uerbum* illud quod cooperit *(vide infra) del.* K. 19. umbra eius] umbra ipsius L eius substantia B. 20. minoratur] in moratur B. eius umbra] *om.* K res ab ea B. demonstratur] declaratur K. 21. quando] si B. approximat] PL approximant K appropinquat LB. radici] radicum B. 22. tegit] regit K. 23—24. fortioris . . . ipsum] *om.* B. 23. nisi minus] A *bis.* 25. est] et B. 26. minus et debilius] et debilius et minus L. 26—28. est . . . appropinquat] *om.* KB. 28. eam] eum B. lineas] lumina K. 29. impressiones] impressuras K. eam] *om.* L. 30. eius et ipsius] ipsius et ipsius K et eius B. occultiores] occultationes B. 31. tectas] *om.* B.

Quod autem uidet homo in superficie corporum quasi fenestras in eis, illud est propter humiditatem, quae est in circuitu uisus, et per quam fit uisus. Et illud est, quoniam non potest esse, quin sit in medio aspicientis aut in circuitu eius. Si autem est in medio, uidet ille, cui accidit illud, in omni corpore fenestram, quoniam estimat, quod illud, quod non uidet ex corpore, sit profundum. Si uero est in circuitu medii, prohibet aspicientem uidere totum corpus subito propter paruitatem, quae accidit lumini egredienti ab oculo, scilicet stricturam pinealis oculi.

2. illud] id B. uisus] eius uisus L. 2—3. per . . . Et] *om.* K. 3. Et illud est] *om.* B est illud K. quoniam] PA quoniam homo L quod KB. quin] cum K. aspicientis] AK id est pupillae *marg. m. 1. adiec.* P aspicientis scilicet pupillae L aspicientis pupillae B. 4. ille cui] ille cum K illum B. 5. estimat] extimat A. 6. est] *om.* AK. aspicientem] aspicientium K. 8. scilicet] secundum K. pinealis oculi] A id est piramidis, quae est ut pinea procedens ab oculo *marg. m. 1. adiec.* P pinealis oculi id est piramidis quae est ut pinea procedens ab oculo KBL. Explicit liber de ymagine speculi *adiec.* K Explicit Thydeus de speculis *adiec.* B.

TIDEUS, DE SPECULIS.

ERKLÄRUNG

VON

SEB. VOGL.

Die Schrift handelt von dem, was man in einem Spiegel und in dem, was kein Spiegel ist, sieht, sowie von den Ursachen hierfür; gesammelt aus den Büchern der Alten von dem Arzte Tideus, dem Sohne des Theodor von Regoui (Reggio?).

Tideus beginnt seine Abhandlung mit dem Hinweis auf die Tatsache, daß jeder leuchtende Körper Licht und Farbe aussendet. Treffen diese auf einen gegenüberstehenden gut polierten Körper, so strahlt dieser von jedem seiner Punkte aus Licht, Farbe und Form des leuchtenden Körpers geradlinig zurück.[1])

Wisse, daß das, was man in einem polierten Spiegel von gutem Eisen[2]) sieht, sehr deutlich gesehen wird. Gutes, poliertes Eisen eignet sich nämlich hierzu durch die Wiedergabe des Lichtes, das in der umhüllenden Luft ist, vorzüglicher als die meisten anderen Dinge; geradeso wie der Magnetstein aus sich selbst das Eisen anzuziehen vermag und jener andere Stein von selbst sich dem Essig nähert.[3]) Wo immer also Licht vorhanden ist, gibt es ein Spiegel sehr gut zurück.

---

1) Ähnlich beginnt auch das V. Buch der Optik des Witelo, in deren Ausgabe von Risner (1572) an dieser Stelle auf das I. Buch der Katoptrik des Ptolem. th. 1 u. 3 verwiesen ist. Näheres darüber in der Erklärung der (Pseudo-) Euklidischen Schrift 'de speculis' zu Nr. 1.

2) Wahrscheinlich Stahl gemeint. Roger Baco unterscheidet (op. minus, Brewer S. 383; P. Duhem, Un fragment de l'opus III S. 153) nach Avicenna l. V de anima hauptsächlich drei Gattungen von Eisen: 1. gewöhnliches Schmiedeeisen, 2. Stahl, 3. Andena, das bei den Lateinern wenig in Gebrauch sei, eine Mittelgattung zwischen Schmiedeeisen und Stahl. Gewöhnliches Eisen, sagt er, sei leichter an Gewicht als Stahl und Andena und werde deshalb vom Magneten besser angezogen. Die hier zitierte Schrift Avicenna de anima ist die Pseudoschrift: Liber Abuali Abincene de anima in arte Alchimiae, oder Artis Chemicae Principes, Avicenna atque Geber, gedr. zu Basel 1572. Dictio V cap. 6 p. 123: de sex generibus ferri. Statt Andena steht dort Aldeua mit der Bemerkung: ferrum de Aldeva est grossum, et non est bonum ad operandum. In dem Maaseinschnitte am Rande der Ardennen genossen die Schwertfegereien von Lüttich, Namur usw. frühzeitig wohlverdienten Ruhmes und ihre Tätigkeit, deren Spuren schon in der karolingischen Zeit zu entdecken sind, nahm noch höheren Aufschwung, als im 12. Jahrhundert bei Herzogenrat und anfangs des 13. Jahrhunderts bei Lüttich die Steinkohle entdeckt und zur Feuerung benutzt wurde. Jähns: Gesch. d. alten Trutzwaffen 1899 S. 93. — Was Roger Baco mit „chalybs" (Stahl), aptus ad acutiem et scissionem bezeichnet, ist in der genannten Pseudo-Avicenna-Schrift acetum, auch acerum (vgl. Plinius, hist. n. l. 34 c. 42). Stahl ist verwandt mit „Stachel". Eine zweite althochdeutsche Bezeichnung für Stahl ist ecchol. Dieses Wort beruht auf ekke=Schärfe, Schneide. Das Verhältnis von „Stachel" zu Stahl findet ein genau entsprechendes Gegenstück im Latein. „Stachel" bedeutet ursprünglich Schneide, Spitze, wie acies Schärfe. Da aber Spitze und Schneide aus dem bestgehärteten Eisen hergestellt werden, so erhält allmählich Stachel und acies die Hauptbedeutung „Stahl". Vgl. d. franz. l'acier. Jähns a. a. O. S. 63. — Über die Pseudo-Avicenna-Schrift vgl. H. Kopp, Beiträge z. G. d. Chemie, 3. Stück. Braunschweig 1875. S. 56 ff.

3) In der soeben genannten Pseudo-Avicenna-Schrift wird acetum in der Bedeutung „Stahl" gebraucht. In unserer Tideusschrift ist die Rede von einem Stein, der zum acetum eilt, wobei unmittelbar vorher die Anziehung zwischen Eisen und Magnet erwähnt wird. Acetum heißt gewöhnlich „Essig", ganz allgemein „Säure". Die Anziehung zwischen Essig und einem gewissen Stein wird

Wird daher einem Spiegel ein Ding entgegengestellt, das Licht besitzt, sei es eine Lichtquelle selbst oder ein beleuchteter Gegenstand, so nimmt der Spiegel von dem Lichte des Gegenstandes Licht auf und gibt es dann sofort oder so

---

auch sonst in mittelalterlichen Schriften öfter erwähnt, doch scheinen die Angaben nicht ein und dieselbe Sache zu bezeichnen. Es könnte ein Karbonat, etwa Magnesium- oder Calciumkarbonat gemeint sein, die in der Farbe schneeweiß, glasglänzend und auch gefleckt vorkommen und in Säure unter Brausen die enthaltene Kohlensäure abgeben, also nur ein Kalkstein (kohlensaurer Kalk), vielleicht von besonderer Porosität, etwa Kreide oder auch Korallenkalk. In Dr. Hermann Kopps Geschichte der Chemie, 4. Teil S. 332, findet sich die Angabe, daß Plinius mitteilt, der Essig habe die Kraft zum Zerteilen und mit (kalkiger) Erde aufzubrausen. Das Anziehen des Essigs dürfte dabei so zu verstehen sein, daß der Stein zunächst die Flüssigkeit einsaugt und dann Gas (Kohlensäure) entwickelt, wodurch er auf der Flüssigkeit, wenn schwimmend, wohl etwas bewegt werden könnte. Schließlich wird der Essig neutralisiert und nicht mehr sauer schmecken, der Stein hat ihn also angezogen. Die von Cardanus beobachtete Dampfentwicklung, die im folgenden näher beschrieben ist, bezieht sich dann wohl auf die Verspritzung feinster Tröpfchen durch das Gas, wobei ein leichter Nebel beobachtet werden kann. Die Auflösung konnte er nicht abwarten, weil eben der angewandte Essig nicht hinreichte.

Die Erwähnung des Steines, der den Essig anzieht, scheint aus der pseudoaristotelischen Schrift 'de lapidibus' zu stammen, deren Ursprung nicht lange hinter den unserer Tideusschrift zurückdatieren mag (Näh. bei Val. Rose in Ztschr. f. d. Altertumswissenschaft. Berlin 1874/75. S. 321ff). Diese Schrift taucht als arabische Übersetzung auf bei den Medizinern des 10.—12. Jahrhunderts. In der Enzyklopädie des Arnoldus Saxo (zwischen 1220—1230) wird sie im 4. Buche 'de virtute universali' cap. 8 als eine Übersetzung des Gerardus angegeben (Näh. bei Stange vgl. unten). Die Juden des 13. Jahrh. gedenken des sogenannten aristotelischen Steinbuches nach einer hebräischen Übertragung etwa aus der Zeit von 1250. Eine lateinische Übersetzung nach diesem verkürzten hebräischen Text gehört dem 15. Jahrh. an. Spuren dieses Steinbuches zeigen sich auch bei dem mythischen Abolays, dessen Buch auf Befehl Alfons X. angeblich aus dem Chaldäischen ins Spanische übertragen wurde (Rose l. c. 329 u. 413 . . .).

Von Arnold wandert der Essigstein zu Albertus Magnus, Vincenz von Beauvais, Roger Baco u. a.

Wir stellen die einzelnen Nachrichten über den Essigstein kurz zusammen:

1. Aus Arist. de lap. aus dem Codex Leod.: „Rose l. c. S. 357: Est alter lapis, qui gaudet acetositate i. quando ponitur in aliqua re, requirit acetositatem et currit ad ipsam absque tactu manuali; hoc est alkibric et hoc est argentum et plumbum et marcasita atque magnesia.

2. In der lat. Übersetzung nach der hebr. Übertragung des arist. Steinbuches (Cod. Montispessul. 15. Jahrh. Rose l. c. S. 393) heißt es: De lapide, qui vocatur eltarem c. 20. Color huius lapidis est albus, et bene politus sicut ebur. Et est frigidus et siccus. Invenitur in ripa maris indie. Valet ad albulam oculi, quia sanat eam. Item et qui defert eam (et) defendit eam ab invidia mala, linguis et malis, et malignis oculis, et nulla fatua mala posset sibi nocere. Et si ponatur in aliquo vase cum aceto, videtur quod moveat se per vas. Et hic lapis invenitur apud grecos. Et est quidam alius lapis vocatus esuisa assimilatus ei.

3. Ibn Baithar (gest. 1248) beschreibt denselben Stein mit fast den nämlichen Worten, nur fehlt bei ihm die Mitteilung über das Verhalten gegenüber dem Essig. Er nennt diesen Stein Hadschar elkazak (Hadjer el-kezec), beim hebr. Übersetzer alkarak und alsalak. Näh. bei Ibn Baithar von J. v. Sontheimer, Stuttg. 1840, I. Bd. S. 289, und L. Leclerc, Notices et Extraits des MS. de la Biblioth. Nation. Tome XXIII. 1877. Traité des simples par Ibn El-Beïthar, S. 414.

4. In Manuel de la Cosmographie du Moyenâge de Dimischkî trad. de l'Arabe par Mehren, Kopenh. 1874, S. 87: La pierre de vinaigre, appelée Kezik, est blanche; placée dans un vase de vinaigre elle attire le liquide jusqu'à ce qu'elle eu soit saturée; aussi long temps que le vinaigre y est renfermé, il bout sans chaleur et sans feu.

schnell als möglich wieder zurück entweder dem Objekte selbst oder einem anderen Gegenstande, der ihm wirksamer gegenübergestellt ist, wie

---

5. Arnoldus Saxo: Enzyklopädie, IV. Buch 'de virtute universali' c. 8 de lapidibus (E. Stange im Jahresber. Erfurt 1905/06, S. 86 und Rose l. c. S. 426): In libro de lapidibus Arist. secundum translationem Gerardi . . . Inter species lapidum est lapis, quem nominamus olearem, qui ad se trahit oleum, et sic lapidem aceti, qui trahit acetum. Et est qui trahit ad se vinum. Et spuma eius ad se spumam trahit. Et fex eius fecem trahit, quasi sit in eis sapor optimus aut odor aut anima . . .

6. Vincent. Bellovac. (gest. 1264) in spec. nat. l. IX c. 34: Est etiam inter lapidum species lapis olearii nominatus, qui trahit ad se oleum et lapis aceti, qui trahit ad se vinum. Zitiert wird Arnoldus de natura lapidum.

7. Roger Baco op. minus (Brewer) S. 384: . . . Et aliae sunt huiusmodi experientiae et meliores non de ferro solum et magnete sed de auro et omnibus metallis respectuque diversarum specierum magnetis, sicut docetur in libro de Proprietatibus. Dieser Hinweis auf ein Buch 'de proprietatibus' stimmt auf Arnoldus Saxos Enzyklopädie, wo neben dem Magneten auch die Anziehung des Goldes usw. erwähnt wird. Das Buch 'de proprietatibus rerum' des Barth. Anglicus, Franziskaners und Professors zu Paris (ca. 1230—1250), das auch aus Arnoldus schöpft, dürfte bei Baco nicht gemeint sein. Bei Barth. findet sich auch nichts über den Essigstein, von dem Baco an zwei Stellen spricht: Epist. de secret. operib. art. et nat. (Brewer) S. 537: Nam similiter est per lapidem auri attractio et argenti et omnium metallorum. Item lapis cadens currit ad acetum, et plantae ad invicem . . . (Eine Handschrift hat 'acervum' statt 'acetum'; dies acervum könnte dasselbe sein wie acerum = Stahl, vgl. obige Bemerkung zur Pseudo-Avicennaschrift de anima. Allein unsere Stelle bei Baco in Epist. de secret op. läuft sichtlich parallel mit der vorher zitierten Stelle im op. minus, wo auf die Arnoldsche Schrift 'de proprietatibus' verwiesen ist, nach der wir acetum als Essig zu fassen haben.) — op. mai. II 218: Sicut etiam experimentator fidelis motum verum ad invicem aliarum ab his (vorher geht die Anziehung des Magneten) novit experiri, ut de lapide, qui currit ad acetum . . . Vgl. P. Duhem, Un fragment de l'op. III S. 152.

8. Albertus Magnus (gest. 1280) de mineralibus l. II tr. III c. 6. Est magnes olearis, qui trahit oleum et lapis aceti, qui trahit acetum, et lapis vini et spuma illius trahit spumam vini et faex eius ad se trahit faecem . . . Unzutreffend dürfte die Bemerkung sein, die zu dieser Stelle Joh. Dee macht in seiner Ausgabe der Epistola de secret. op. Rog. Baconis, Hamburg 1618, S. 76: Non videtur tamen Albertus id velle, quod hoc loco Rogerius, qui illum potius lapidem innuit, qui in speculo aut levigata aliqua superficie positus, insperso aceto movetur, ut palea, quae cerumine lita, et in aquam placidam iniecta discurrit; atque idcirco ab Italis pietra caminante nuncupatur.

9. Noch Cardanus (1501—1576) kommt auf den Essigstein zu sprechen in dem Werke de subtilit. lib. VII de lapidibus: Es gibt einen Stein, der kein Edelstein ist, auch nicht durchsichtig, sondern mit aschgrauen Flecken. Dieser bewegt sich von selbst im Essig und auch im Weine und ahmt durch seine Bewegung den Gang der Lebewesen nach. Diesen Stein und seine Kraft erkannte einst Rabbi Aben Ezra (vgl. Nachtrag L, 8). Er findet sich häufig bei uns und hat wenig Wert. Als ich seine Bewegungen öfter betrachtet hatte, hielt ich ihn, daß er ruhig bleiben sollte. Da erkannte ich, daß er durch die Kraft des Essigs und Weines in Dampf verwandelt werden könnte, weshalb ich das Resultat abwarten wollte. Ich fand es aber nicht, obgleich ich den Stein lange hin und her bewegte. Es ist ein Zeichen von schwacher Dampfentwicklung, wenn keine Wasserblasen entstehen. Deshalb darf man auch nicht glauben, daß jener Stein sich stark bewegt. Es gibt Leute, die glauben, wenn sie ihn tragen, werden sie Sieger sein. Ich habe geschrieben, was ich selbst erfahren habe. Ich wollte noch das beifügen, damit es jeder selbst erfahren könne. Denn von seiner Bewegung im Weine und Essig habe ich mich selbst öfter überzeugt.

10. Unrichtig dürfte sein, was Ol. Borrichius in: de ortu et progressu Chimiae, Diss. Hafn. 1668 schreibt: Tacebo, quae Rog. B. de Astroite ad acetum decurrente commentatur. Vgl. über den Astroit. Cardanus de subt. l. VII. de lap.

jeder Sachkundige weiß. Sooft also das Licht von einem Spiegel auf einen Gegenstand fällt, übergibt der Gegenstand seine eigene Form und Farbe jenem Lichte, das auf ihn aus dem Spiegel fällt, oder wenn man will: jenes Licht, das auf den Gegenstand fällt, nimmt die Form und Farbe desselben auf.

Um dies näher zu begründen, verweist Tideus auf den Sehvorgang und bespricht die verschiedenen Sehtheorien. Seine Darlegungen erinnern mehrfach an die Ausführungen des Salāh ad-dīn in seinem (2.) Buch der Augen, die hauptsächlich dem mit Plutarchs Namen fälschlich geschmückten Auszug aus Aëtios entstammen.[1]) Außerdem treffen wir Lehren, die sich besonders bei Hero, Galenus und Ptolemäus finden. Tideus führt aus:

Die Gelehrten waren allerdings darüber verschiedener Ansicht. Manche sagten nämlich, daß bei Spiegel und dessen Licht dasselbe stattfinde wie bei Licht und Auge, wenn dem Blicke ein Objekt begegnet.[2]) Dabei erfasse der Blick die Dinge entweder mittels des aus dem Auge austretenden Lichtes[3]) oder mittels des Lichtes der vorhandenen Luft[4]), das tausend Stadien ausgebreitet ist, ein Raum

1) Näheres bei Hirschberg, Lippert u. Mittwoch: Die arab. Augenärzte, II. Teil, 1905, S. 207f.: Die Gelehrten teilen sich in bezug auf die Art der Gesichtswahrnehmung in drei Sekten. Die erste ist die der Mathematiker. Diese behaupten, daß der Sehstrahl vom Auge ausgeht. Die Anhänger der zweiten Sekte behaupten, daß das Sehen mit Hilfe der äußeren Luft sich vollziehe. (Diese Ansicht vertritt auch unsere Schrift.) Die dritte ist die der Naturkundigen (Physiologen); diese behaupten den Eindruck.

Als Ansicht des Plato findet sich S. 208: Das Sehen entstehe durch Vereinigung des Glanzes (der von den Körpern ausgeht) und des Lichtes, das von den Augen ausgesendet wird; es fließt von letzterem etwas in die Luft, die ihm wesensverwandt ist; diese Luft krümmt sich um die Körper herum, welche sie antrifft, verändert sich und verändert auch die Luft, welche zwischen jenen und dem Auge sich befindet. Da sie fließt, schnell an Veränderung, so dehnt sie sich aus durch das feurige Licht des Blickes . . . Vgl. auch Optik d. Alkindî Nr. 7ff.

2) Die Griechen haben gelegentlich den Sehakt durch Spiegelung der Gegenstände auf der Kristallinse erklärt, die dem Gehirn sich mitteile. Lactantius (gest. ca. 325 n. Chr.) spricht in seiner Schrift 'de opificio dei', wie die Bilder der Gegenstände gleichsam wie in einem Spiegel widerstrahlend zum innersten Sinne dringen. Hirschberg, Augenheilk. S. 174.

Albertus Magnus in (de anima) II/III 14: In exteriori polito oculi debiliter sigillatur forma usque ad interiora pervenit.

3) „Das, was vom Auge strahlt, ist Licht." Opt. d. sog. Damianus, Satz 2. (Viell. 415—485 n. Chr., vgl. Hirschberg l c. S. 167.) Beweis dafür war das Funkeln der Augen bei den Raubtieren und manchen Menschen, so daß sie zur Nachtzeit sehen. Hirschberg l. c. S. 346. Nach Plato hat von allen Sinnesorganen das Auge (visus) die größte Ähnlichkeit mit der Sonne.

Euklid mit anderen Anhängern sagt im Buche der Optik: Aus der Pupille des Auges verbreitet sich eine Lichtkraft hinein in die stark leuchtende Luft, und zwar in Gestalt eines Kegels. Seine Spitze liegt bei der Pupille, seine Grundfläche bei dem gesehenen Gegenstand . . . Hirschberg, Lippert u. Mittwoch, Die arab. Augenärzte, 2. Teil, S. 208.

4) Galenus berichtet in seiner Schrift von den Grundsätzen des Plato und des Hippokrates: „Der gesehene Körper muß entweder etwas von seiner Substanz zu uns senden und damit zugleich uns seine eigene Erkenntnismöglichkeit anzeigen oder warten, daß von uns zu ihm eine Sinneskraft komme". Die erste Möglichkeit verwirft Galenus: „Da nun die Sehkraft allein von allen Sinnesempfindungen das sie Erregende perzipiert durch das Mittel der Luft, nicht wie durch einen tastenden Stab, sondern wie durch einen Teil, der ihr gleichartig ist und verwandt, und ihr allein dieser Vorzug gewährt ist gleichzeitig mit der Fähigkeit auch mittels der Zurückstrahlung zu sehen, so braucht sie natürlich ein strömendes Pneuma, das leuchtend ist und eindringend in die umgebende Luft und diese gleichsam erschütternd sie ihrer eigenen Substanz gleichartig macht." Hirschberg l. c. S. 173f. Schon Epikur und Lukretius hatten den ver-

bis zu den Sternen hinauf, den das Sehorgan in einem Augenblicke durchdringt. Eine derartige Geschwindigkeit finden wir jedoch bei keiner Art von Bewegung von einem Orte zum andern.[1]) Es kann auch niemand beweisen, daß aus dem Auge etwas ausgesandt werde und zum Gegenstand, der gesehen wird, gelangt[2]), und zwar deshalb nicht, weil wir eben wissen, daß keine Art von Bewegung eine solche Geschwindigkeit besitzen kann. Es bleibt also nichts anderes übrig, als daß das Sehen durch die Luft geschieht, die sich zwischen Auge und Gegenstand befindet. Die Luft ist demnach für das Auge das Werkzeug, mit dem es wirkt. Sie behaupteten deshalb, es könne gar nicht anders sein, als daß die Luft die wirkende Ursache für den Sehvorgang bilde, sei es, daß sie unverändert bleibt oder eine Veränderung in ihrer Beschaffenheit erfährt. Wird sie aber verändert, so muß dies entweder mit Rücksicht auf das beobachtende Auge oder mit Rücksicht auf das Objekt oder auf beide zugleich geschehen.

Wenn jemand behauptet, die vorhandene Luft wirke, ohne in ihrer Beschaffenheit eine Veränderung zu erfahren, sie erfasse also die Objekte, als wäre sie selbst ein fester Gegenstand, wie z. B. ein Stab oder eine Gerte[3]), mit denen man bei großer Finsternis die entgegentretenden festen Körper betastet und wahrnimmt, so ist darauf zu sagen, daß bei diesem ganzen Vorgang die Wahrnehmung nur durch Denken und Überlegen geschieht. Die Gesichtswahrnehmung in der vorhandenen Luft findet aber ohne Denken und Überlegen statt.

Nimmt aber jemand an, daß die erhellte Luft verändert und umgewandelt wird mit Rücksicht auf die Verschiedenheit der Farben der wahrnehmbaren Dinge, und daß in diesem Falle die Veränderung mit größter Schnelligkeit zum Auge gelangt, das sie wahrnimmt und erfaßt, so ist dies offenbar wahr und einleuchtend.[4])

Bei dieser Wahrnehmung mittels der Luft wird aber bloß die Farbe erfaßt, nicht aber mit ihr auch die Quantität des Gegenstandes, auch nicht dessen Lage und Örtlichkeit, nicht sein Abstand vom Beobachter und nicht seine Gestalt und seine Bewegung, Dinge, die doch alle das Auge wahrnehmen kann.[5]) Es soll indes nicht in Abrede gestellt werden, daß die vorhandene Luft durch die Farben der angeblickten Gegenstände verändert wird und dadurch deren Farben kennzeichnet und sich dieselben zu eigen macht, indem die im Auge enthaltenen Feuchtigkeiten, die mit dem Weißen, mit der Helligkeit und dem Lichte nahe verwandt (homogeneae) sind, an der Veränderung der Luft teilnehmen.

Und wenn es nicht möglich wäre, daß das Auge auch die Quantität eines Gegenstandes, seine Lage, seine Entfernung, Gestalt und Bewegung wahrnähme, so könnte die Luft dem Auge auch nur die Farben vermitteln. Wir finden aber, daß das Auge alle diese Merkmale erfaßt, sobald es einem Dinge gegenübersteht. Folglich muß vom Auge aus auch eine Kraft sich auf die Gegenstände erstrecken, da es sonst nicht möglich wäre, die Lage der Dinge an ihren Orten und ihre Abstände zu erkennen. Dasselbe gilt von der Quantität eines Dinges; es muß die Kraft, die aus den Augen kommt, mit dem Gegenstande in allen seinen Teilen zusammenhängen. Das Erfassen der Objekte muß demnach bei ihnen selbst und an ihrem Platze stattfinden. Eine solche Wahrnehmung kann aber nur die Luft bewirken, entweder weil ihr von Natur aus eine Kraft innewohnt, wie sie das Auge besitzt, oder sie durch die Begegnung mit dem Auge zur Augennatur umgewandelt

---

worrenen Nebenbegriff, daß, so wie wir entfernte Sachen mit Hilfe eines Steckens oder dergleichen fühlen, auch das Auge sie mit Hilfe des Lichtes wahrnehme. Priestley Klügel, Gesch. d. Opt., S. 4.

1) Dasselbe bei Hero, Katoptr. Nix u. Schmidt S. 321; Rose, Anecdota S. 319. Alkindi, de aspectibus Nr. 9.

2) Etwas Stoffliches, wie die grobe Fühlfadentheorie annahm.

3) Siehe vorhergehende Bemerkung aus Galenus.

4) Vgl. Alkindi, de aspectibus Nr. 7 und besonders die dortige Bemerkung aus Ḥunain b. Isḥâq.

5) Vgl. Ptolem. Opt. II B.

werden kann. Denn Luft und Auge haben nur das gemeinsam, was mit der Helligkeit zusammenhängt.[1])

Deshalb wird gerade das Licht vom Auge aufgenommen, sei es, daß eine Begegnung mit dem Lichte stattfindet, wenn ein heller Körper vor dem Auge erscheint, oder daß das Licht eines Körpers sich mit dem Lichte vermischt, das aus dem Auge tritt.

Es ist aber nicht statthaft zu behaupten, daß das, was aus dem Auge austritt, durch sich selbst zum Gegenstand gelangt, der angeblickt wird, da gar keine Art der Bewegung von einem Orte zu einem andern bekannt ist, der eine solche Geschwindigkeit zukäme.

Dagegen ist die Annahme nicht als unzutreffend abzuweisen, daß das helle Licht, das aus dem Auge austritt, sich mit der vorhandenen Luft vermischt und sie auf das schnellste hinsichtlich ihres Wesens und ihrer Substanz verändert. Es muß demnach gemäß unserer Darlegung die Luft hell und weithin ausgebreitet sein und mit dem Sehorgan, das alle Dinge erfaßt, zusammenhängen; und zwar deshalb, weil die Augenkraft von der Art der Luft ist, ihr ähnlich und mit ihr ganz vermischt. Und das ist auch der Grund, warum die äußere finstere Luft die helle und klare Kraft des Auges überwindet und zu ihrer Natur umändert und verwandelt. Und darin liegt auch die Ursache, daß man bei Nacht nicht sieht.

Wie endlich das Licht der Sonne die Luft in einem Augenblick zu Licht verändert, so verändert ganz ähnlich das aus dem Auge tretende Licht die Luft in einem Augenblicke. In ähnlicher Weise wird wiederum das aus dem Auge kommende Licht von der Luft in einem Augenblicke verändert.

Die Erklärung aber dafür, daß Quantität, Lage usw. eines Gegenstandes nur in der betreffenden Lage und an seinem Orte wahrgenommen werden, ist folgende: Nimmt das Auge die Quantität eines Dinges und seine Lage wahr, so gelangt zum Dinge die Kraft des Blickes. Und ähnlich ist es bei der Wahrnehmung aller übrigen Merkmale. Wenn nun die Sehkraft zum Gesehenen gelangt, so kommt sie dahin entweder durch sich selbst oder mittels eines Instrumentes, das sie überträgt. Aus sich selbst kann sie nicht dahin gelangen, da es ja, wie wir sahen, keine Bewegung von solcher Schnelligkeit gibt. Also muß sie vermittelst der Luft dahin kommen, die durch die Sehkraft zur Natur des Sehens umgewandelt wird.

Diese Darlegung schließt sich eng an Ptolemäus an (Opt. II). Licht und Farbe wirken durch die (erhellte) Luft von selbst auf das Auge. Zur Wahrnehmung der Quantität, Lage, des Abstandes u dgl. sind Seh-

---

1) Auf diese Stelle verweist Roger Baco dreimal im op. mai. II S. 50: „Nach der Lehre des Ptolemäus erstrecken sich Sehstrahlen bis zum Sehobjekte. Und Tideus stimmt dem bei im Buche der Aspekte und führt als Ursache an, daß das Auge niemals den Abstand eines Gegenstandes sicher erkennen würde, ebenso nicht seine Quantität, nicht seinen Ort und seine Lage, wenn nicht Sehstrahlen (radii visuales) vom Auge bis zum Gegenstande sich erstreckten, auf ihm haften blieben, seine Oberfläche erfaßten und seine äußersten Grenzen in sich schlössen." Op. mai. II 425. „Viele verneinten, daß vom Auge etwas ausgehe, um den Sehakt zu vollenden, indem sie annahmen, daß das Sehen allein durch Aufnahme in das Auge und nicht durch Aussenden stattfinde, daß also vom Auge aus gar nichts geschehe, was eine Wirkung hätte und zum Sehakt beitragen würde. Daß dies falsch sei, geht klar hervor aus Aristoteles IX B. d. Met. und aus Tideus in dem Buche der Aspekte und aus mehreren Stellen bei Ptolemäus im Buche der Aspekte op. mai. II 426: „Alhazen sagt, daß die virtus distinctiva und ratiocinativa vermittelst des sensus particularis die Sehdinge beurteile. Und Tideus stimmt damit im Buche der Aspekte überein, indem er will, daß das Auge die Lage, Figur, Größe u. dgl. nicht wahrnehmen könne, wenn nicht die Spezies des Auges zum Gegenstande selbst gelangte, weil nach ihm die Spezies jener wahrnehmbaren Eigenschaften nicht einander entgegengesetzt von den Dingen ausgehen." Vgl. auch P. Duhem, Un fragment inédit de l'opus maius (1909) S. 78: „a Tideo, quod visus fit extramittendo".

strahlen aus dem Auge erforderlich. Diese Sehstrahlen sind aber nicht etwas Stoffliches, das sich vom Auge zum Gegenstande erstreckt, sondern eine lichtartige Kraft, die sich mit dem Lichte der Luft vermischt und letztere zum Sehakt tauglich macht.[1])

In der Auffassung der Natur der Sehstrahlen nähert sich Tideus sichtlich der Lehre des Empedokles, sucht jedoch auch den Einwänden des Aristoteles gerecht zu werden. Empedokles ist der Schöpfer der Lehre von den vier Elementen, auf die Tideus bald nachher zu sprechen kommt. Von ihm stammt auch die im griechischen Altertum eine gewisse Rolle spielende Sinnesphysiologie, der gemäß feinste Ausströmungen von Licht, Wärme, Gerüchen aus den Oberflächen der Dinge stattfinden und den Weg zu den Sinnesorganen finden. Das Licht ist nach ihm eine Substanz, und zwar Feuer, das unter den Elementen überhaupt vorwiegt. Nach seinem Grundsatze „simile simili cognosci“ muß dann auch das Auge Feuer enthalten und das, was aus demselben ausfließt, eine feurige Substanz sein. Diese Lehre des Empedokles bekämpft Aristoteles, der behauptet, daß das Licht unkörperlich sei. Es ist der Aktus des Durchsichtigen (*ἐνέργεια τοῦ διαφανοῦς*), insofern es durchsichtig ist. Es ist nicht Feuer, nicht ein Körper, nicht der Ausfluß eines Körpers.[2]) Wenn es nicht eine bloße Qualität, sondern eine Substanz wäre, so könnte die Bewegung desselben durch den Weltenraum nicht unmerklich sein, wenn sie es auch in kleinen Weiten sein sollte.[3])

Nun wendet Tideus seine Theorie auf die Wirkung der Spiegel an unter der Annahme, daß der Spiegel die Stelle des Auges vertritt.

Ganz ähnlich lautet wiederum die Lehre, daß das Licht, das sich in der Luft befindet und aus einem Spiegel ausgestrahlt wird, nicht verschwindet ohne seine eigene Form der Luft zu übergeben, auf die es fällt; und das Licht nimmt der Spiegel wieder von der Luft auf. Wenn also das Licht des Spiegels die Form und Farbe des Gegenstandes aufnimmt, auf den es fällt, so übergibt es beides zugleich dem Spiegel, der der Ausgangspunkt (radix), der stoffliche Träger (minera) und Sitz desselben ist.[4])

Und so nehmen alle Lichter die Form eines jeden Dinges auf, das sie bestrahlen und übergeben sie aufs schnellste ihren Plätzen, Trägern und Wurzeln, von denen sie ausgegangen sind.

Nun gibt es aber verschiedene Elemente, Feuer, Luft, Wasser, Erde und diese wiederum in zahllos verschiedenen Quantitäten; daher ist auch je nach der vorhandenen Quantität eines jeden das Licht verschieden von dem seines Genossen.[5]) Und weil die Lichter der Dinge, die sie von Natur aus und seit ihrem Bestehen haben, oder die sie von einem andern leuchtenden Gegenstand her besitzen, verschieden sind, findet auch für einen jeden Teil die Aufnahme von Licht, ebenso das Fortschreiten des überkommenen Lichtes je nach der Quantität der Zusammensetzung jenes Körpers statt, sowie nach seiner Vermischung und nach der Quantität der Mischung des Lichtes, das immer wieder auf ihn kommt. Wenn also

1) Vgl. Alkindi 'de aspectibus' Nr. 11f.

2) Auch Demokrit lehrte, das Licht sei ein feiner Körper (pervium corpus), der beständig von einem leuchtenden Körper ausfließt.

3) Vgl. darüber Priestley-Klügel, Gesch. d. Opt. S. 3. Alb. Magnus 'de anima' I/II 12. und eine in Vorbereitung stehende Arbeit von M. Meyerhof-C. Prüfer: Die aristotelische Lehre vom Lichte bei Hunain b. Ishaq.

4) Alb. Magnus lehrt im B. de sensu et sensato tr. I. c. 8: „Die Form wird im Spiegel wie an seinem Träger gesehen (sicut in subjecto).“

5) Weil der Ausfluß sich nach der Substanz richtet, von der er ausgeht, so ist das Licht der verschiedenen Körper nicht dasselbe.

z. B. Eisen und Holz dem heißen Sonnenlichte ausgesetzt werden, so nimmt das Eisen viel mehr von der Wärme auf als das Holz. Ganz ähnlich hält ein polierter Spiegel die Lichter, die Formen, Farben und Figuren, die ihm jene Lichter darbieten, so ausgezeichnet fest, wie es kein Ding vermag, das diese Spiegelnatur nicht besitzt.

Jetzt kommt Tideus auf die Natur des Lichtes zu sprechen, wobei er sich, wie schon bemerkt, der Lehre des Empedokles nähert.

Nun soll die Frage erörtert werden, von welcher Natur denn das Licht sei. Ist es eine Substanz oder ein Akzidens? Wenn es eine Substanz ist, ist es dann ein Körper oder kein Körper? [1]) Und wenn es ein Körper ist, ist es dann Feuer oder Luft, Erde oder Wasser?

Auf diese Fragen wäre nun sehr vieles zu sagen und wollten wir ausführlich darauf eingehen, so würde unsere Abhandlung länger als sie nach unserer Absicht werden soll. Wir wollen nämlich in unserer Schrift nur erörtern, wie beschaffen das ist, was in einem Spiegel und in dem, was kein Spiegel ist, gesehen wird. Deshalb können wir bezüglich der ersten Frage nur kurz sagen, daß manche Philosophen das Licht als Feuer und Körper auffaßten. Als Körper deshalb, weil man die Pupille des einen Auges sich erweitern sieht, wenn das andere geschlossen wird. Dies fände nicht statt, wenn nicht eine körperliche Substanz die Augen erfüllte. Daß das Licht Feuer sei, schlossen sie aus der Tatsache, daß sich durch Ansammlung von Licht in einem polierten Spiegel oder blanken Körper eine Brennstelle ergibt.

Nach dieser Zwischenbemerkung über die Natur des Lichtes wendet der Autor sich wieder den Spiegeln zu und bespricht die Frage, wie denn bei Spiegeln von verschiedener Größe das Licht die Formen der Dinge aufnehme.

Wenden wir nun unsere Aufmerksamkeit wieder dem Spiegel zu! Das Licht eines jeden Gegenstandes, das von ihm in die ihn umgebende Luft gestrahlt wird, besitzt eine größere Ausdehnung als seine Quantität selbst ist, wie man an einer kleinen Feuerkerze (candela ignis) sieht, deren Licht ein Haus erfüllt. Dasselbe findet statt, wenn ein Beobachter in einem Spiegel, der gerade so groß oder größer ist wie sein Antlitz, dieses nicht größer und nicht kleiner sieht, sondern ganz in seiner Quantität, und wenn der Spiegel kleiner ist als das Antlitz des Beschauers, [2]) sein Angesicht klein [3]) bemerkt. Dies kommt daher, daß aus einem großen Spiegel Licht in größerer Quantität widerstrahlt als das Antlitz desjenigen ist, der in den Spiegel schaut. Fällt demnach dieses Licht auf das Antlitz des Beschauers, so bildet sich die Form des Gesichtes in dem Lichte in derselben Quantität ab, die es wirklich besitzt, gerade so, wie wenn man ein Siegel auf Wachs oder weiche Erde drückt. [4]) Diese Erde oder das Wachs nimmt nämlich von jenem Siegel das Bild in den gleichen Größen auf und es bleibt nur das übrig, was von der weichen Substanz überfließt und nichts mehr von der Figur und Form des Siegelbildes an sich hat. So übergibt also jenes Licht die Form dem Spiegel in derselben Weise wie das Licht sie aufgenommen hat und es zeigt sich das Antlitz in jenem Spiegel ganz getreu in seiner Quantität. Hat der Spiegel genau dieselbe Größe wie das Antlitz, so nimmt dessen Form den ganzen Spiegel ein, gerade so, wie das Siegelwachs ganz vom Siegelbild erfüllt wird, wenn es genau in derselben Ausdehnung vorhanden war wie das Siegel. Ist der Spiegel an Ausdehnung größer als das Antlitz, so nimmt die Form des Antlitzes vom Spiegel so viel Platz in Anspruch, als ihre Maße betragen und der Überschuß an der Spiegelfläche bleibt leer.

---

1) Das Licht wurde auch als spirituelle Substanz aufgefaßt. Näh. bei Alb. Magnus de anima l. II. Ar. III. c. IX., wo die verschiedenen Lehren über die Natur des Lichtes zusammengestellt sind und gegenüber der Ansicht des Aristoteles als unrichtig dargelegt werden.

2) „Und steht er etwa nur eine Hand breit vom Spiegel ab", wie aus dem Nachfolgenden zu ergänzen ist.

3) d. h. „nicht vollständig, sondern teilweise", soweit es sich um ebene Spiegel handelt.

4) Dieser Vergleich ist aristotelisch. Vgl. Alkindi 'de aspectibus' No. 7.

So verhält sich die Sache, solange der Spiegel vom Antlitz des Beschauers nur etwa eine Hand breit absteht. Ist er aber weiter entfernt, so ändern sich die Erscheinungen. Wir denken uns einen Spiegel, der kleinere Ausdehnung hat als das Antlitz des Beobachters. Das Licht geht so vom Spiegel aus, daß es mit der Entfernung sich immer weiter ausbreitet, also bei einem gewissen Abstande vom Spiegel eine größere Ausdehnung gewinnt als das Angesicht des Beschauers. Fällt nun dieses Licht auf das Antlitz, so wird dessen Form in dem vom Spiegel entfernten Teil des Lichtes ganz mit den wirklichen Maßen abgebildet und dieses äußere Licht gibt die Form immer weiter, bis sie zum Spiegel gelangt. Und dies geschieht dadurch, daß sich das Licht in der Richtung auf den kleinen Spiegel zu immer mehr verengt und anhäuft, wie es auch sein muß. Daher kommt es auch, daß ein Beschauer in einem lang gestreckten Spiegel die Form seines Antlitzes der Länge nach verzerrt sieht.[1] Das Licht hat nämlich in einiger Entfernung vom Spiegel eine viel größere Ausdehnung. Fällt es nun da auf das Antlitz, so nimmt es dessen Form in der ganzen Quantität auf und überbringt sie dem langgestreckten Träger, und zwar auf dem Wege der Verengung. Die Verengung wird dabei auf die Form des Antlitzes übertragen, das hierdurch eine Verkleinerung nach der Breite und einen Zuwachs nach der Länge erfährt, bis die Form in dem Maße erscheint, das jener langgestreckte, schmale Spiegel erfordert. Und das vollzieht sich gerade so, wie ein längliches Siegel das Wachsbild verlängert und ein rundes das Bild rund macht.

Auf diese Weise geschieht es dann auch, daß, wenn jemand einen kleinen Spiegel nahe vor sein Gesicht hält, so daß er den Spiegel gleichsam berührt, er sein Angesicht nicht ganz in dem Spiegel sieht, und wenn er den Spiegel weiter weghält, er sein Antlitz ganz sieht. Denn im ersten Falle umfaßt das auf sein Antlitz fallende Licht nicht das ganze Angesicht, weil eben das Licht in der Nähe des Spiegels enge zusammengedrückt ist und deshalb nur kleine Ausdehnung besitzt. In einiger Entfernung jedoch ist das Licht weiter ausgedehnt und umfaßt deshalb das ganze Angesicht des Beschauers. Wäre aber der Spiegel so klein, daß sein Licht auch in der Entfernung das Angesicht nicht ganz umfassen könnte, dann sähe ein Beschauer sein Antlitz weder in der Nähe noch in der Ferne ganz. Wer darüber genaue Beobachtung anstellt, kann sich durch den Augenschein davon überzeugen.

Wie kommt es aber, daß das Licht des Spiegels die Form zusammendrängt, die es von einem Gegenstand aufgenommen hat und sie in der Quantität des Spiegels darstellt, von dem das Licht ausging, wenn der Spiegel eine kleinere Quantität hat als die Form des Gegenstandes?

Betrachten wir einen schmalen, aber langen Spiegel, bei dem das, was an Breite fehlt, an Länge zugegeben ist. Wie kann man glauben, daß die Form eines Antlitzes von einer flachen Hand im Gevierte sich verengert bis auf einen Knoten (nodus, Fingergelenk) im Gevierte?

Darauf antworten wir mit einem Beispiele.[2] Eine Lampe, die sich in einem großen Hause befindet, erfüllt dasselbe mit ihrem Lichte. Um diese Lampe herum grenze nun jemand ein kleineres Raumgebiet ab. Dann faßt dieser kleinere Raum dieselbe Lichtmenge, die vorher den großen Raum erfüllte. Sodann stelle jemand über die Lampe ein kleines Gefäß; dann enthält auch dieses Gefäß ganz das Licht der Lampe. Es wird also mit der Änderung des umgebenden Raumes das Licht der Lampe zusammengedrängt oder ausgedehnt. Was hindert also, daß auch die Form, die vom Lichte mit sich geführt wird, sich verenge und ausbreite? Es ist deshalb im Lichte nichts enthalten, das die Form verengt und zusammenhäuft, wenn sie vom Lichte auf den kleinen Spiegel gezwungen wird, der ein wunderbarerer Träger für die Form ist als der Magnet für das Eisen. Es gibt gewisse Ursachen, die diese Wirkungen notwendig nach sich ziehen.

Damit sind die Betrachtungen über die Wirkungen der Spiegel zu Ende. Es folgen einzelne optische Fragen, zunächst die Erscheinung des Doppeltsehens.

---

1) Es sind wohl Spiegel mit gekrümmter Oberfläche gemeint.

2) Dasselbe Bsp. bei Alkindi 'de aspectibus' No. 22. Ebenso bei Witelo II. 24.

Mit diesem Gegenstand befassen sich so ziemlich alle Optiker der alten Zeit, insbesondere Empedokles, Hippokrates, Plato, Aristoteles, Galenus, Ptolemäus u. a.[1]) Die beiden letzteren sind wohl wieder die Hauptquellen für Tideus. Hören wir seine Ausführungen.

Wenn ferner jemand nach den Ursachen des Doppeltsehens fragt, das dann eintritt, wenn eine der beiden Pupillen nicht in der richtigen Stellung zur andern sich befindet oder aus derselben verschoben wird, so ist zu beachten, daß an sich beide Augen gleichmäßig (symmetrisch) geschaffen sind. Daher übergibt das eine Auge das Gesehene einem Orte, dem auch das andere Auge das Gesehene übergibt. Sind sie aber gegenüber ihrer gleichartigen Stellung, die sie von Natur aus haben, verändert, so übergibt das eine Auge das Gesehene einem andern Orte als der ist, dem es das andere Auge übergibt. Es wird also dann ein Gegenstand doppelt gesehen, nämlich hier und dort. Diese Erklärung findet dadurch ihre Bestätigung, daß ein Einäugiger nichts doppelt sieht und daß, wenn jemand etwas doppelt sieht, dann aber ein Auge verdeckt, er den Gegenstand immer nur einfach erblickt.

Manche meinten, es läge die Ursache des Doppeltsehens nur in einem Auge und fände durch Auf- und Abwärtsverschieben der Pupille statt. Das ist aber nicht der Fall. Denn, wenn nur ein Auge in Tätigkeit ist, findet kein Doppeltsehen statt, sondern nur wenn beide Augen sehen.

Wieder andere glaubten das Doppeltsehen aus der Vermischung des Lichtes der beiden Augen erklären zu können und nahmen als Beispiel hierfür den Fall an, daß in dem Gemache eines Hauses zwei Lampen sich befinden mögen. Dann sieht man im vermischten Lichte der beiden Lampen zwei Schatten von sich. Wenn nun auch die angegebene Beobachtung bei den beiden Lampen richtig ist, so verhält sich die Sache mit den Augen beim Doppeltsehen doch nicht so, wie jene glaubten. Und zwar deshalb nicht, weil ein Mensch in dem Gemache, in dem die zwei Lampen sind, von sich wohl zwei Schattenbilder sieht, sich selbst aber doch nur einfach. Nach jener Theorie müßte er einen Genossen sehen, also zwei Menschen, gerade so, wie er zwei Menschen sieht, wenn er die Pupille des einen Auges verschiebt.

Endlich glaubten manche die Ursache für das Doppeltsehen dann gegeben, wenn die zwei Augenlichter voneinander getrennt werden. Sie meinten, das Licht der beiden Augen sei so angeordnet wie zwei Stacheln, deren Fußpunkte getrennt sind, während die Spitzen gleichmäßig zusammenlaufen. Aber auch diese Erklärung trifft nicht zu. Denn dann müßte man einen Gegenstand, den man ganz nahe an die Augen bringt, jedesmal doppelt sehen, weil nach ihrer Ansicht dort die beiden Lichter getrennt sind.

---

1) Näheres darüber bei Hirschberg, l. c. S. 163f; 171ff; 202; 223; 319; 346; 351 usw.

Die Ansichten der Alten über das Doppeltsehen erörtert eingehend Alb. Magnus im Buche de sensu et sensato c. 8; 11.

Aristoteles erklärt in den Problemen das Doppeltsehen daraus, daß die Augennerven zu derselben Zeit nicht in einerlei Richtung die Eindrücke empfinden. Die Epikuräer meinten, das Einfachsehen mit zwei Augen beruhe nur auf Gewohnheit. Vgl. Priestley, Gesch. d. Opt. II. 475.

Galenus: Wenn die Pupille eines Auges gedrückt und nach oben und unten verschoben wird, so erscheint doppelt, was bisher einfach sich zeigte. Vgl. Otto Katz: Die Augenheilk. d. Galen, Diss. Berlin 1890. S. 93.

Ganz richtig hat Ptolemäus das binokulare Doppeltsehen erklärt: „Ein Punkt, der nicht durch symmetrische Strahlen beider Augen gesehen wird, erscheint an zwei Orten.“

Opt. d. Ptolem. (Govi) II. B. (S. 18). Ebenso Alhazen, Optik III. 11ff. – Witelo, Opt. III. 38; IV. 103ff. Roger Baco; Vogl: Die Phys. d. R. B. Diss. Erlangen 1906, S. 54. Und P. Duhem: Un fragment de l'op. III. S. 84. Avicenna, cf. Winter, op. egr. Diss. Erl. 1903, S. 52.

Und wenn man den Gegenstand sukzessive in die Ferne rückt, so müßte man ihn nach dem Passieren der Vereinigungsstelle der beiden Lichter entweder gar nicht mehr sehen oder er müßte wieder doppelt gesehen werden, so daß man also jeden Menschen vor sich doppelt sähe. Unser Blick zum Sternenhimmel und auch zu Dingen die näher sind als die Sterne, spricht gegen diese Erklärung.[1])

Wir kommen zu einer weiteren Frage, nämlich zu den Ursachen für die Größenwahrnehmung.[2])

Mit der Entfernung vom Auge erscheint uns ein Gegenstand kleiner und seine Umrisse unklarer; bei seiner Annäherung aber größer und deutlicher. Dies kommt daher, daß die Augen der Menschen die Dinge nur durch die vom Lichte begrenzten Spezies wahrnehmen. Mit dem Sehen verhält es sich also wie bei einer Lampe. Nähert sich ein Körper einer Lampe, so wächst dessen Schatten und zugleich wird der Gegenstand sehr deutlich. Entfernt man ihn hingegen von der Lampe, so verkleinert sich sein Schatten und er wird sehr schwach gesehen. Denn je näher das, was die Lichtquelle verdeckt, an sie heranrückt, mit desto stärkerem Lichte bedeckt sie dasselbe. Bei der Entfernung bedeckt der Körper die Lichtquelle nur wenig und empfängt deshalb von ihr auch nur schwaches Licht. Ein heller Gegenstand ist nun wie eine Lampe. Je weiter das Licht entfernt ist, das auf das Auge fällt, desto weniger und schwächer ist es, und je näher das Licht ist, das auf das Auge kommt, desto größer und stärker ist es. Deshalb sieht das Auge einen hellen Gegenstand um so größer, seine Linien und sonstigen Eindrücke um so klarer und deutlicher, je näher er dem Auge sich befindet und umgekehrt.

Endlich bespricht Tideus noch eine Erscheinung aus der physiologischen Optik, nämlich das Sehen von Löchern auf der Oberfläche der Körper.

Diesen Zustand erklärt Hirschberg in seiner Augenheilkunde[4]) wie folgt: „Schon Galenus weiß, daß Vermehrung oder Verminderung, Verdickung oder Verfärbung des Kammerwassers die Sehkraft schädigt. Verdickung hemmt die Tragweite des Sehens und bewirkt schließlich den Star. Falls aber nicht das ganze Sehloch von dem darin entwickelten festen Körper verdunkelt wird, sondern ein Teil rein geblieben, so sehen die Kranken durch den letzteren Teil die äußeren Gegenstände, jeden einzelnen nicht schlechter als zuvor, jedoch nicht alle gleichzeitig wegen der Verengung des Sehstrahlenkegels. Wenn aber im Mittelpunkte der Pupille ein kleiner Star sich bildet, während die übrige Kreisfläche der ersteren rein bleibt, so erscheint die Außenwelt dem Kranken wie durchlöchert. Das in der Mitte Befindliche, das nicht gesehen wird, scheint gewissermaßen herausgeschlagen zu sein. Es ist, als ob alles Fenster hätte (ἅπαντα οἷν ϑυρίδας ἔχοντα, die Fenster der Alten waren Löcher). Unsere Zeitgenossen nennen diesen Zustand Scotoma centrale (positivum). Solche Anschauungen haben sich übrigens bis in unsere Zeit erhalten, bis man lernte, daß das Gesichtsfeld die Projektion der lichtempfindlichen Netzhautfläche nach außen darstellt. Dem Griechen war der Kristall, was uns die Netzhaut." Tideus schreibt:

Daß aber ein Mensch auf der Oberfläche der Körper gleichsam Löcher sieht, kommt von der Beschaffenheit der Feuchtigkeit, die rings um das Sehen[5]) sich befindet und durch welche hindurch das Sehen geschieht. Und das kommt daher, weil es unmöglich ist, daß die Ursache hierfür sich nicht in der Mitte der Pupille

1) Die Akkommodationsfähigkeit des Auges ist außer acht gelassen.
2) Vgl. Alkindi 'de aspectibus' Nr. 21 und Ptol. Opt. II B.
3) Alhazen, Opt. Thes. II 40. — Witelo, Opt. II 24.
4) l. c. S. 326f.
5) Gemeint ist die Kristallinse, als Sitz des Sehens gedacht.

oder in ihrer Umgebung befinde. Liegt sie in der Mitte, so sieht derjenige, dem dies zustößt, auf jedem Körper ein Loch (fenestram); denn er meint, daß das, was er an dem Körper nicht sieht, in der Tiefe sich befindet. Liegt aber die Ursache in der Umgebung des Mittelpunktes, so hindert dies den Beschauer den ganzen Körper gleichzeitig zu sehen, weil das aus dem Auge tretende Licht klein ist, nämlich ein schmaler Kegel.

SCHLUSS.

Ein Überblick über die Schrift des Tideus „über die Spiegel" zeigt, daß sie sich hauptsächlich mit folgenden Problemen befaßt: Die Spiegel strahlen vor allem das Licht wider, sei es, daß es von einer Lichtquelle oder von einem beleuchteten Gegenstande ausgeht. Mit dem Lichte gibt der Spiegel auch Farbe und Form des Objektes wieder.

Daran schließt sich ein Vergleich dieser Erscheinung mit dem Sehvorgange und eine Besprechung der verschiedenen Sehtheorien. Die Ansicht des Tideus selbst ist: Das Sehen vollzieht sich mittels der Luft durch Strahlen, die vom Auge ausgehen (S. 86 ff.) . . . Dies erklärt auch die Wahrnehmung von Ort, Distanz und Quantität eines Gegenstandes.

Nun folgt eine kurze Betrachtung über die Natur des Lichtes, worauf Tideus wieder zu den Spiegeln zurückkehrt und die Frage erörtert, wie das Licht bei Spiegeln von verschiedener Größe die Aufnahme der Formen der Objekte vermittelt.

Sodann wird das Doppeltsehen besprochen und die Ursachen für die Größenwahrnehmung; und schließlich eine optische Täuschung bei der Starkrankheit.

Wie der Autor selbst eingangs der Schrift bemerkt, hat er seine Lehren aus den Büchern der Alten gesammelt. Dies fanden wir auch fast durchweg bestätigt. Ganz deutlich weisen mehrere Lehrkapitel auf Ptolemäus und Galenus zurück, andere auf die Katoptrik des Hero, die Elemente Euklids, die Optik des sog. Damianus und die pseudoaristotelische Schrift 'de lapidibus'. Eine Rolle spielen aber auch die Lehren der älteren Philosophen, wie des Empedokles, Demokrit, Plato und Aristoteles. Nur die Erörterung der Frage über die Aufnahme der Formen der Objekte bei Spiegeln von verschiedener Größe mag vom Verfasser selbst stammen.

Im Mittelalter war unsere Schrift wohlbekannt. Roger Baco zitiert sie dreimal im op. maius als liber Tidei 'de aspectibus' und in dem Fragment inédit de l'opus III. par P. Duhem 1909 S. 75: „Sententias electas extraxi . . . a Tideo". Mehrere Stellen hat die Schrift des Alkindî 'de aspectibus' mit ihr gemeinsam. Anklänge finden sich bei Witelo und Albertus Magnus.

[PSEUDO-]EUCLIDES DE SPECULIS

EDIDIT

AXEL ANTHON BJÖRNBO

COMMENTARIIS INSTRUXIT

SEB. VOGL

TRACTATUS [PSEUDO-] EUCLIDIS DE SPECULIS.

1.

Praeparatio speculi, in quo uideas alterius imaginem et non tuam.

Sit *ab* paries supra superficiem *bg* orthogonaliter erecta, et *bd* sit speculum, quod inclinetur secundum quantitatem tertiae anguli *abg* recti sitque speculum quadratum. Deinde protrahatur linea *be*, donec angulus *abd* sit tertia recti. Deinde producatur a linea *edb*, quae est cum superficie speculi, linea una, quae sit linea *eg*, orthogonaliter; angulus ergo *beg* est rectus. Sitque locus uisus punctum *g*, a quo ad punctum *d* protraham lineam. A puncto quoque *d* producam lineam cadentem supra superficiem *bg*, donec sit angulus *zdg* angulo *edg* aequalis. Et protraham *zh* perpendicularem supra superficiem *bg*. Et producam lineam *it* lineae *db* aequidistantem, quae est speculum. Et ponam *zi* aequalem *db*. Et depingam in linea *it*, quae est tabula, *zt* quamcunque uoluero formam, et ponam eam in loco *zi*, scilicet lineam totam.

Fig. 1.

Cum ergo considerauerimus a loco *g*, uidebimus formam in speculo, nostram uero formam non uidebimus. Et haec est huius forma.

1—2. TRACTATUS . . . SPECULIS] *om.* DEQ. 1. Tractatus] P Liber A Libellus V *om.* B. Euclidis] *corr. in* Ptolaemaei *man. rec.* P. 5. supra] PAB *corr. ex* super D super QE. *bg*] *cbg* D. 6. inclinetur] intelligetur B. tertiae] tertii B. 9. producatur] protrahatur D E(?). 10. *edb*] *db* B. 15. *d* . . . A] protraho lineam. Protraho lineam a E. 16. producam lineam] *om.* E. 18. *zdg*] *dg* D. *edg*] *egd* PD. 21. lineae *db*] linea *bd* QE linea *di* D. 22. *zi*] *za* E. 23. *db*] *bd* QE. 25. *g*] *g* et B. 26. huius] eius B.

2.

Praeparatio duorum speculorum, in quibus uideas formam unam uenientem et recedentem.

Describam lineam, cuius longitudo sit quattuor cubitorum, supra quam sit *ab*, et secabo ex ea portionem quartae altitudinis speculi aequalem, quae sit linea *ag*, et partiar *gb* in duo media supra punctum *d*, a quo protraham lineam orthogonaliter altitudini speculi aequalem, quae sit linea *dz*. Et protraham a puncto *b* orthogonaliter lineam medietati altitudinis speculi aequalem, quae sit linea *bt*; et copulabo punctum *t* puncto *z*, et producam eam directe. Et protraham a puncto *g* orthogonaliter lineam occurrentem lineae *tz* supra punctum *z* [lege: *e*], et faciam punctum *e* centrum, supra quod circumducam circulum, secundum quod spatium uoluero. Sitque portio *ik*, quam diuidam supra punctum *l* in duo media, et punctum *l* puncto *e* copulabo. Et protraham a duobus partibus lineae *le* a puncto *e* duas lineas orthogonaliter, quarum una alteri directe sit coniuncta, cuiusque quarum longitudo altitudini speculi sit aequalis, quae sint linea *men*. A puncto quoque *b* protraham lineam secundum rectitudinem lineae *bt* coniunctam et ei aequalem, quae sit linea *bh*.

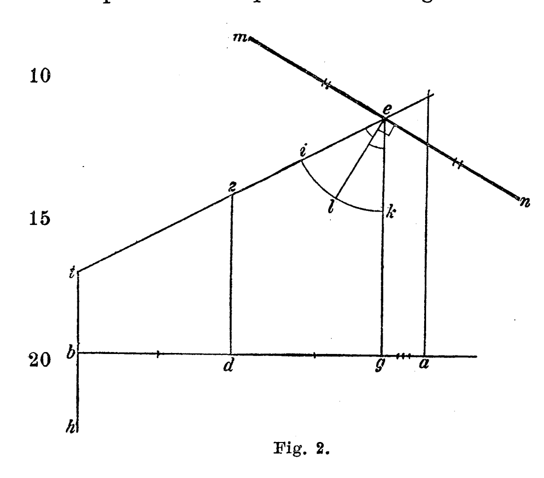


Fig. 2.

Cum ergo fecerimus hoc et posuerimus unum duorum speculorum supra lineam *mn*, et fuerit linea *mn* secans ipsum in duo media, et fuerit locus oculi punctum *d*, erit tunc, quod diximus, scilicet ut uideat homo se ipsum in uno duorum speculorum uenientem et recedentem in speculo *mn*. Sit tamen duorum speculorum quantitas una, sintque quadrata.

3.

Quomodo fiat speculum, in quo, cum aspiciens mouerit unam partium suarum, mouebit forma illam eandem partem, dextram uidelicet cum dextra et sinistram cum sinistra.

---

2. formam unam] forma B. 3. lineam] lineam vnam D. 4. ex] quod D. 5. *ag*] *eg* B. et . . . *gb*] *om.* E. 9. *t*] *om.* E. 10. directe] recte D. 12. *tz*] *z* E. 15. quod] *om.* E. 17. portio] proportio B. 18. *l*] *om.* D. 22. quarum] qua B. 23. sit] *om.* QE. 25. quae] et B. sint] PAD sit QEB. linea] lineae D. 26. lineae *bt* coniunctam] QE coniunctam lineae *gt* PABD. 29. fuerit] fuerint E fin cuius(!) D. linea] *om.* B. fuerit] fuit D. 30. ut] quod D *om.* QE. ipsum] *om.* QE. 31. uno] unum D. 32. duorum speculorum] eorum D. una] *om.* D. sintque] PB sitque QE et sint A sint D. 33. fiat] fiet E. mouerit unam] innouerit una A. 34. illam] illa B. dextram uidelicet] ut dextram D. 35. et . . . sinistra] *om.* D. sinistra] *om.* E.

Cum ergo uoluerimus hoc, circumducemus circulum in tabula secundum quodcunque spatium uoluerimus, ita tamen, ut arcus quintae ipsius sit secundum quantitatem longitudinis speculi. Postquam igitur circumduxerimus circulum, accipiemus ex eo arcum sextae et faciemus ipsum regulam. Deinde accipiemus arcum quintae et ipsum etiam faciemus regulam. Deinde assumemus portionem ferri puri quadratam similem lateri, quae sit grossa, cuius longitudo sit secundum quantitatem cordae arcus quintae; latitudo uero eius sit secundum quantitatem cordae sextae. Deinde ponamus arcum quintae super ipsam et limemus eam, donec eius gibbositas sit similis arcui quintae; postea limemus in latitudine eius secundum profundum eius, ita tamen ut ex arcuatione gibbositatis, quae est arcus quintae, nihil minuatur, donec arcus sextae intret in eius profunditatem. Deinde tergamus ipsam, quemadmodum specula tergi solent, donec facies in ea uideatur.

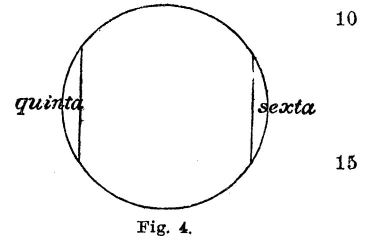


Fig. 4.

Cum ergo uidens in eam aspexerit et mouerit manum suam dextram, mouebit forma illa manum suam dextram. Specula uero non sunt ita. Cum autem uoluerimus, ut facies in ipsa redeat, conuertemus ipsam, donec uisus sit in eius latitudine, scilicet in longitudine cordae quintae.

4.

In egressione radii a uisu et conuersione eius ad oculum.

Procedit a pupilla uirtus luminosa imprimens in eo, cui occurrit, ex toto aere, lumen pineale, cuius uidelicet acuitas apud pupillam existit. Et quanto plus elongatur, dilatatur eius basis; et est figura, quam lumen illud continet, piramis columnea, cuius uidelicet acumen apud aspicientem, et fines sequuntur illud, quod aspicitur. Visus igitur comprehendit illud, super quod cadit illud lumen radiale; et super quod non cadit, ipsum uisus non comprehendit.

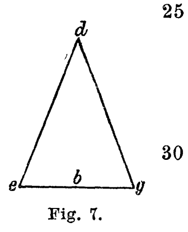
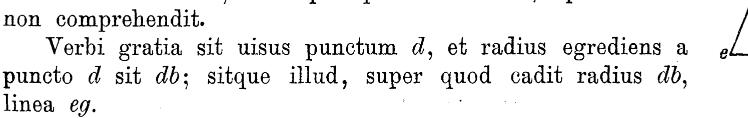


Fig. 7.

Verbi gratia sit uisus punctum d, et radius egrediens a puncto d sit db; sitque illud, super quod cadit radius db, linea eg.



1. Cum] *om.* E. 2. spatium] *om.* A. 3—4. Postquam . . . circulum] Deinde D. 4. eo] circulo D. sextae] sextum B. 5. etiam] *om.* AB. 6. assumemus] accipiemus BD. similem] filerem (!) QE. sit] si D. grossa] QEB crossa PAD. 7. sit] *om.* Q. 8. sit] *om.* PD. 9. et] *om.* D. limemus] lineemus B. 10. similis] singulis Q. 11. limemus] lineemus B. profundum] fundum QE profunditatem B. 12. ut] quod E. 16. ea] eo D. 17. uidens] aspiciens D. eam] ea QE eo D. aspexerit et] *om.* D. 18. manum] *om.* E. 18—19. mouebit . . . dextram] *om.* QE. 18. mouebit] mouet B. 19. illa . . . dextram] eandem D. Specula . . . ita] *om.* D. uero] *om.* B. 20. uoluerimus] uolueris BD. sit] *om.* D. 21. scilicet] si E. 22. In . . . oculum] QE De exitu radiorum et conuersione eorum. In . . . oculum PB In . . . oculum. De . . . eorum A. 24. existit] existat B. cuius] QEB eius PA. 27. fines sequuntur] in fines sequitur Q. 28. aspicitur] aspicietur B. 29. ipsum] ipsi in A. 31. gratia] causa QE. et] quia QE. egrediens] *om.* E. 32. d] *om.* E. db] bd QE. sitque] sit B. db] bd QE.

Triangulus ergo *gde* est superficies illuminata egrediens a uisu, cuius acuitas est punctum *d*, et basis linea *ge*. Et ita quanto plus elongatur radius, dilatatur basis eius; ipse ergo est in forma figurae pinealis. Et illud est, quod demonstrare uoluimus.

5.

Hic autem radius secundum aequales angulos conuertitur.

Siue enim eius egressus sit ab oculo siue a sole, si obuiat corpori spisso terso aequalis superficiei, conuertitur ab eo secundum aequales angulos, uidelicet cum tortuose egreditur. Sin uero perpendiculariter egrediatur, conuertitur super se ipsum.

Eius uero, qui secundum aequales conuertitur angulos, sit hoc exemplum.

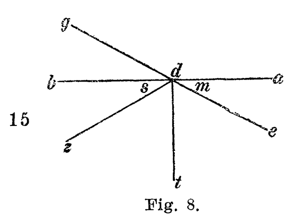


Fig. 8.

Sit linea *ab* superficies spissa tersa speculi, et sit punctum *e* locus uisus. Linea igitur *eg* est exitus radii ab oculo secundum rectitudinem, cum linea *ab* non prohibet. Cum ergo corpus fuerit in loco lineae *ab*, et radius egredietur ab *e* et cadet super punctum *d* lineae *ab*, conuertetur ad *z*, quod sic probatur.

Linea enim *eg* est transitus radii secundum rectitudinem, nisi aliquid ipsum redire faciat. Si ergo imaginemur, quod linea *eg* sit uirga ferrea subtilis triangulata, consistens in linea *ab* secundum formam rectitudinis lineae *eg*, deinde uoluamus lineam *ab* ad id, quod sequitur partem *e*, tunc linea *dg* cooperit lineam *dz*. Angulus namque *ame* est aequalis angulo *gdb*. Cum ergo uoluemus lineam *ab*, quemadmodum uoluimus, cooperiet linea *dg* lineam *dz*, et fiet angulus *bsz* aequalis angulo *ame*. Iam ergo conuertitur *edg* a puncto *d* ad *dz*, et fiunt duo anguli *m* et *s* aequales. Et ita conuertitur in speculo oblique posito.

Quod si uisus fuerit apud punctum *t*, tunc radius *td* conuertitur super se ipsum. Angulus namque *amt* totus rectus existit, et similiter angulus *bst* etiam est rectus. Ergo radius *td* super se etiam conuertitur. Et hoc est, quod demonstrare uoluimus.

6.

Quod si etiam praeparauerimus speculum *ab* et posuerimus uisum in puncto *g* et circumdederimus radium, scilicet ut ponamus coram uisu foramen

---

2. *ge*] *eg* B. 3. ipse] illud E. 4. illud] hoc B. est] *om.* A. 6. enim] *om.* BE. sit] PAB fit Q fiat E. ab oculo] *om.* E. si] siue B. 8. uidelicet] scilicet QE. Sin] PA si QE siue B. 10. hoc] *om.* B. 15. egredietur] PA egredietur et QE egreditur B. cadet] cadit B. 16. ad] QE a *d* ad P *d* ad AB. 18. Linea enim] Lineae B. 22. *dg*] *d* B. lineam] linea B. 23. *ame*] PA *corr. in ade* Q *aem* B. 24. linea] lineam AB. *dg*] *gd* B. *dz*] *d* B. 25. *bsz*] *bz* B. *ame*] *aem* B. ergo] uero Q. *edg*] *egd* B. ad *dz*] *om.* B. 26. *s*] sunt B. 30. etiam] *om.* Q. conuertitur] conuertetur Q. 32. etiam] *om.* B. 33. puncto] punctum B. circumdederimus] circumderimus A. foramen] PA formam QB.

cannae subtile aut canalem et prospexerimus per ipsum, ut radius a uisu egrediatur et transeat per foramen, donec cadat supra speculi superficiem in puncto *d*, uidebimus tunc in speculo totum, quod est supra lineam *de*; quoniam radius *gd*, nisi linea *ab* ipsum prohibuerit, transibit secundum rectitudinem usque ad *e*. Si autem linea *ab* ipsum redire fecerit, conuertetur ad *q* propter causam, quam praediximus.

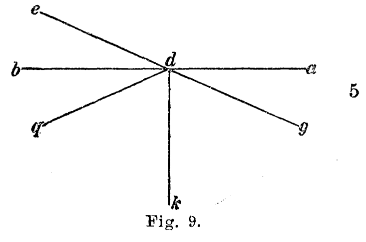


Fig. 9.

7.

Radius uisualis scilicet pinealis est lumen egrediens a uisu, cuius basis est sicut caelum.

Angulus enim, cuius acuitas est apud punctum uisus, ualde est expansus, sicut angulus *egd*, scilicet pars caeli, cui obuiat radius. Triangulus igitur *egd* est ambligonius, qui est angulus *g*.

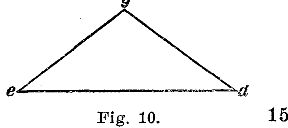


Fig. 10.

8.

Similiter quoque egreditur radius ab omni puncto corporis solis, donec lumine suo medietatem terrae cooperiat; deinde angustatur super terram, et angustatur eius umbra, donec ad unum peruenit punctum, et fit umbra terrae sicut pinea. Et quod a radio solis egreditur cooperiens medietatem sphaerae terrae, simul cum umbra terrae coangustatur et peruenit ad unum punctum quasi pinea, scilicet totum, quod est a corpore solis, quousque perueniatur ad ultimum terrae.

Sit itaque sol circulus *a*, et egressus radiorum ab unoquoque loco corporis eius, secundum quod in hac nostra forma figuravimus; perueniet ergo tunc angulus iuxta angulum, et resplendebit cum radiis, et implebit orizontes [lege: orizontem] superficie luminosa.

Verbi gratia sit quasi radius *b* et *g* egrediens a puncto uno, et *d* et *e* egrediens ab altero et contingens punctum primum, et similiter *u* et *z*, et

---

1. cannae] candelae A. subtilae] PQ subtilem A *om.* B. 2. foramen] formam B. 6. prohibuerit] prohibuit Q. 9. praediximus] diximus B. 10. uisualis] B uniuersalis PAQ. pinealis] pyramidalis(?) B. 11. est] *om.* Q. 12. enim] *om.* B. 13. *egd*] PB *edg* A *egd corr. ex edg* Q. 14. igitur] *om.* B. 15. qui] quae B. 18. et angustatur] *om.* B. umbra] id est terrae *marg. adiec.* P *in textu* A. ad] in Q. 19. peruenit] perueniat B. 20. sphaerae] sr'fi (!) Q. 22. punctum] *om.* B. 24. sol] PA solis Q solus B. unoquoque] uno B. 25. nostra forma] figura Q. figuravimus] PA figuramus B patet Q. perueniet] PAB proueniet Q. 26. et] *om.* B. cum] eum Q. implebit] Q implebunt PAB. 27. orizontes [lege: orizontem] [PAQ orizontis B. 28. sit] sitque Q. quasi] qz (= ?) B. egrediens] egredientes Q. 29. egrediens] egredientes Q. ab altero] *om.* B. contingens] continens Q. *u* . . . et] *om.* Q.

similiter *h* et *t*, donec sit *i* cum *k*, et uoluatur super ipsam totam; et similiter etiam perueniat *l* cum *m*, quoniam egressus *m* fit cum *h* et *l* egreditur cum *t*. Ergo tunc lumen implet orizontem undique, et cooperit medietatem sphaerae terrae. Et propter hoc quod cooperit terram, conculcatur umbra et angustatur, donec eius coangustatio ad unum perueniat punctum, et sit quasi pinea. Et similiter umbra trabis et superficiei quadratae et longioris altera parte, quanto magis elongatur a sole, cum superficialiter contingit terram, tunc umbra longitudinis eius umbris eius minor existit. Et omnis [lege: omne], quod directe praeparatur super terram, quanto magis elongatur a sole, elongatur umbra, sicut linea *sf*. Et illud est, quod demonstrare uoluimus.

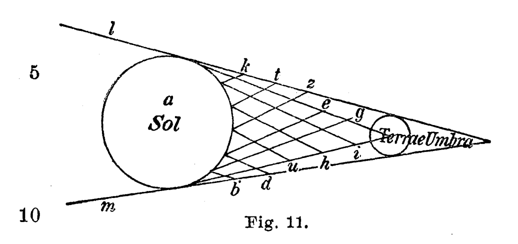


Fig. 11.

9.

Ex hoc quoque ostendam, quod, cum sol intrat per fenestram, illud luminis eius, quod ingreditur et super terram cadit, magis est amplum quantitate fenestrae.

Signabo igitur circulum solis, qui sit circulus *a*, et imaginabor egressus radiorum ab eo, quemadmodum descripsimus in figura, quae est ante hanc; et formabo fenestram, quae sit introitus, qui est inter *a* et *b*. Et sit superficies terrae linea *tz*. Et producam radium *e* a sole, secundum quod praediximus, et transeat per punctum *b* ab extremitate fenestrae, et cadat super punctum *z* superficiei terrae. Et protraham etiam radium *g* a sole, et transeat per punctum *a* ab extremitate fenestrae, et cadat super punctum *t* superficiei terrae.

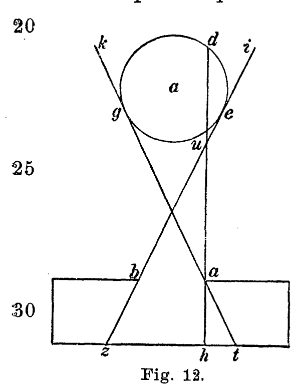


Fig. 12.

Iam igitur manifestum est, quod linea *tz* maior est introitu *ab*. Linea autem *tz* est, quod contingit radius ex superficie terrae, et introitus eius per spatium *ab* est quantitas amplitudinis fenestrae.

10.

Cum autem sol eclipsatur, tunc illud luminis eius, quod per fenestram ingreditur, diminutum est, scilicet non rotundum; neque casus eius super superficiem terrae est sicut linea *tz*, sed

1. similiter] *om.* Q. *i*] *e* B. 2. perueniat] proueniat Q. quoniam ... *m*] *marg. adiec. m.?* A. 4. orizontem] Q orizontes PA orizonta B. 6. quod] *om.* P. 10. et] quod B. 12. altera] alia Q. 13. cum] et in Q. 15. a sole elongatur] PB *om.* QA. umbra] ab umbra B. *sf*] e *sf* B. *fs.* A. 20. igitur] *om.* Q. 23. qui est] A quae est PB *om.* Q. 24. *a*] *n* Q. 28—30. Et ... terrae] *marg. adiec. m. 1.* A. 30. *t*] *z* B. 36. ingreditur] egreditur A. scilicet] solis B. 37. super superficiem] superficies Q.

est secundum quantitatem eius eclipsis; et est diminutio luminis proportionalis diminutioni eclipsis.

Verbi gratia quasi sol eclipsetur, et sit eclipsis eius arcus *dgu*, et sit pars corporis eius, quae prohicit radium tunc, arcus *deu*, et ingrediatur radius arcus *deu* per fenestram ad superficiem terrae, quae est linea *tz*, est ergo quod ex radio cadit tunc super terram, quae est linea *tz*, linea *th*. Et deest ad complementum radii supra superficiem terrae linea *hz*; ipsa namque est, quae illuminatur ex radio arcus *dgu*. Ergo proportio lineae *hz* ad arcum *dgu* est sicut proportio lineae *th* ad arcum *deu*. Hoc quoque similiter inuenitur, secundum quod posuimus et praemisimus in omni loco et omni tempore, cum hoc accidens contingit. Et illud est, quod demonstrare uoluimus.

11.

a) Radii quoque egrediuntur a sole non aequidistantes; sensibiliter tamen apud nos aequidistantes uidentur propter longitudinem eorum a nobis. Ostendam, qualiter radii solis secundum sensum aequidistantes uideantur propter paruitatem spatii, quod est inter eos, cum ad longitudinem ipsorum comparatur, et procedunt ad modum, cuius quantitas non sentitur.

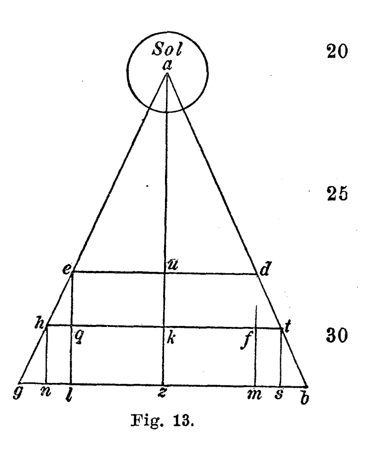


Fig. 13.

Verbi gratia ponam radium a centro solis egredientem duas lineas *ab*, *ag*; et protraham lineam *bg* basim; et ponam duas lineas *ab*, *ag* aequales. Et producam lineam *de* secantem triangulum *abg* aequidistantem lineae *bg*. Et protraham perpendicularem super duas lineas *ed*, *bg*, scilicet super *ed* supra notam *u* et super *bg* supra notam *z*. Et secabo lineam *eg* et lineam *db* supra earum media linea *ht*; linea igitur *ht* secabit lineam *uz* supra notam *k*. Et a linea *gz* super ipsam producam lineam *el* perpendiculariter; et protraham lineam *dm* a linea *bz* super ipsam perpendicularem. Ab *h* quoque ad *n* protraham perpendicularem super lineam *gl*, et producam perpendicularem a *t* ad *s* ex linea *mb*. Et signabo locum, ubi linea *el* secat lineam *ht*, nota *q*, et locum, ubi linea *dm* secat lineam *tk*, nota *f*. Ergo proportio *eu* ad *de* est maior proportione *hq* ad *ht*. Est enim *de* aequalis *qf*; sed *ht* est longior *qf*, et proportio *eu* ad *ed* est sicut proportio *ht* ad *kt* [lege: *kt* ad *ht*]. Sed *hq* est pars *hk*; ergo proportio *hq* ad *ht* est multo minor proportione *eu* ad *ed*.

1. est] *om.* A. 2. eclipsis] eclipsi Q. 3. gratia] causa Q. 4. prohicit] PA proicit QB. 5. *deu*] *om.* Q. 9. *deu*] PAQ *dgu* B. 11. illud] hoc Q. 13. non] *om.* Q. 14. tamen] cum B. 17. ipsorum comparatur] eorum operatur Q. 21. basim] basi Q. 23. lineae] *om.* B. 25. scilicet] *om.* B. 27. linea *ht*] *om.* Q. 28. linea igitur *ht*] *marg. adiec.* P. 29. producam lineam] productam B. 35. *el*] *cb* B. nota *q*] *om.* B. et] at nota* (?) B. *tk*] *dk* B. 36. est] *om.* B. Est] *om.* B. *hq*] huius B. 37. *ht*]*hq* Q. 38. *ht* ad *kt* [lege: *kt* ad *ht*]] *ht* ad *kt* PA *ht* ad *qt* Q *hc* ad *kk* B. *hq*] huius B.

Secundum hanc quoque dispositionem demonstratur, quod proportio *gn* ad *gb* multo plus existit minor proportione *hq* ad *ht*. Quanto plus igitur elongantur bases ab *a*, est superfluum, quo quaeque basis superat eam, quae sequitur ipsam ad partem *a*, minus. Postquam ergo ad hoc peruenitur, ut superfluum maioris earum apud eam, quae ipsam sequitur, non sit quantitatis sensu perceptibilis, tunc lineae egredientes super extremitates illarum basium uidentur aequidistantes. Postquam igitur linea *gb* non uidetur superfluere lineae *ht* sensibiliter, uidentur duae lineae *hg*, *bt* aequidistantes secundum sensum. Et illud est, quod demonstrare uoluimus.

b) Causa itaque exempli ponam duos radios egredientes a centro solis uenientes ad nos non aequidistantes, si hoc est possibile.

Altitudinem igitur cum duobus astrolabiis in una hora et in eodem loco unius altitudinis datae assumam. Et ponam centrum solis punctum *e*, et duo astrolabia *z* et *s*, et protraham lineam *ez*, quae sit radius transiens per regulam astrolabii [*z*, et protraham lineam *es*, quae sit radius transiens per regulam astrolabii] *s*. Arcus igitur *dg* est altitudo astrolabii *z*, et arcus *ab* est altitudo astrolabii *s*; arcus autem *ab* est maior arcu *gd*; et altitudo est una et in una hora et in uno loco, quod est inconueniens. Iam igitur uerificatum est, quod radii ad nos uenientes secundum sensum sunt aequidistantes. Et illud est, quod demonstrare uoluimus.

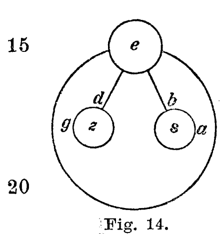


Fig. 14.

12.

Qualiter ostendatur, quod radius conuertitur a duobus lateribus speculi super punctum, quod est centrum circuli continentis duo latera et angulum a duobus lateribus contentum.

Verbi gratia describam portionem circuli, supra quam sint *abg*; et protraham a *b* duas rectas lineas secantes arcum *abg* supra duas notas *d* et *e*, et ponam interuallum *bd* aequale interuallo *be*. Et producam a *b* diametrum supra centrum circuli, quae sit linea *bth*, et ponam *t* centrum circuli. Et sint duo radii egredientes a sole ad duas notas *d* et *e* duarum linearum *bd*, *be* radii *ud*, *ze*. Et producam a duabus lineis *du*, *ze* duas rectas lineas ad *t*, quae est centrum circuli. Duae ergo lineae *td*, *te* sunt aequales, quoniam a centro ad circumferentiam sunt productae; ergo duo anguli *tbe*, *tbd* sunt

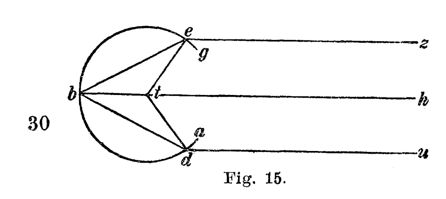


Fig. 15.

2. *gb*] *gh* B. 3. elongantur bases] PA elongatur basis BQ. quo quaeque] quoque Q. eam] *om.* Q. 5. earum] eorum A. 6. sensu] sensum P. 8. duae lineae] superfluae lineae *i* B. 9. illud] hoc Q. 10. solis] solis *e* P. 11. est] *om.* Q. 12. in] *om.* B. eodem loco] uno loco eodem Q. 13. assumam] AQ affirmam PB. 14. *s*, et] si B. 15. transiens] transionis A. 16. *s*] sunt A. 17. igitur] *om.* BQ. 17—18. *z* . . . astrolabii] *om.* B. 18. *s*] sunt A. 22. illud] hoc Q. 23. quod] ut B. conuertitur] conuertatur B. 27. supra] QB super PA. sint] sit B. 30. *bd*] *be* B. 32—33. quae . . . circuli] *om.* B. 32. *bth*] *bdh* A. 34. *d* et *e*] *d* et & Q. 35. Et . . . *ze*] *om.* Q. 36. *td. zd* B.

aequales. Sed radius *hb* aequidistat duobus radiis *ze*, *ud*; iam enim ostensum est hoc ita sensibiliter esse; linea ergo *ze* aequidistat lineae *hb*. Et iam cecidit super eas linea recta *et*; angulus igitur *zet* exterior aequalis est angulo *bte* intrinseco; ergo angulus *tbe* [lege: *bte*] est aequalis angulo *zet*. Radius ergo *ze* supra lineam *et* conuertitur ad notam *t*, quae est centrum. Hac quoque dispositione ostenditur, quod radius *ud* conuertitur supra lineam *dt* ad notam *t*. Iam ergo manifestum est, quod fines radii speculi *dbe* habentis latera recta egredientia a finibus eius ad centrum eius conuertuntur super centrum eius. Et illud est, quod demonstrare uoluimus.

13.

Quomodo fiat speculum, quod comburat anterius et posterius.

Sit linea *ab* diametrus speculi, quod sit arcus *abgdibudezdu* [lege: *abgdib*[*d*]*uddzds*]. Et sit uectis transiens in medio speculi in concauatione ab una parte grossum et ab altera subtile. Et sit latitudo *u* [*i*] minor latitudine *gd* [lege: *ga*]. Et sint duae lineae *ki*, *zh* [lege: *uh*] duo radii. Radius ergo *ki* conuertitur ad *t*, et similiter *zh* [lege: *uh*] ad *t* conuertitur. Est igitur *t* locus comburens ab anteriore parte speculi. Et *mz* et *ls* sunt etiam radii solis cadentes super interiora uectis. Conuertitur igitur [*m*]*z* ad *q* et conuertitur *ls* ad *q*. Punctum ergo *q* post speculum est locus comburens. Et illud est, quod demonstrare uoluimus.

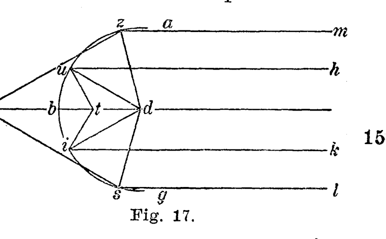


Fig. 17.

14.

Eodem quoque modo demonstratur conuersio radii cristalli.

Signabo cristallum *abgdhz*, et producam diametrum *ab*. Et quia cristallus est corpus tersum claritatem cum spissitudine et peruietate habens, ergo recipit radium intra se, donec arcus *ahz* [lege: *bhz*] intra se recipiat radium. Egreditur ergo radius *ik* [lege: *id*] et cadit supra gibbositatem cristalli, et conuertitur a *t* [lege: a *d*] ad *u* et transit intus ad *h* et conuertitur ab *h* ad *t*. Radius quoque *bhg* [lege: *hg*] cadit super gibbositatem cristalli et conuertitur a *g* ad *e*, et transit interius ad *z*, et conuertitur a *z* ad *t*.

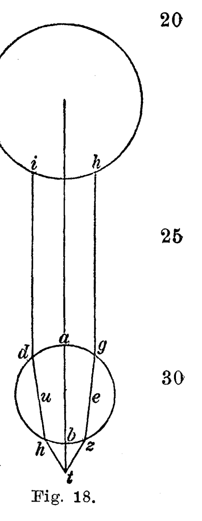


Fig. 18.

---

2. *hb*] *ab* Q. 3. *zet*] *zeit* A. 7. speculi] *om.* B. 9. quod . . . uoluimus] propositum B. 11. *ab*] *om.* Q. 12. *abgdibudezdu*] *ahgdibudezdu* PA *abgddibudezdu* Q *aghdibudezdu* B. 15. altera] altera parte B. *u* [*i*] [*ii* B. 16. *gd*] *dg* A. 20. Et *mz*] *zm* B. etiam] *om.* B. 21. igitur] *om.* B. 23. illud] hoc Q. 24—25. quoque... cristalli] modo signabo conuersionem radii cristalli et demonstrabo QE. 27. claritatem] claritate B. 28. peruietate] PB paruitatem QEA. 29. Egreditur ergo] PA Ergo egreditur QE Egreditur quoque B. 31. transit intus] transitus interius B. 32. ab *h*] *om.* E. quoque] *om.* Q. 32—34. Radius . . . *t*] *om.* E. *bhg*] PA *bhgl* Q *bh* ergo B. 33. et conuertitur] *om.* Q. 34. *e*] *t* B. transit] transitus B.

Punctum ergo t est locus comburendi ante. Et illud est, quod demonstrare uoluimus.

15.

Ostendam etiam, quod rem paruam in terram cadentem inquirit uisus, quam non inuenit neque supra eam cadit, licet terrae quantitatem maiorem ea comprehendat.

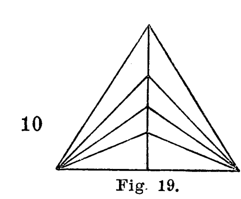


Fig. 19.

Huius autem causa est, quoniam non comprehendit, donec supra ipsam cadat perpendicularis trianguli uisus, quae sensibiliter est maior lineis eius. Quantitatibus enim aequalibus diuersarum longitudinum uisui propinquior uerius uidetur, secundum quod ostensum est. Neque etiam aliquid uisibilium simul cum omnibus uidetur. Et illud est, quod demonstrare uoluimus.

1. illud] hoc QE. 1—2. quod ... uoluimus] *om.* A. 5. maiorem] maior B. 8. quae] quod QE. est] *om.* B. 9. longitudinum] PAB elongationum QE. 10. uidetur] uidebitur B. 11. omnibus] *om.* QE.

[PSEUDO-] EUCLIDES, DE SPECULIS.

ERKLÄRUNG

VON

SEB. VOGL.

1.

Aufstellung eines Spiegels, so daß ein Beobachter das Bild eines Gegenstandes sieht, aber nicht sein eigenes.

Dieses Problem ist dasselbe wie No. 18 der Katoptrik des Heron. Es findet sich lat. und deutsch mit anschaulicher Zeichnung in der Ausgabe von Nix und Schmidt[1]), ferner bei Valentin Rose: Anecdota Graeca et Graecolatina[2]), und bei Witelo V, 56. In der Risnerschen Ausgabe 1572 ist auch zitiert Ptol. 9 th. 2 catopt.[3]) Alb. Magnus erwähnt dieses Problem mit Berufung auf Euklid in der Prospectiva.[4])

Fig. 1. Es sei *ab* eine Wand, die auf der Ebene *bg* senkrecht steht; *bd* sei ein Spiegel, der unter einem Winkel von 30° gegen die Wand geneigt ist. Der Spiegel sei quadratförmig.

Nun werde eine Linie *bc*, die mit der Richtung des Spiegels zusammenfällt, so weit gezogen, daß die Linie *gc* mit ihr einen rechten Winkel bei *c* bildet.

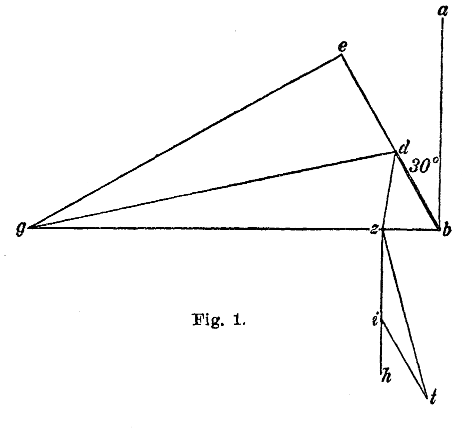


Fig. 1.

Es sei das Auge bei Punkt *g*. Ich will von *g* nach *d* eine Linie ziehen und vom Punkte *d* aus eine weitere, die auf die Ebene *bg* (nach *z*) fällt und zwar so, daß der Winkel *zdg* gleich dem Winkel *cdg* ist. Ferner will ich *zh* senkrecht auf der Ebene *bg* errichten, *zi* gleich *db* (Spiegel) abtragen und *it* parallel dem Spiegel *db* ziehen.

Wenn ich nun auf *it*, das eine Tafel vorstellt, irgendeine Figur *zt* abbilde und sie an den Ort von *zi* stelle, so wird man bei der Betrachtung vom Orte *g* aus die Figur im Spiegel sehen, seine eigene Gestalt aber nicht.[5])

---

1) Bibl. Script. Graec. et Roman. Teubner. Heronis Alex. opera . . 1901, vol. II. p. 358.

2) Ptol. de speculis II. Heft (1870) S 318 u. 328.

3) Dies ist nichts anderes als das Buch de 'speculis' des Ptolem., das aber wahrscheinlich dem Hero gehört. Näh. darüber bei L. Nix u. Schmidt u. Val. Rose l. c. Nach den Zitaten in der Ausgabe der Optik des Witelo gab es aber sicher noch eine andere Ausgabe von dieser Schrift 'de speculis', wie auch Martin vermutet (Nix u. Schmidt. l. c. p. 309). Eine Teilung der fraglichen Schrift in 2 Bücher wird von Rose (Anecd. II. p. 322 und 330 Anm.) und auch von B. Boncompagni angegeben (Delle versioni fatte da Platone Viburtino Roma 1851 S. 9 u. 21 f.) Das zweite Problem unseres Pseudo-Eukl. 'de spec.', das Witelo V, 64 behandelt und mit Ptol. 4 th. 2 catoptr. identifiziert, findet sich in der Ausgabe von Nix u. Schmidt und von Rose überhaupt nicht.

4) De Sensu et Sensato (Borgnet) IX. Bd. parva nat. tr. I. c. 8. p. 17.

5) Der Text im Cod. Hebr. Mon. stimmt hier mit dem lat. vollständig überein. Nur ist dort die Figur nicht allweg korrekt.

2.

Aufstellung zweier Spiegel in der Weise, daß ein Beobachter in dem einen sein Bild kommen, in dem andern gehen sieht.

Dasselbe Problem findet sich wieder bei Witelo, Optik V, 64. Dort das Zitat Ptol. 4 th. 2 catoptr.[1]) Eine ähnliche Anordnung ist in Heros Katoptrik No. XII gegeben. Ebenso bei Wecker: De secretis, Bas. 1582 S 587, (Porta, Magia naturalis, Napoli 1558 S. 147, Cardanus u. a. Es handelt sich hier um zwei Winkelspiegel, die gegeneinander drehbar sind. Bei einer gewissen Neigung sieht sich ein Beobachter in dem einen Spiegel kommen, in dem andern durch Reflexion des ersten Spiegelbildes im zweiten gehen. Witelo bezeichnet diese Anordnung als eine klug erdachte Erfindung der Alten, die mehr der mechanischen Ausführung als des Beweises bedarf.

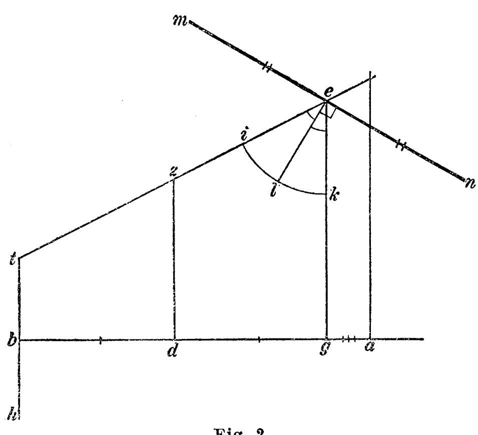


Fig. 2.

Fig. 2. Man zeichne eine Linie *ab* etwa 4 Ellen lang. Auf dieser trage man von *a* aus eine Strecke *ag* ab, die gleich $^1/_4$ der Spiegelhöhe ist und errichte in *a* und *g* Senkrechte auf *ab*. Sodann halbiere man die Strecke *bg* und errichte im Halbierungspunkte *d* wiederum die Senkrechte, und zwar in einer Höhe, die gleich der Spiegelhöhe ist; sie sei *dz*. Desgleichen in *b* ein Lot *bth*, so daß $bt = bh$ = halbe Spiegelhöhe. Sodann verbinde man die Punkte *t* und *z*, bezeichne den Schnittpunkt dieser Geraden mit der Senkrechten in *g* mit *e* und ziehe um *e* als Zentrum einen beliebigen Kreisbogen z. B. *ik*. Diesen Bogen halbiere man und verbinde den Halbierungspunkt *l* mit *e*. In *e* errichte man auf *le* eine Senkrechte *mn* und mache $me = ne$ = Spiegelhöhe.

Lassen wir nun einen der 2 Spiegel auf der Linie *mn* stehen[2]) und drehen den anderen[3]), während das Auge sich im Punkte *d* befindet, so sieht ein Beobachter sich selbst in dem einen Spiegel kommen und in dem anderen sich entfernen.[4])



3.

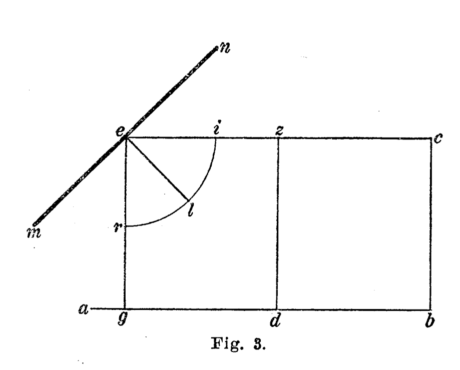
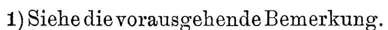


Fig. 3.

Konstruktion eines Spiegels, in dem, wenn ein Beschauer einen seiner Körperteile bewegt, das Spiegelbild ebendenselben bewegt, wie z. B. wenn er die rechte Hand bewegt, die Bewegung im Spiegel mit der rechten Hand geschieht, und bewegt er die linke, dann mit der linken



1) Siehe die vorausgehende Bemerkung.

2) Die Linie *lc* soll festliegen.

3) z. B. um ein Scharnier in *c*.

4) Bei Witelo ist die Anordnung wie in nebenstehender Fig. 3. Dieser ähnlich ist auch die Zeichnung im Cod. Hebr. Mon. 36.

Dies ist Problem XI der Katoptrik des Heron. Dasselbe bei Witelo IX, 35 (dort ist zit. Ptol. Katopt. 3 th. 2.[1]) und Euklid Katoptr. 29. Ein Modell hierzu befindet sich im deutschen Museum zu München.

Fig. 4. Wir beschreiben einen Kreis, dessen (von der Seite des eingeschriebenen Fünfecks abgeschnittener) Bogen so groß ist als wir den Spiegel haben wollen. Von diesem Kreise schneiden wir auch noch mit der eingeschriebenen Sechsecksseite einen Bogen ab.

Sodann fertigen wir mit den abgeschnittenen Bögen zwei Formen (regula)[2], eine hohle aus dem Fünfecksbogen und eine erhabene aus dem Bogen über der Sechsecksseite.

Nun nehmen wir ein Stück reines Eisen, das rechtwinklig und einem Ziegelsteine ähnlich ist, von entsprechender Dicke. Die Länge sei so groß wie die beiden Sehnen (des Fünf- und Sechseckes) zusammen[3]), die Breite habe die Dimension der Sechsecksseite.

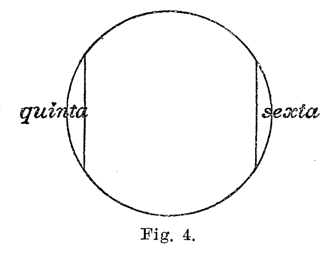


Fig. 4.

Auf diesem Eisenstück schleifen wir nun nach der hohlen Form (Bogen über der Fünfecksseite) einen konvexen Zylinderspiegel, (dessen Achse mit der Breite des Eisenstückes parallel läuft) und daran anschließend, ohne die Wölbung des Zylinderspiegels zu vermindern, einen konkaven Zylinderspiegel mit der andern Form (Bogen über der Sechsecksseite), der also in der Tiefe des Eisenstückes liegt und seine Achse wieder parallel der Breitkante hat[4]).

Endlich polieren wir die Spiegel, bis sie gut zeigen.

Wenn nun ein Beobachter auf diesen Spiegel blickt und seine rechte Hand bewegt, so bewegt auch das Spiegelbild die rechte Hand. Bei den gewöhnlichen Spiegeln verhält es sich jedoch nicht so. Wenn wir aber den Spiegel drehen[5]), so daß das Gesicht zurücktritt, so kehren wir das Bild des Gesichtes um, solange der Beobachter der Längsseite des Spiegels gegenübersteht[6]).

4 und 5.

Austritt eines Strahles aus dem Auge und Hinlenkung (durch spiegelnde Flächen) eines Strahles zum Auge.

---

1) Siehe Bemerkung zu Problem 1.

2) Wir können sie uns wie Gesimshobel vorstellen; siehe nebenstehende Fig. (Witelo u. Hero).

3) Im Text steht: Die Länge sei so groß wie die Fünfecksseite. Es muß aber wohl heißen: wie die Fünf- und Sechsecksseite zusammen. Witelo hat Länge größer als Fünf- und Sechsecksseite zusammen, Breite größer als Sechsecksseite.

4) Ein Längsdurchschnitt gibt dann eine wellenartige Figur.

5) Sowohl bei Witelo als bei Heron ist der Spiegel auf einem Lager drehbar. Es entstehen dann zwei Lagen, wie die Fig. 6 zeigt, die auch bei Euklid Kataptr. 29 (Heiberg) und Witelo sich findet.

6) Der Beobachter sei bei *m*. —

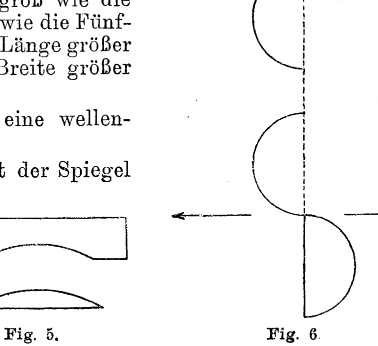


Fig. 5. Fig. 6.

4.

Es schreitet aus der Pupille eine leuchtende Kraft fort, die in die ganze ihr begegnende Luft Licht in der Form eines Tannenzapfens (lumen pineale [1]) eindrückt, dessen Spitze sich bei der Pupille befindet. Je weiter sich dieser Kegel erstreckt, desto mehr erweitert sich seine Basis und es ist die Figur, die jenes Licht erfüllt, ein Kegel, dessen Spitze beim blickenden Auge und dessen Enden sich bei dem befinden, was angeblickt wird. Der Blick erfaßt also nur das, worauf jenes Strahlenlicht fällt, und worauf es nicht fällt, das erfaßt der Blick nicht.

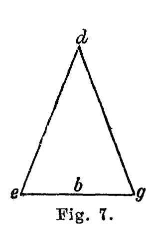


Fig. 7.

Es sei z. B. (Fig. 7) Punkt *d* das Auge, der von *d* ausgehende Strahl sei *db* und das, worauf der Strahl *db* fällt, sei die Linie *eg*. Das Dreieck *gde* ist also die erhellte Fläche [2]), die vom Auge ausgeht, deren Spitze bei *d* und deren Basis *ge* ist. Und je weiter sich der Strahl erstreckt, desto mehr erweitert sich seine Basis. Er hat also die Gestalt eines Tannenzapfens (Kegels). Und das ist es, was wir zeigen wollten.

5.

Ein Strahl wird nach gleichen Winkeln zurückgeworfen.

Mag ein Strahl vom Auge oder von der Sonne ausgehen, er wird, wenn er einem dichten, blanken Körper mit gleichmäßiger Oberfläche begegnet, nach gleichen Winkeln zurückgelenkt, nämlich wenn er schief (gegen den Spiegel) ausgeht. Geht er aber senkrecht (zum Spiegel) aus, so wird er in sich selbst zurückgelenkt. Für den Fall der Zurückwerfung nach gleichen Winkeln stellen wir folgendes Beispiel auf:

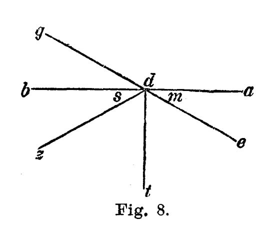


Fig. 8.

Es sei (Fig. 8) die Linie *ab* eine dichte, blanke Spiegeloberfläche und *e* der Ort des Auges. Die Linie *eg* ist dann der Verlauf eines Strahles vom Auge in gerader Richtung, wenn die Linie *ab* ihn nicht hindert. Ist aber an der Stelle der Linie *ab* ein Körper und tritt von *e* ein Strahl aus, der auf den Punkt *d* der Linie *ab* fällt, so wird dieser zu *z* gelenkt, was folgendermaßen bewiesen wird:

Die Linie *eg* ist der Verlauf des Strahles in gerader Richtung, wenn nicht etwas ihn zur Umkehr veranlaßt. Wir wollen uns vorstellen, daß die Linie *eg* ein feines eisernes Stäbchen sei, das mit der Linie *ab* fest verbunden ist und in der Richtung von *eg* verläuft. Nun wollen wir die Linie *ab* nach der Seite drehen, auf der Punkt *e* liegt. Dann wird die Linie *dg* die Linie *dz* bedecken. Denn der Winkel *ame* ist gleich dem Winkel *gdb*. Führen wir also die Drehung in der angegebenen Weise aus, dann wird Linie *dg* auf *dz* fallen, und es wird Winkel *bsz* gleich dem Winkel *ame*. Demnach wird also *edg* vom Punkte *d* nach *dz* gelenkt und es entstehen zwei gleiche Winkel *m* und *s*. Und so findet die Zurücklenkung statt bei einem Spiegel, der schief (gegen das Auge) aufgestellt ist. [3])

Befindet sich aber das Auge bei Punkt *t*, dann wird der Strahl *td* auf sich selbst zurückgeworfen. Denn der Winkel *amt* ist ein Rechter und ebenso der Winkel *bst*. Also wird Strahl *td* in sich selbst zurückgelenkt. Und das ist es, was wir darlegen wollten.

---

1) Dieser Ausdruck deutet auf arabischen Ursprung. Vgl. Alkindi: de aspectibus No. 2 und die dortige Bemerkung. Auch die Darstellung des Sehvorganges, wie er hier gegeben ist, deckt sich mit der in Alkindis Schrift. Vgl. Nr. 7ff.

2) Vielmehr Durchschnitt des Kegels.

3) Wir haben dieselbe Darlegung bei Alkindi, 'de aspectibus' Nr. 17.

Roger Baco behandelt den Fall in derselben Weise und zitiert außer Alkindi auch noch unsere Schrift: Euklid V, sui libri (op mai. II. 484).

6.

Wenn wir ferner Fig. 9 einen Spiegel *ab* aufstellen, das Auge im Punkte *g* annehmen und den Sehstrahl umschließen in der Weise, daß wir vor das Auge die Öffnung eines dünnen Schilfrohres oder dergleichen bringen und hindurchblicken, so daß also der Strahl vom Auge ausgeht und durch die Öffnung hindurchgeht, bis er auf die Spiegeloberfläche in *d* auftrifft, dann werden wir im Spiegel alles sehen, was auf der Linie *dc* sich befindet. Denn der Strahl *gd* wird, falls ihn nicht die Linie *ab* hindert, in gerader Richtung bis zu *e* gehen. Wenn ihn aber die Linie *ab* zur Umkehr veranlaßt, so wendet er sich nach *q* aus dem Grunde, den wir eben angegeben haben. [1])

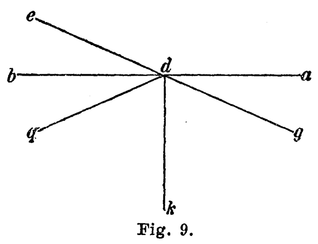


Fig. 9.

7.

Der Sehstrahl oder vielmehr der Sehkegel ist Licht, das vom Auge ausgeht. Seine Basis ist so groß wie der Himmel. Es ist nämlich der Winkel, dessen Spitze bei einem Punkte des Auges ist, sehr ausgespannt, wie z. B. Winkel *egd* in Fig. 10 und umfaßt einen Teil des Himmels, auf den der Strahl gerichtet ist. Das Dreieck ist also weitwinklig, nämlich beim Winkel *g*. [2])

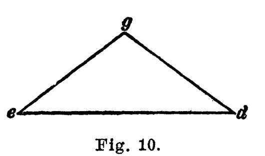


Fig. 10.

8.

Ähnlich wie vom Auge geht auch von jedem Punkte des Sonnenkörpers ein Strahl (Strahlenkegel) aus, bis er mit seinem Lichte die Hälfte der Erde bedeckt; sodann verengert er sich über der Erde und auch sein Schatten wird immer enger, bis er zu einem einzigen Punkte gelangt, und es wird der Schatten der Erde wie ein Tannenzapfen. Auch das, was von dem Strahl der Sonne (gemeint sind die gesamten Strahlen der Sonne bis zu den äußersten Randstrahlen) ausgeht, der die Hälfte der Erdkugel bedeckt, verengt sich zugleich mit dem Schatten der Erde und gelangt zu einem einzigen Punkte wie ein Tannenzapfen, d. h. das Ganze, das vom Sonnenkörper ausgeht, schreitet fort, bis es zu einem Punkte über die Erde hinausgelangt.

---

1) Hier handelt es sich also um die Tatsache, daß man die Dinge vor dem Spiegel in gerader Richtung vom Auge aus im Spiegel sieht in derselben Entfernung und Anordnung wie sie sich vor dem Spiegel befinden. Die Erklärung ist wieder dieselbe wie bei Alkindi 'de aspectibus' an Nr. 21; nur ist letztere klarer und ausführlicher.

2) Nr. 7 gehört eigentlich zu Nr. 4. Der hebr. Cod. Mon. vereinigt auch die beiden Fälle. Was die Größe des Sehwinkels betrifft, den die Landschaftsmaler auf 60°—45° annehmen, lehrt Roger Baco, op. mai. II, S. 61: „Man weiß aus der Erfahrung, daß das Auge von der Oberfläche der Erde aus nicht den 4. Teil des Himmels erfassen kann.“ Witelo IV, 3: „Der größte Sehwinkel ist kleiner als ein Rechter, aber nicht viel.“ — —. Damianus Heliod. Lar.: De opticis libr. II. ab Erasmo Bartholino Paris 1657, Kap. V. S. 9 und Hirschberg: Gesch. d. Aughk., S. 168 u. 170. „Der Sehkegel ist rechtwinklig. Wir sehen nämlich auf einmal den 4. Teil des Himmels.“ . . Er unterscheidet aber weiter zwischen generaliter und accurate sehen. Generaliter sieht man mehreres zugleich, accurate nur nacheinander. Albertus Magnus schreibt als Lehre des Empedokles im Buche de Sensu et Sensato (Borgnet, Bd. IX, S. 8f.): „Vom Auge geht eine Lichtpyramide aus welche die ganze Hemisphäre erfüllt und hinreicht alle Sehobjekte zu erfassen.“ Als Grund wird angegeben, daß jeder Mensch zugleich 6 Himmelszeichen sieht die über die ganze Hemisphäre zerstreut sind.

Es sei demnach (Fig. 11) die Sonne der Kreis *a* und der Ausgang der Strahlen(kegel) von einer jeden einzelnen Stelle des Sonnenkörpers sei so, wie es in unserer Figur dargestellt ist; es tritt also dann Winkel neben Winkel auf und jeder schimmert mit seinen Strahlen und erfüllt den Horizont mit einer leuchtenden Oberfläche.

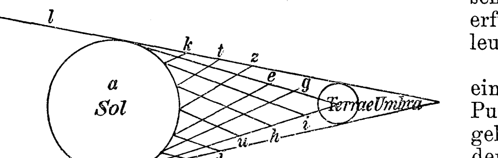


Fig. 11.

Es sei beispielsweise *b* und g wie ein Strahl, der von einem einzigen Punkte ausgeht, ein anderer *d* und *e* gehe von einem anderen Punkte aus, der den ersten berühre; ähnlich *u* und *z*, *h* und *t* und schließlich *i* und *k*; zugleich möge sich ein jeder in seiner ganzen Figur drehen. In derselben Weise gelange auch *l* mit *m* zusammen, da der Austritt von *m* mit *h* und von *l* mit *t* stattfindet. Dann also erfüllt das Licht den Horizont überall und bedeckt die Hälfte der Erdkugel. Und weil es die Erde bedeckt, wird der Schatten zusammengedrängt und verengt, bis die Verengung zu einem einzigen Punkte gelangt und wie ein Tannenzapfen wird. [1])

Ähnlich ist es auch beim Schatten eines Balkens, der von der einen Seite her eine quadratische Oberfläche, nach der anderen Seite aber eine längere Oberfläche hat und mit letzerer die Erde berührt. Je mehr er sich von der Sonne entfernt, desto kleiner wird der Schatten der Längsseite gegenüber den Schatten der Seiten des Quadrates. [2])

Und alles, was aufrecht auf der Erde errichtet wird, verlängert den Schatten, je weiter es von der Sonne entfernt wird, wie die Linie *sf* (Figur fehlt). Und das ist es, was wir darlegen wollten.

9.

Dementsprechend will ich auch zeigen, daß, wenn die Sonne durch ein Fenster [3]) scheint, der Lichtfall auf den Boden weiter ist als das Fenster.

Dieses Theorem findet sich mit derselben Zeichnung und den nämlichen Buchstaben auch bei Witelo, Optik II. 36 f. Roger Baco beruft sich darauf im op. mai. II. 493. [4])

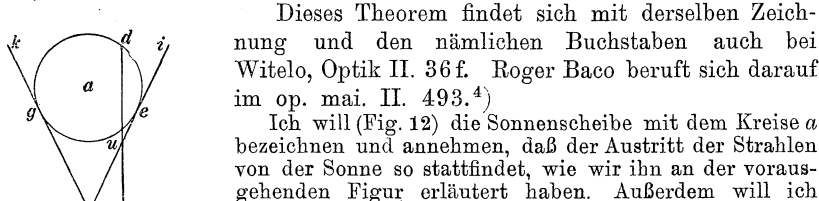


Fig. 12.

Ich will (Fig. 12) die Sonnenscheibe mit dem Kreise *a* bezeichnen und annehmen, daß der Austritt der Strahlen von der Sonne so stattfindet, wie wir ihn an der vorausgehenden Figur erläutert haben. Außerdem will ich ein Fenster für den Einfall der Strahlen bestimmen, nämlich zwischen *a* [5]) und *b*. Die Oberfläche des Bodens sei die Linie *tz*.

Nun will ich in Übereinstimmung mit dem schon früher Gesagten einen Strahl *e* von der Sonne aus ziehen, der durch einen Randpunkt der Fensteröffnung geht und auf Punkt *z* der Bodenoberfläche fällt; desgleichen einen Strahl *g*, der durch den Randpunkt *a* des Fensters geht und beim Punkte *t* des Bodens endet.

1) Vgl. Alkindi: de aspectibus Nr. 13.

2) Man dachte sich den Himmel eben, die Sonne also am Abend, da sie größere Schatten wirft, weiter entfernt.

3) Unter fenestra, Fenster, ist gewöhnlich nicht ein ganzes Fenster zu verstehen, sondern nur ein Loch oder eine Öffnung in demselben (foramen). Man könnte dann setzen: Öffnung im Fenster. Vgl. Curtze in Himmel und Erde. Illustr. naturw. Monatsschr. der Urania, Berlin 1901, p. 226.

4) Näheres im Schlußwort unserer Abhandlung.

5) Witelo hat *c*, da *a* schon als Kreismittelpunkt vorkommt.

Es ist dann klar, daß die Linie *tz* größer ist als die Öffnung *ab*. Die Linie *tz* stellt aber den Teil der Bodenfläche dar, den der Strahl berührt und sein Eingang durch den Raum *ab* ist die Größe der Fensterweite.

10.

Bei der Sonnenfinsternis aber ist das durch das Fenster eintretende Licht vermindert, nämlich nicht rund; dann ist auch der Einfall auf den Erdboden nicht wie die Linie *tz*, sondern er entspricht der Quantität der Verfinsterung; und es ist die Verminderung des projiziertem Lichtes proportional der Lichtabnahme durch die Verfinsterung.

Z. B. Es sei Sonnenfinsternis und es werde der Bogen *dgu* (vorausgehende Fig.) verdunkelt, so daß also nur der Teil, der durch den Bogen *deu* dargestellt ist, Licht (Strahl) entsendet. Es trete nun das Licht (Strahl) dieses Bogens *deu* durch das Fenster bis zur Bodenfläche, welche durch die Linie *tz* dargestellt wird. Dann ist das zum Erdboden fallende Licht die Linie *th*.

Es fehlt demnach zur Ergänzung des Lichtes (Strahles) auf der Bodenfläche die Linie *hz*. Diese wird nämlich vom Lichte (Strahl) des Bogens *dgu* beleuchtet. Also verhält sich die Linie *hz* zum Bogen *dgu* wie die Linie *th* zum Bogen *deu*. Dies findet sich in ähnlicher Weise wieder, wie wir es hier erläutert haben, an jedem Orte und zu jeder Zeit, so oft dieses Ereignis eintritt. Und das ist es, was wir zeigen wollten.[1])

11a.

Von der Sonne gehen die Strahlen nicht parallel aus. Nur infolge der großen Länge scheinen sie unserem Auge parallel zu sein.

Erklärung und Zeichnung hierzu gibt auch Witelo II, 35.

Ich will zeigen, wie die Sonnenstrahlen dem Augenscheine nach parallel sind, und zwar infolge des kleinen Raumes zwischen ihnen im Vergleich zu ihrer Länge und weil sie in einem solchen Maße hervorgehen, daß die Quantität nicht wahrgenommen wird.

Des Beispieles halber nehme ich in Fig. 13 als Strahl, der vom Zentrum[2]) der Sonne ausgeht, die zwei gleich langen Linien *ab* und *ag* und ziehe die Linie *bg* als Basis. Sodann will ich die Linie *de* ziehen, die das Dreieck *abg* parallel zur Linie *bg* schneidet. Ferner will ich vom Zentrum *a* der Sonne aus das Lot auf die zwei Linien *ed* und *bg* fällen, das *ed* in *u* und *bg* in *z* trifft. Nun will ich die Linien *eg* und *db* in ihren Mitten mit der Linie *ht* schneiden. Diese Linie *ht* wird dann auch die Linie *uz* in *k* treffen. Endlich will ich *el* senkrecht zu *gz* und *dm* senkrecht zu *bz* ziehen und ebenso ein Lot *hn* auf *gl* und ein Lot *ts* auf *mb*. Den Ort, wo die Linie *el* die Linie *ht* schneidet, will ich mit *q* und den Ort, wo *dm* die Linie *tk* trifft, mit *f* bezeichnen.

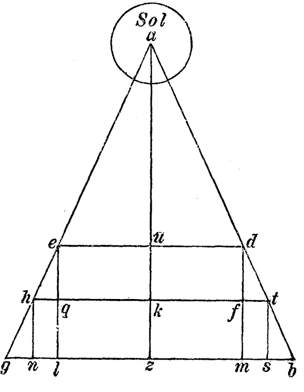


Fig. 13.

Dann ist also das Verhältnis $eu : de$ größer als das Verhältnis $hq : ht$.

---

1) Wir haben in diesen Beobachtungen das Prinzip für die Camera obscura in ihrer einfachsten Art speziell bei Sonnen- und Mondfinsternissen. Näheres über die durch eine Öffnung erzeugten Bilder bei Roger Baco siehe Vogl: Die Phys. Rog. Bacos. Diss. Erlangen 1906, S. 85f.

2) Man beachte, daß hier die Strahlen wieder vom Mittelpunkt der Sonne ausgehen, während sie vorher von Punkten der Oberfläche austraten. Vgl. hierzu Alkindi: de aspectibus Nr. 13.ff.

Es ist nämlich *de* gleich *qf*; *ht* ist aber länger als *qf* und das Verhältnis *eu* : *ed* gleich dem Verhältnisse *kt* : *ht*. Aber *hq* ist ein Teil von *hk*; also ist das Verhältnis *hq* : *ht* viel kleiner als das Verhältnis *eu* : *ed*.

In derselben Weise läßt sich auch beweisen, daß das Verhältnis *gn* : *gb* noch viel kleiner ist als das Verhältnis von *hq* : *ht*.

Je weiter demnach die Basen sich von *a* entfernen, desto kleiner wird der Überschuß, um den eine jede Basis diejenige übertrifft, welche ihr nach der Seite hin, wo *a* liegt, folgt.

Da man also dahin gelangt, daß der Überschuß der größeren Linie gegenüber der vorhergehenden keine für die Sinne wahrnehmbare Quantität besitzt, so erscheinen die Linien, die über die Enden jener Basen hinausgehen, als parallel. Indem also die Linie *gb* die Linie *ht* nicht merklich zu übertreffen scheint, zeigen sich die zwei Linien *hq* und *bt* dem Augenscheine nach parallel. Und das wollten wir zeigen.

11b.

(Auf eine andere Weise.)

Ich will beispielshalber zwei Strahlen annehmen, die vom Zentrum der Sonne ausgehen und nicht parallel zu uns gelangen, wenn dies möglich ist.

Beifügen will ich, daß die Höhe (eines Gestirnes) in 2 Astrolabien zu ein und derselben Zeit und an ein und demselben Orte ein und dieselbe ist.

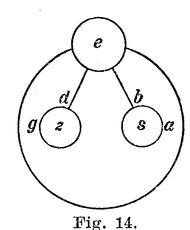


Fig. 14.

Es sei nun (Fig. 14) das Zentrum der Sonne der Punkt *e* und die zwei Astrolabien seien *z* und *s*. Ich ziehe die Linie *ez*, die der Strahl sein soll, der durch die Regel des Astrolabiums *z* hindurchgeht; ebenso die Linie *es* als Strahl durch die Regel des Astrolabiums *s*.

Es ist also der Bogen *dg* die Höhe im Astrolabium *z* und der Bogen *ab* die Höhe im Astrolabium *s*.

Der Bogen *ab* ist aber größer als der Bogen *gd*, (weil die Strahlen nicht parallel sein sollen). In Wirklichkeit ist aber die Höhe zu ein und derselben Zeit und an ein und demselben Orte nur eine für beide Astrolabien, was sich mit dem anderen Ergebnis nicht verträgt. Es ist demnach erwiesen, daß die Strahlen, die zu uns gelangen, für unser Sinnesorgan parallel sind. Und das wollten wir dartun.

12.

Wie man zeigen könne, daß die Strahlen, die von zwei Seiten eines Spiegels (Winkelspiegels) nach einem Punkte gelenkt werden, der das Zentrum eines Kreisbogens ist, in dem die zwei Seiten enthalten sind mitsamt dem Winkel, den sie bilden.

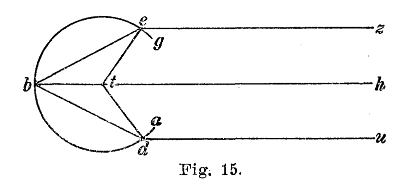


Fig. 15.

Beispiel: Ich will (Fig. 15) einen Teil von einem Kreise beschreiben, auf dem die Punkte *a*, *b*, *g* liegen. Von *b* aus ziehe ich zwei gerade Linien (als Winkelspiegel), die den Bogen *abg* in zwei Punkten *d* und *e* schneiden, und nehme die Entfernung *bd* gleich *be*. Sodann ziehe ich von *b* aus durch den Kreismittelpunkt eine Linie *bth*, wobei *t* der Mittelpunkt des Kreises sei.

Nun mögen von der Sonne zwei Strahlen *ud* und *ze* zu den Punkten *d* und *e* der beiden Linien *bd* und *be* gehen.[1]) Ich ziehe von den zwei Linien *du* und *ze* zwei gerade Linien zum Kreismittelpunkte *t*. Dann sind die Linien *td* und *te* gleich, da sie vom Zentrum zur Peripherie gezogen sind; also sind dann auch die zwei Winkel *tbe* und *tbd* gleich.

1) Man beachte, daß hier die Sonnenstrahlen wieder parallel genommen sind.

Nach unserer Annahme möge ferner der Strahl *hb* parallel zu den beiden Strahlen *ze* und *ud* sein; also ist dann die Linie *ze* parallel der Linie *hb*; und da die Linie *et* diese beiden Parallelen trifft, so ist der äußere Winkel *zet* gleich dem inneren *bte*. Der Strahl *ze* wird also nach der Linie *et* zum Zentrum *t* gelenkt.

In derselben Weise wird gezeigt, daß auch der Strahl *ud* nach der Linie *td* zum Punkte *t* gelenkt wird.

So ist es also klar, daß die Randstrahlen eines (Winkel-)Spiegels, der ebene Seiten hat, die von der Kreisperipherie, die ihn umgibt, bis zum Scheitel (*b*) reichen, auf den Kreismittelpunkt gelenkt werden. Und das ist es, was wir zeigen wollten.

13.

Wie ein Spiegel entsteht, der vorne und rückwärts eine Brennstelle hat. [1])

Zu diesem Problem, das, wie wir zunächst vermuten [2]), auf Untersuchungen des Arabers Ibn al Haiṭam fußt, fehlt die Figur sowohl im lat. wie im hebr. Text.

Im Zusammenhange damit steht dann wohl auch eine Konfusion der auf diese fehlende Figur sich beziehenden Buchstaben, wodurch das Verständnis noch mehr erschwert wurde. [3]) Erst durch die ausführliche Publikation der

---

1) Roger Baco verweist mehrmals darauf. Vgl. op. mai. (Bridges) II. 491: „Es lehrt nämlich Euklid in der 33. Prop. 'de speculis' einen Spiegel anfertigen, der vorne und rückwärts (ante et retro) eine Vereinigung der Strahlen ergibt." op. mai. II. 538: „Es lehrt aber Euklid einen Spiegel fertigen, der vorne und rückwärts brennt."

[Die bekannte Katoptrik Euklids (?) kann hier nicht gemeint sein, denn diese enthält diesen Satz überhaupt nicht und zählt nur 30 resp. 31 Sätze, von denen der letzte ganz allgemein einen Brennpunkt bei sphär. Hohlspiegeln konstatiert. Baco bestätigt dies selbst ausdrücklich: „op. mai. I. 115; II. 490: Speculo concavo ad solem posito, ignis accendatur, sicut dicit ultima propositio de speculis . . ." Im Buche 'de speculis' ed. Combach S. 168 gibt er die Erklärung dieses Satzes ganz wie die Katoptr. d. Euklid. Die Einteilung in 30 (Heiberg) oder 31 Sätze der Eukl. Katoptr. kommt von der Trennung des 20. Satzes der Ausgabe des Dasypodius durch David Gregorius. In der Ausgabe der Optik des Witelo von Risner sind die Sätze dieser Katoptr. nach Gregory zitiert.]

2) Sollte aber umgekehrt der Araber die Anregung zu seinen Untersuchungen aus der (Pseudo) Euklid. Schrift erhalten haben, so wäre es wahrscheinlich, daß ihre Angaben aus der Antike stammen und schon die klassischen Gelehrten die longitudinale Aberration in sphärischen Spiegeln kannten. Um diese dann zu vermeiden, hätten Diokles u. a. den parabol. Hohlspiegel konstruiert. Vgl. Ibn al Haiṭams Schrift über d. parab. Hohlsp. v. J. L. Heiberg u. E. Wiedemann in Bibl. Math. III. F. X. Bd. S. 201 ff.

3) Vgl. die Bemerkungen zum hebr. Text im Cod. Monac. in der Monatsschrift für Gesch. u. Wiss. d. Judentums. Bd. 37 (1893) S. 520, v. Steinschneider.

Auch schon Roger Bago schwankt bei Erklärung unseres Problems hin und her, bis er endlich in der Schrift des Ibn al Haiṭam über den parabolischen Hohlspiegel eine Lösung fand, die aber kaum die uns interessierende ist, da wir es, wie die verschiedenen Brennpunkte zeigen, mit sphärischen Hohlspiegeln zu tun haben. Im op. mai. II. 588 schreibt er: „Es lehrt aber Euklid einen Spiegel darstellen, der vorne und rückwärts brennt. Wenn diese nach Art und Weise eines Spiegels geschieht, so kann es von den konkaven und ovalen Spiegeln verstanden werden, insofern beim unteren Pole der Achse das Brennen nach rückwärts und vorwärts stattfindet, wie auf einzelnen Punkten der Achse, wie wir wollen." Vgl. auch op. mai. II. 487. [Dies kann sich nur auf den sphärischen Hohlspiegel beziehen und zwar auf die verschiedenen Brennpunkte vor demselben, wie sich aus den weiteren Ausführungen Bacos ersehen läßt.] Er fährt fort: „Wenn er (Euklid) aber wörtlich das Brennen über den Spiegel hinaus meint, so wäre dies möglich durch Reflexion; dann müßte aber der Spiegel ringförmig sein, so daß die

Schrift über den sphärischen Hohlspiegel des Ibn. al Haiṭam von E. Wiedemann[1]) sind wir in der Lage den Text in unserer Schrift genauer darzulegen. Wir wollen deshalb zum leichteren Verständnis die grundlegenden Momente aus der Schrift des Arabers vorausschicken.

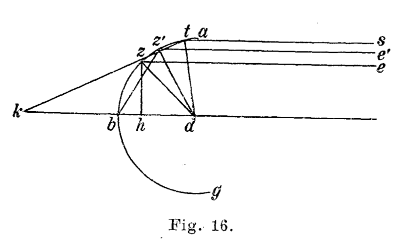


Fig. 16.

Ibn al Haiṭam lehrt (Fig. 16):

1. Sonnenstrahlen, die parallel auf einen sphärischen Hohlspiegel *abg* treffen, werden nach der Achse *db* hin reflektiert. Auf einen Punkt derselben fallen nur die Strahlen, die von der Pheripherie eines Kreises auf der Kugelfläche, der senkrecht zur Achse steht, reflektiert

---

Strahlen von zwei Seiten her einfielen, was man sich schwer vorstellen kann und ich bisher nicht erfahren habe.“ [Bei diesem ringförmigen Spiegel scheint Baco bereits an den parabolischen Hohlspiegel zu denken. Er spricht davon näher op. mai. II 490: „Der Verfasser des Buches über die Brennspiegel (wohl Ibn al Haiṭam gemeint) lehrt einen Spiegel von der Gestalt eines Eies oder Ringes fertigen, bei dem die Reflexion von allen Kreisrichtungen auf einen einzigen Punkt der Achse stattfindet. Es ist dabei, als wenn der sphärische Hohlspiegel so lange gedrückt worden wäre, bis er diese Form erhielt.“ Näh. in Ibn al Haiṭams Schrift über den parab. Hohlspiegel. Bibl. math. III. J. X. Bd. und Wiedem. Annalen Bd. 39 (1890) S. 110ff.; 130].

Hören wir Baco weiter: „Sicher kann man aber ein Perspicuum (dieses Wort gebraucht er sowohl für durchsichtige brechende wie auch reflektierende Medien, Glasspiegel!) anfertigen, das von der einen Seite her konkav ist, auf der anderen konvex und große Dicke besitzt (zu beachten die Korrektur zu op. mai. II. 538 aus Vol. III. S. 156: „concavum ex una et convexum ex alia parte habens spissitudinem magnam“), so daß nach rückwärts die Brennstelle durch Strahlenbrechung, nach vorne aber durch Reflexion stattfindet.“ [Es ist möglich, daß sich Baco hier Gebilde von der Gestalt einer konvex-konkaven Linse vorstellt. Etwas Ähnliches hätten wir an dem Smaragd, von dem Plinius h. n. l. 37, § 64 spricht. Derselbe war hohl ausgeschliffen, um die Strahlen zusammenzudrängen. Näh. Hirschberg, Gesch. d. Augenheilk. im Altert. S. 176f. Es kommen 40 cm lange und 25 cm dicke Kristalle vor; vielleicht versteht Plinius solche unter smar. Scythici et Aegypt.]

„Wendet man aber“, fährt Baco weiter fort, „gegen diese verschiedenen Brennmöglichkeiten ein, daß der brennende Stoff zwischen Sonne und Spiegel liegt, weshalb keine Reflexion möglich ist und darum auch keine Brennstelle und überhaupt kein Strahleneinfall, so ist zu bemerken, daß eben der Brennstoff nicht direkt vor den Spiegel gebracht werden darf, sondern von der Seite her und mit Vorsicht, was die Experimentatoren verstehen.“ [Der Gedanke ist, daß man den Spiegel vielleicht etwas neigt oder den Brennkörper von der Seite her etwa an einem dünnen Stabe einführt.]

Endlich erklärt Baco den vorwärts und rückwärts brennenden Spiegel nach dem Muster der Schrift des Ibn al Haiṭam über die parabolischen Hohlspiegel. Er erwähnt diesen Spiegel an mehreren Stellen (vgl. op. mai. I. 115f.; II. 487, 490f. 538, op. III. (Brewer 45; 112; 116) und lehnt sich in seinem Spiegelbuche (ed. Combach S. 197, 201ff.) ganz an das arabische Muster an. Hiernach vereinigen sich alle einfallenden Strahlen im Brennpunkt des Paraboloids. Dabei liegt für die Strahlen, die weiter zurück um den Scheitel des Paraboloids einfallen, die einzige Sammelstelle vorne und für die Strahlen, die gegen den Rand zu auftreffen, rückwärts. Man könnte deshalb vom Rande aus einen Ring abtrennen, der die einfallenden Strahlen nach hinten reflektiert, während die übrig bleibende eiförmige Spitze die Strahlen nach vorne zusammenlenkte.

[1]) In Biblioth. Math. III. F. X. Bd. S. 293ff. Vgl. Wiedemann, Annalen d. Phys Bd. 39 (1890) S. 116ff.

werden. Die Entfernung eines solchen Punktes vom Spiegelmittelpunkt ist stets größer als ein Viertel des Durchmessers.

2. Diejenigen Strahlen, die von einem Kreise reflektiert werden, dessen Abstand vom Scheitel (*b*) des Spiegels gleich der Seite eines regulären eingeschriebenen Achteckes ist, (wenn also der einfallende Strahl 45° gegen das Einfallslot geneigt ist) werden nach dem Mittelpunkte dieses Kreises reflektiert, z. B. *ez* nach *h*.

3. Ist der Abstand des betreffenden Kreises gleich der Seite eines eingeschriebenen regelmäßigen Sechseckes (oder: sind die einfallenden Strahlen 60° gegen das Einfallslot geneigt), dann findet die Reflexion nach dem Scheitel des Spiegels statt, z. B. *e'z'* nach *b*.

4. Beträgt die Entfernung des reflektierenden Kreises mehr als die Seite des eingeschriebenen Sechseckes und weniger als die des eingeschriebenen Viereckes, z. B. *bt*, so werden die Strahlen vom Glasspiegel in einem Punkte *k* gesammelt, der hinter der Kugel gelegen ist. Es gelangt also *st* nach *k*.

5. Alle reflektierenden Kreise, deren Abstand vom Scheitel kleiner ist als die Seite des eingeschriebenen Sechseckes, lenken die Strahlen nach einem Punkte vor dem Spiegel.

Wir sehen also hieraus genau, was unter dem Brennpunkt „vorne und zurück" (ante et retro) gemeint ist. Ein Ring von der Breite *z't* würde die Strahlen nach Punkten hinter dem Spiegel lenken, der übrige Teil des Spiegels auf Punkte vor dem Spiegel.

Mit Berücksichtigung dieser Darstellung Ibn al Haiṭams dürfte es nun möglich sein den Text in unserer Pseudo-Euklidischen Schrift ohne große Änderung klar zu legen.

Es sei (Fig. 17) *db* der Durchmesser (Achse) eines Spiegels, der durch den Bogen *abg* (*d* von vorne) *isuz* dargestellt wird. Ferner seien zwei Sehnen gegeben, die durch den Mittelpunkt (Scheitel) des Spiegels gehen und in der Höhlung verlaufen. Die eine sei lang, die andere kurz. Es sei die bis zu *u* reichende Sehne kleiner als die bis zu *z* gehende. Nun seien die Linien *ki* und *hu* zwei Strahlen. Es wird dann *ki* zum Punkte *t* gelenkt und ebenso *hu*. Also ist *t* eine Brennstelle auf der vorderen Seite des Spiegels. Ebenso seien *ls* und *mz* zwei weitere Strahlen, die von der Sonne auf den äußersten Punkt der Sehne fallen. Dann wird Strahl *ls* nach *q* und ebendorthin auch *mz* gelenkt. Der Punkt *q* ist demnach die hinter dem Spiegel liegende Brennstelle. Und das ist es, was wir zeigen wollten.

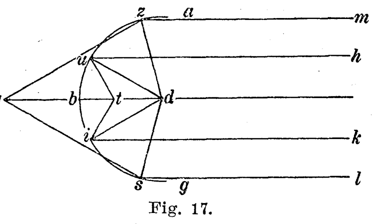


Fig. 17.

14.

Auf dieselbe Weise möge auch die Ablenkung des Strahles eines Kristalles gezeigt werden.[1])

Auch hierzu fehlt die Figur, die aber aus dem Texte leicht konstruiert werden kann.

1) Man vgl. hierzu: Ibn al Haiṭam: „über die Brennkugel" in Wiedemanns Beiträgen z. G. d. Nat. W. XIX. (Erl. Sitz. Ber. 1910); ebenso Erl. Sitz. B. 1904 S. 332; Annalen d. Phys. Bd. 7 (1879) S 679f. u. Bd. 39 (1890) S. 565ff; T. Wüstenschmidt „Monatshefte", Bd. IV (1911), Heft 3—4. — Ferner Roger Baco, op. mai. I 113; II. 471; II 79: „Der Kristall ist ein harter und fester Gegenstand und doch so in seiner Dichte, daß er die Spezies des Lichtes durchläßt." — Witelo, Opt. X, 48; Peckham, Perspect. III. prop. 10, 17.

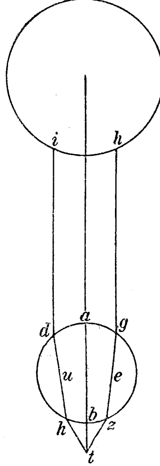


Fig. 18.

Ich will einen Kristall mit *abgdhz* bezeichnen (Fig. 18) und als Durchmesser *ab* ziehen. Da nun ein Kristall ein glatter Körper ist, der bei seiner Dichte Helligkeit und Durchlässigkeit (für die Lichtstrahlen) besitzt, so nimmt er einen Strahl in sich auf, bis ihn der Bogen *hbz* empfängt.

Es tritt also ein Strahl *id* aus, fällt auf die Wölbung des Kristalles, wird von *d* nach *u* gelenkt, geht im Innern bis zu *h* und wird von *h* nach *t* gewendet.

Ebenso fällt der Strahl *hg* auf die Wölbung des Kristalles, wird von *g* nach *e* gelenkt, geht im Innern nach *z* und von *z* nach *t*.

Punkt *t* ist also der Brennort vor dem Kristall. Und das ist es, was wir zeigen wollten.

15.

Wir wollen auch noch zeigen, wie der Blick, wenn er einen kleinen Gegenstand sucht, der auf dem Boden liegt, oft nicht auf ihn fällt und ihn deshalb nicht findet, obwohl ein viel größerer Teil des Bodens erfaßt wird.

In der Einleitung zur Optik des Euklid in der Rezension von Theon[1]) ist darauf aufmerksam gemacht, daß wir oft eine Nadel, die auf den Boden fällt, lange Zeit nicht sehen, wiewohl der Sehkegel einen viel größeren Teil des Bodens erfaßt.

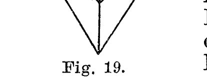
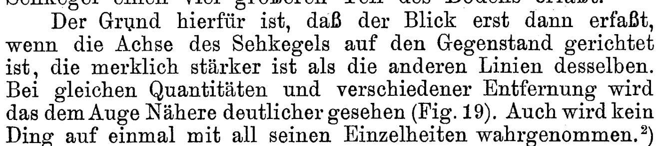


Fig. 19.



Der Grund hierfür ist, daß der Blick erst dann erfaßt, wenn die Achse des Sehkegels auf den Gegenstand gerichtet ist, die merklich stärker ist als die anderen Linien desselben. Bei gleichen Quantitäten und verschiedener Entfernung wird das dem Auge Nähere deutlicher gesehen (Fig. 19). Auch wird kein Ding auf einmal mit all seinen Einzelheiten wahrgenommen.[2])

1) Heiberg, op. omn. p. 147.

2) Euklid, Optik, Kap. 1, Heiberg S. 3. Unser Theorem hat in derselben Weies dargestellt Dam. Heliod. Lariss. in Opt. 1. II. c. 8, S. 13 (Ausg. v. Erasm. Barth. C. Paris 1657). Dasselbe enthält auch mehrere Auszüge aus der Katoptrik des Hero.

SCHLUSS.

Die vorliegende Erklärung der (Pseudo-)Euklidischen Schrift 'de speculis' bestätigt die bisherige Annahme, daß diese Schrift nichts weiter ist als eine Kompilation von Sätzen älterer Autoren, so vor allem aus der Katoptrik des Hero, der Optik des Euklid, der zweifelhaften Katoptrik des Euklid und vermutlich aus der echten Katoptrik Euklids, die wir nicht mehr besitzen. Ob die Sätze 13 und 14 ihren Ursprung in den Arbeiten des Arabers Ibn al Haiṭam über die Hohlspiegel haben oder umgekehrt dem Araber Anregung boten diese Probleme näher darzustellen, können wir nicht entscheiden. Dasselbe gilt von den Sätzen 4, 5, 6, die sich sichtlich an Alkindi 'de aspectibus' anlehnen.

Im Zeitalter der Scholastik war die Schrift bekannt und viel benützt. Vor allen ist es Roger Baco, der sich öfters darauf beruft. In seinem op. mai. (Bridges) II, 491 schreibt er: „Es lehrt nämlich Euklides in der 33. Propos. 'de speculis' einen solchen Spiegel fertigen, der vorne und rückwärts eine Vereinigung der Strahlen ergibt"; und wiederum op. mai. II. 538.

„Es lehrt aber Euklid einen Spiegel fertigen, der vorne und hinten brennt.“ (Näh. darüber in den Erklärungen zu Nr. 13.)

Einen weiteren Satz zitiert Baco im op. mai. II. 493: „Wie Euklid im Buche ‘de speculis’ sagt und in der 7. Proposition beweist, ist die Figur des Lichtes größer als die Öffnung.“ Dies ist aber der 9. Satz unserer (Pseudo-)Eukl. Schrift. Nach der Anordnung im hebr. Kodex (München) dürfte das Zitat besser stimmen.

Endlich beruft sich Baco noch auf den 5. Satz unserer (Pseudo-)Eukl. Schrift im op. mai. II. 484 „. . . und denselben Beweis führt Euklid zum 5. Satze seines Buches.“ Dieser Hinweis (es handelt sich um einfallenden und reflektierten Strahl bei Planspiegeln) stimmt genau mit dem 5. Satze der (Pseudo-)Euklidischen Kompilation.

Halten wir noch Umschau bei anderen Gelehrten der Scholastik, so finden wir unsere Schrift weiterhin bei Albertus Magnus (De Sensu et Sensato (Borgnet) IX. Bd. parv. nat. tr. I. c. 8. S. 17) erwähnt. „Es kann“, schreibt er, „durch Heben und Senken eines Spiegels bewirkt werden, daß der Beobachter den Spiegel sieht, sich selbst aber nicht, wie Euklid in der Prospectiva zeigt.“ Dieser hier angeführte Satz ist der erste unserer Schrift.

Eine weitere Stelle, mit welcher wohl der 6. Satz unserer Schrift gemeint ist, haben wir in Albertus 2. Buche der Meteorologie: „Wie Euklid sagt, zeigt ein (Plan) Spiegel nicht nur das Bild eines Dinges, sondern auch die Distanz vom Spiegel; das Ding wird nämlich in der Tiefe des Spiegels in einer solchen Distanz gesehen, als es vor dem Spiegel absteht. (Ganz dem angeführten Wortlaute nach behandelt diesen Satz Alkindi in seinem Buche de aspectibus.)

Ferner sei Vincenz von Beauvais genannt, der den 7. Satz unserer Euklid. Schrift heranzieht. (Spec. nat. lib. III. c. 77.) „Denn Euklid beweist im Buche ‘de speculis’, daß sich alles Sehen unter einem stumpfwinkligen Dreieck (sub triangulo ampligonio) vollzieht.“ Euklid hat: „triangulus est ampligonius.“ In demselben Kapitel heißt es weiter: „Von Euklid ist der Beweis gefunden worden, daß die Reflexion des Lichtes immer nach gleichen Winkeln oder in sich selbst stattfindet. Nach gleichen Winkeln geschieht sie nämlich, wenn der Strahl schief auf die Spiegelfläche kommt, in sich selbst, wenn er senkrecht einfällt.“ Diesen Satz enthält zwar auch die Katoptr. Eukl. (Nr. 1 u. 2), aber dem Text nach stimmt er mehr mit dem 5. unserer Schrift.

Schließlich finden wir einen großen Teil unserer Sätze in der Optik Witelo’s verwertet, so vor allem Nr. 1, 2, 3, 7, 9, 11a, 14, wie oben näher angegeben ist.

NACHTRAG

VON

AXEL ANTHON BJÖRNBO.

HANDSCHRIFTENBESCHREIBUNG.

A.

(Cod. Ambros. T. 100. sup.)

Pergamenths. in Quarto aus dem eingehenden 14. Jahrh. Besteht aus 1 Vorsatzbl. (A) und 155 Textbl. 1 Hd. (südital. Minuskel). Rot-blaue Initial. Rubrizierung. Rote Überschriften und Figuren (143r — 149r schwarze Figuren teilweise mit jg. Hd.). Randnoten sowohl mit 1. als mit jüngerer Hd. Fol. Ar (mit Hd. des 19. Jahrh.): »Bibliothecae Ambrosianae Emptus Pretio Libr. XXIIII. Kal. Apr. An. MDCCCXXVI.«. Fol. Av (mit Hd. des 14. oder eingeh. 15. Jahrh.): »Iste liber est fratris Gonsalui de sausa. 154 fo[lia].«. Im Anschluss daran handschr. Inhaltsverzeichnis aus dem 15. Jahrh.: »Isti libri continentur in isto volumine: liber Jacob Alquindi in geometrja. — jtem liber euclidis de speculis. — jtem liber tidei filij theodori acugui. — jtem liber apollonij de piramidibus. — jtem liber euclidis de aspectibus. — jtem liber euclidis de speris et radijs speculorum. — jtem libri optichorum tholomei Ve. — jtem liber carastonis super euclidem de ponderibus et mensuris. — jtem liber euclidis quorum corpora uidentur in speculis. Et alia multa sunt in hoc libro, que non intitulantur.«. Die Hs. gehörte also einem Bruder Gonsalvus aus Susa in Norditalien und wurde erst 1826 von der Bibliotheca Ambrosiana in Milano gekauft.

Inhalt.

1. 1r — 18v **Alkindi, Optik.**[1]) „Liber Jacob Alkindi de causis diuersitatum aspectus et dandis demonstrationibus geometricis. Oportet postquam ≻ qui est *bag* et i. e. q. d. u. Explicit liber de aspectu."

2. 19r — 23r **[Pseudo-]Euklid, De speculis.**[2]) „Liber Euclidis de speculis. Preparatio speculi ≻ cum omnibus uidetur, et. i. e. q. d. u."

3. 23r — 27r **Tideus, De speculis.**[3]) „Sermo de eo, quod homo in speculo et in eo, quod non est speculum, et de causis illius, quem collegit ea ex libris antiquorum Tideus filius Theodori a Ruegoui medicus. Scias quod ≻ pinealis oculi."

4. 27r — 28v **Apollonius, Kegelschnittslehre**[4]) (Fragment). „Ista que secuntur sunt in principio libri Apollonij de piramidibus et sunt anxiomata [!] qui premitio [!] in libro illo. Cum continuatur inter punctum ≻ ad diametrum secundum ordinem."

5. 28v — 35r **Ibn al Haitam, Über Brennspiegel.**[5]) (Titel mit jgr. Hd.:) „De speculo vstorio per sectionem parabolae." — (Text:) „De sublimiori quod geometre ≻ ad punctum unum."

---

1) Ausgabe S. 3 — 41.
2) Ausgabe S. 97—106.
3) Ausgabe S. 73 — 82.
4) Apollonii Pergaei quae graece exstant, ed. J. L. Heiberg, II, p. LXXV—LXXX. Andere Hss. D; P; Reg. 1012, 1253, 1261; Par. 8680; Marc. Venet. VIII. 32 (Valentinelli XI. 90); Vesp. A. II (Br. Mus.), 139r—v & 144v—145r. Vgl. AGMW XIV, S. 149 & 152.
5) Ausgabe von Heiberg u. Wiedemann. Bibl. Math. 10_3 (1909/10), S. 218—233.

6. 35r—43v **Euklid, Optik.**[1]) „Liber de aspectibus Euclidis incipit. Radius egreditur ab oculo ≍ ad centrum circuli secundum dispositionem, quam diximus. Et hoc est quod demonstrare volebamus."

7. 43v—54r **Euklid, Katoptrik** (ohne Titel).[2]) „Uisum rectum esse cuius media recte terminos ≍ accendet ignis in stupa sine lino, et hoc uult hec propositio. Explicit de speculis."

54v: Kleines Textfragment.

8. 55r—142v **Ptolemaeus, Optik.**[3]) (Titel mit jgr. Hd.:) „Praefacio in Ptolemaeum" — (Text:) „Cum considerarem optica Tholomei ≍ rursus protrahatur *az*. Reliqua huius sermonis non sunt inuenta."

9. 143r—149r **Tabit ibn Korrah, Liber karastonis.**[4]) (Titel mit jgr. Hd.:) „Thebit Liber de ponderibus, siue de Statera." — (Text:) „Continuet deus conseruationem ≍ et faciet te cognoscere casum erroris. Finitus est liber carastonis editus a Thebit filio Core."

10. 149v—154v **[Pseudo-] Euklid-Jordanus, De ponderibus.**[5]) (Titel mit jgr. Hd.:) „Hic liber circumfertur nomine Jordani, et est liber de ponderibus, quem habemus." — (Text:) „Omnis ponderosi motum esse ad medium ≍ medietas *ag*, quod oportebat ostendere: „Atque hinc manifestum est hic/" (Text vielleicht defekt am Schluß, da zwischen Bl. 154 und 155 ein Blatt ausgeschnitten ist).

155r—v Textfragment ohne Zusammenhang mit dem vorhergehenden Text.

Der Herausgeber hat diese Hs. in den Jahren 1902 und 1905 in Milano verglichen.

B.

(Cod. Basil. F. II. 33.)

Pergamenths. in Folio aus der Mitte des 14. Jahrh. (enthält Werke von den Jahren 1332 und 1343 und hat fol. 196v die Datierung 1349). Besteht aus 1 Vorsatzbl. (A) und 244 Textbl. Zwischen Bl. 9 und 10 sind 6 Bl. ausgerissen. Wenigstens 9 verschiedene Hände des 14. Jahrh. Hie und da rotblaue Initiale. Rubrizierung. Kolorierte Figuren am Rande (Bl. 37v—41r schwarze Figuren). Gepreßte Pergamentbd. mit Figuren und Deckeln mit Spangen. Randnoten mit mehreren Hd. Fol. 95r (Hd. 3): »... per manus fratris Nicolay.« Fol. 196v (Hd. 8): »Deo gracias, quoniam finiui Anno gratie 1349 die tertia martis hora meridiei.«. Fol. 244r (Hd. 9): »Explicit liber Jeber ⟨in ras.⟩ per manus Engelberti Deo gratias«; eine jüngere Hand fügt hinzu: »falsissimi scriptoris quia non est uerbum correctum, nisi fierit [lege: fuerit] malum exemplar.« Fol. 244v (Hd. des 17. Jahrh.:) »Ex instituto et ultima voluntate Dn. Patris P. M. Dn. Jacobi Henricpetri IC. Equ. Aur. Com. Pal. Filii obseq. Jacobus Henricpetri Civ. Bas. Proconsul Mylhus. V. Franciscus Jacobus Henricpetri Civis Basil. Anno 1641. D. D.«. Die Hs. wurde

---

1) Die nie edierte Übersetzung durch Gerhard v. Cremona. S. Euclidis Opera, ed. Heiberg, VII, p. XL. Vgl. M und P.

2) Die direkte Übers. ca. 1160—65 aus Sizilien. Vgl. Euclidis Opera, ed. Heiberg, VII, p. LI—LIII. Cantor-Festschrift, Lpz. 1909, S. 98. Harvard Studies in cl. Philology XXI (1910), S. 85 ff. & 100. Hermes Bd. 46 (1911), S. 209.

3) Ausgabe durch Govi, Torino 1885.

4) Unediert. Vgl. Steinschneider, Lettere a Boncompagni, Roma 1863, S. 8. ZMP 13, S. 49 & 56—61. Vgl. P. Duhem, Origines de la statique I, 99 ff.

5) Kurzer Text mit 13 Sätzen wie in R, T, V und Y. Vgl. AGMW XIV, S. 147. P. Duhem, Origines de la statique I, 98 ff.

also ums Jahr 1349 teils von einem Bruder Nicolaus, teils von einem gewissen Engelbert, teils von anderen geschrieben; sie war im 17. Jahrh. im Besitze der bekannten Basler Familie Henricpetri. — Fol. A^v (altes Inhaltsverzeichnis): »Paruum Almagesti — Solinus de mirabilibus mundi — Iginus de ymaginibus — Ymagines celi depincte — Libellus de refluxu maris — Astronomia Alfagrani — Meseala de natura orbium — Esculeus de ascensione signorum — Arismetica Jordani — Algorismus demonstratus de integris — Algorismus de proportionibus — Algorismus de minutiis — de speculis comburentibus — Thydeus de speculis — de figuris ysoperimetris — Descripcio spere in plano — De crepusculis aurore — Theorica planetarum demonstrata — Liber Castoris de figura sectoris seu thebith — Antilocus de mota spera — liber trium fratrum de geometria — Jacobus alkindy de aspectibus — Euclides de speculis — Tractatus de triangulis — Demonstratio quadrantis — Jordanus de ponderibus — Theodosius de locis habitabilibus — Jordanus de numeris datis — Jordanus de triangulis — Archimedes de curuis superficiebus — Geometria practica — Theodosius de speris — De numeris armonicis — Theoria Campani — Thebith de motu orbis — Optica Ptholomei seu Ptholomeus de aspectibus.« (Hierzu fügt eine Hd. des 17. Jahrh.:) »De motu corp. caelest. incerti auct. — Anno 1343.«

Inhalt.

1. 1^r—23^v (Hd. 1) **Solinus, De situ orbis.** „Julius Solinus, de situ orbis terrarum et de singulis mirabilibus, quae in mundo habentur. Cumque varium clemencia ≻ sui congruere insularum qualitatem."

2. 24^r—37^v (Hd. 2 : 24^r—33^r. Hd. 1 : 33^r—37^v) **Hyginus, De astronomia.** „Yginus de ornatu celi vel de ymaginibus celestibus. Yginus magister Fabio plurimum salutem. Etsi te studio grammatice ≻ sol ab estiuo circulo redeat."

3. 37^v—41^r (Hd. 1) **Sternbilder ohne Text.** „Ymagines huius seculi subiciuntur ymaginibus supercelestibus. Ursa minor ≻ centaurus."

4. 41^v—43^v (Hd. 3 = Bruder Nicolaus). **Über Ebbe und Flut.** „De fluxu et refluxu maris. Uisis effectibus quorum causa latet ≻ incompletam sit a prima causa omnium benedictus. Explicit libellus de fluxu et refluxu maris."

5. 44^r—57^r (Hd. 4) **Al-Fergani, Astronomie.**[1]) „Numerus mensium anni arabum et aliorum omnium est 12 menses ≻ solis et lune, quod sufficit intelligenti in hac arte valenti. Explicit Alfraganus."

6. 57^v—63^v (Hd. 4) **Maschalla, De orbe.**[2]) „Incipiam et dicam, quod orbis ≻ sicut creauit deus omni rei semen, cuius magestas [!] magna est. Non est deus nisi ipse gloriosus sapiens. Finit liber motus orbis et naturae eius e dictione Mesehala. Deo gracias."

7. 64^{r-v} (Hd. 3 = Bruder Nicolaus) **Hypsicles, Anaphorikos.**[3]) „Si fuerint quotlibet ≻ signorum sunt note secundum."

8. 65^r—86^v (Hd. 5) **Jordanus, Arithmetik.**[4]) „Incipit primus liber. Unitas est esse rei per se ≻ tres medios assignare sit possibile."

9. 87^r—95^r (Hd. 3 = Bruder Nicolaus) **Gernardus (?), Algorismus. II.**[5]) „Incipit Algorismus de minuciis demonstr. Deinceps ad minucias proce-

1) Die lange Übersetzung durch Gerhard v. Cremona. Eine jüngere Übersetzung ediert 1618 in Frankfurt von Jac. Christmann. S. Steinschneider, Eur. Übers., S. 22.
2) Ausgaben Nürnberg 1504 und 1549.
3) Ausgabe von C. Manitius, Osterpr. des Gymnasiums z. heil. Kreuz, Dresden 1888.
4) Ausgaben durch Johs. Faber Stapulensis, Paris 1496 und 1514.
5) Gedruckt im Algorithmus demonstratus, ed. Johs. Schonerus, Norimbergae 1534, Fol. D^v_{iiii}, l. 19—H^v_{ii}, l. 21. — Vgl. B. M. 6_3, S. 9 ff.; 7_3, S. 254, 260, 401; 8_3, S. 215. Vgl. unten Nr. 11.

dat negotium ⋋ et ideo colligenda putaui, et est finis amen. Explicit Algorismus de minucijs scriptus per manus fratris Nicolay."

10. 95^{v}—98^{v} (Hd. 3 = Bruder Nicolaus) **Nicole Oresme, Algorismus proportionum.**[1]) „Incipit Algorismus de proportionibus. Una media debet sic scribi $^1/_2$ et una tertia sic $^1/_3$ ⋋ secundum istam considerationem, et patet in figura. Explicit."

11. 99^{r}—105^{r} (Hd. 5) **Gernardus (?), Algorismus I.**[2]) „Digitus est omnis numerus minor decem ⋋ dicitur de radice quadrati, quod hic de radice cubi. Explicit Algorismus demonstratus."

12. 105^{r}—106^{v} (Hd. 5) **Ibn al Haitam, Über Brennspiegel.**[3]) „De sublimiori qnod geometre adinuenerunt ⋋ ex tota superficie earum ad punctum unum. Explicit de speculis comburentibus vel de sectione mukefi." Über der Seite: „Thides, De speculis comburentibus vel de sectione mukefi."

13. 107^{r}—108^{r} (Hd. 5) **Anonymus, Isoperimetrie.**[4]) „Prelibandum uero primum ⋋ quare et solidum poliedrum minus spera. Explicit de figuris vel corporibus ysoperimetricis."

14. 108^{r}—109^{v} (Hd. 5) **Jordanus Nemorarius, Planisphaerium.**[5]) „Speram in plano describere ⋋ et hoc est intentio auctoris de noue [!] appositum. Explicit descriptio spere in plano."

15. 109^{v}—110^{v} (Hd. 5) **Tideus, De speculis.**[6]) „Scias, quod illud, quod videt ⋋ pinea procedens ab oculo. Explicit Thydeus de speculis."

16. 110^{v}—112^{r} (Hd. 5) **Ibn al Haitam, De crepusculis.**[7]) (Titel mit jgr. Hd.:) „De crepusculis vel de elevatione nubium." — (Text:) „Ostendere, quid sit crepusculum ⋋ comprehendunt insensibilia cum insensibilibus."

17. 112^{v}—114^{v} (Hd. 5) **Tabit ibn Korrah, Liber karastonis.**[8]) (Titel mit jgr. Hd.:) „Liber Crastoris. Del [?] Thebit filius chore. Incipit de figuris sectoribus [!]." — (Text:) „Continuet deus conseruationem tuam ⋋ faciet te cognoscere causam erroris. Explicit."

18. 114^{v}—116^{v} (Hd. 5) **Autolycus, De motu sphaerae.**[9]) „Antolocus [!] de mota spera. Punctum equali motu dicitur moueri ⋋ centrum eorum est centrum spere. Et illud est quod demonstrare voluimus. Explicit liber."

---

1) Hrsg. durch Curtze von dem Copernikus-Verein zu Thorn den 8. März 1868.

2) Gedruckt im Algorithmus demonstratus, ed. Johs. Schonerus, Norimbergae 1534, Fol. A^{r}_{iiii}—D^{v}_{iiii}, l. 17. — Vgl. oben Nr. 9.

3) Vgl. oben A, 5.

4) Vgl. Cantor-Festschrift, Leipzig 1909, S. 101. Direkte Übersetzung (unediert) des von Hultsch (Pappi Collectiones, p. 1138—64) edierten griechischen Werkes.

5) Jordanus' Planisphaerium mit Johs. Campanus' Kommentar. Der reine Text: „Spera in quolibet ⋋ puncti quod proponebatur." Herausg. von Jac. Ziegler, in der Sammlung „Sphaerae atque astrorum coelestium ratio", Valderus (Basel?) 1536. 2. Ausg. Venezia 1558. Vgl. AGMW XIV, S. 149, 151—54.

6) Ausgabe S. 73—82.

7) Hrsg. Lisbona 1541 u. Coimbra 1573 mit Petrus Nonius Salaciensis de crepusculis und Basel 1572 mit Alhazeni Opticae thesaurus. Vgl. Bull. Boncomp. IV, 1 ff. Boncompagni, Gherardo Cremonese, Roma 1851, S. 24 ff.

8) Vgl. oben A, 9.

9) Die unedierte Übers. durch Gerhard v. Cremona. Vgl. B. M. 3_3, S. 67; 4_3, S. 240. Defekt findet sich der Text auch im Cod. Laurent. 29. 27, fol. 17—19.

19. 116^{v}—122^{r} (Hd. 5) **Muhammed, Hamed & Hasan ibn Musa ibn Schakir, Liber trium fratrum.**[1]) „Uerba filiorum Moysi filii Schier, id est Maumeti, Hameti et Hasen. Propterea quia vidimus >< demonstratio super opinionem eius. Co[m]pletus est liber trium fratrum auxilio dei.“

20. 122^{v}—127^{r} (Hd. 5) **Akindi, Optik.**[2]) „Jacobus Alkindi de aspectibus. Oportet postquam optamus >< maior angulo maiore, qui est *bag* [corr. ex *a*∗∗], et illud est propositum. Explicit Jacobus Alkindi de aspectibus.“

21. 127^{v}—128^{v} (Hd. 5) **[Pseudo-] Euklid, De speculis.**[3]) „Euclydis de speculis. Preparatio speculi >< omnibus videtur. Et illud est, quod demonstrare volumus.“

22. 129^{r}—130^{r} (Hd. 5) **De tribus notis.**[4]) „Cuiuscunque trianguli rectilinei quelibet tria ingnota per quecunque tria nota reperire. In quolibet siquidem triangulo >< debet argumentari de uoto et postea de ignoto. Explicit libellus de triangulis.“

23. 130^{v}—131^{v} (Hd. 5) **Demonstrationes quadrantis.**[5]) „Demonstrationes quadrantis. Qvoniam tota doctrina data in quadrante de mensurationibus >< eorum proportionalis et argumentatur sicut prius. Et illud patet in figura. Explicit.“

24. 132^{r}—137^{r} (Hd. 5) **[Pseudo-] Euklid-Jordanus, De ponderibus.**[6]) „De ponderibus Jordanus de Nemore et Euclydis. Omnis ponderosi motum esse ad medium >< (fol. 134^{r}:) omnes partes equales equaliter pendantur ut assumitur in proportione huius conclusionis. Explicit liber primus Euclidis de ponderibus. — Si fuerit canonum symetrum magnitudine >< plus inpetit toto, quia conatur impulsum habebit trahere *b*. Explicit liber Jordani de ponderibus.“

25. 137^{r} (18 Zeilen) (Hd. 5) **Fredericus, Quadratura circuli.**[7]) Quadratura circuli nichil est nisi inuentio embadi quadrati equalis >< relinquitur 4^{torum} proportio dupla, quod declarare volumus. Hec est quadratura circuli secundum Fred[e]ricum ex geometricis extracta principiis.“

26. 137^{v}—138^{r} (Hd. 6) **Theodosius, De habitationibus.**[8]) „Theodosius de locis habitabilibus. In illis quorum habitationis loca >< signo sub oriente posito *na* dimidie signo et *nf* dato dimidio *qx*, quo sol preterit signorum dies erit.‘

1) Hrsg. von Curtze in Nova acta der Ksl. Leop.-Carol. Deutschen Akad. de Naturforscher XLIX, 2. Halle 1885, nach B; P ist aber besser (vgl. B. M. 3_3, S. 63 ff.). Von bisher unbekannten Hss. ist hinzuzufügen Cod. S. Annunc. (conv. soppr. A. I. 1475), fol. 70^{v}—79^{r} (XIV. saec.) in der Bibl. Naz. in Firenze.

2) Ausgabe S. 3—41.

3) Ausgabe S. 97—106.

4) Hrsg. von Curtze nach B in B. M. I_3, S. 380—90.

5) Sonst unbekannte Beschreibung der Anwendung des Quadranten in der praktischen Geometrie.

6) Der lange Text mit 47 Sätzen (vgl. AGMW XIV, S. 147, Note 1, Nr. 3). Derselbe Text in den Codd. Vat. 3102, 29^{r}—35^{r} (XV. saec.); Harl. (Brit. Mus.) 13, 133^{v}—140^{r} (XIV. saec.); Bodl. Auct. F. 5. 28, 167^{v}—175^{r} (XIII. saec.); Cant. Mm. 3. 11, 140^{r}—145^{a} (XIV—XV. saec.). Vgl. oben A, 10.

7) Sonst unbekannte Kreisquadratur.

8) Die unedierte Übersetzung durch Gerhard v. Cremona, diejenige der zwei bekannten Rezensionen, die auch in den Codd. Ampl. F. 37 und Bodl. Auct. F. 5. 28 (93^{r}—95^{r}) (XIII. saec.) vorliegt. Die unverkürzte Rezension in P, 5.

27. 138ᵛ — 145ᵛ (Hd. 6) **Jordanus Nemorarius, De numeris datis.**[1]) „Numerus datus est, cuius quantitas nota est ≻ quadratum quadrati eius etiam ***."

28. 146ʳ — 150ᵛ (Hd. 3 = Bruder Nicolaus) **Jordanus Nemorarius, De triangulis 1—4.**[2]) „Jordanus de triangulis. Continuitas est indiscretio termini ≻ *th* multiplicata per proportionem *et* ad *bh*."

29. 151ʳ — 153ᵛ (Hd. 3 = Bruder Nicolaus) **Archimedes, De sphaera et cylindro**[3]) (Fragment). „Archymenidis de curuis superficiebus. Cuiuslibet rotunde pyramidis ≻ quantus cubus ad speram tantus numerus 21 ad numerum 11."

30. 154ʳ — 159ᵛ (Hd. 3 = Bruder Nicolaus) **Domenico da Chiavasso, Practica Geometriae.**[4]) „Quantitatem aliquam mensurare est inuenire ≻ quantum de vino est in dolio. Explicit."

31. 160ʳ — 170ᵛ (Hd. 3 = Bruder Nicolaus) **Theodosius, Sphärik.**[5]) „Theodosius de speris. Spera est figura solida vna tantum superficie ≻ sicut processimus in demonstratione antepraemissae per quartam. Explicit."

32. 171ʳ — 172ʳ (Hd. 3 = Bruder Nicolaus) **Levi ben Gerson, De numeris harmonicis.**[6]) „Leo ebreus de numeris armonicis. In Christi incarnationis anno 1343 nostro opere mathematico iam completo fui requisitus a quodam eximio magistrorum in scientia musicali, scilicet a magistro Philippo de Viterato de regno Francia, ut demonstrarem vnum suppositionem in praedicta scientia, scilicet: Omnium numerorum armonicorum quilibet 2 numero distinguntur praeter istos ≻ a praedictis numero distinguitur quod est principale probandum. Explicit in nomine Christi."

172ᵛ ist leer.

33. 173ʳ — 193ʳ (Hd. 7) **Giovanni Campano, Theorica planetarum.**[7]) „Theorica Campani planetarum. Primus philosophie magister primum ≻ de mercurio supra docuimus."

34. 193ᵛ — 194ʳ (Hd. 7) **Tabit ibn Korrah, De motu octavae sphaerae.**[8]) „Thebit de motu octaue spere. Imaginabor speram equatoris ≻ cum equatore diei sᵈ 2 arcuum *y* et *l*, et illud est, quod voluimus declarare."

---

1) Hrsg. von P. Treutlein in den AGMW II, S. 127—166 nach B. Viele Hss., darunter D, Par. 8680 A (13ʳ — 23ʳ) und Bodl. Auct. F. 5. 28 (115ᵛ — 128ʳ) die ältesten.

2) Hrsg. von Curtze nach D in den Mitteilungen des Coppernicus-Vereins zu Thorn, Heft 6, Thorn 1887.

3) Die 11 Sätze abgedruckt in Archimedes, Opera omnia, III, p. LXXXVII, ed. Heiberg. Andere Hss. Borbon. VIII. C 22 (XIII. saec.); Bodl. Auct. F. 5. 28 (XIII. saec.); Digb. 174 (XII—XIII. saec.); Cantab. Mm. 3. 11 (XIV—XV. saec.); Harl. (Brit. Mus.) 625 (XIV. saec.); auch in D.

4) Unediert. Zahlreiche Hss. Ausgabe nach Curtzes Collation vorbereitet.

5) Die lange Übersetzung mit bzw. 32, 31 u. 10 Sätzen, die wir auch in den Codd. Palat. 1351 (XIV. saec.), Reg. 1261 (XIV saec.), Marc. Venet. VIII. 32 (Valent. XI. 90) (XIV. saec.) und Par. 14735 (XV. saec.) antreffen. Vgl. AGMW XIV, S. 145, 148, 151—53. B. M. 4_3, 244.

6) Derselbe Text im Cod. Par. 7378 A, fol. 55ᵛ—57ʳ (XIV. saec.). Vgl. Bibl. Math. 11_2 (1897), S. 104.

7) Unseres Wissens nicht gedruckt; vgl. Tiraboschi, Storia della letteratura italiane, Roma 1783, IV, S. 152.

8) Gerhard v. Cremonas Übersetzung. Nach Steinschneider gedruckt 1480, 1509 und 1518. In zahlreichen Hss. Vgl. Hebr. Übers. 588—89. Eur. Übers. I, 26—27.

35. 194ᵛ—196ᵛ (Hd. 8, geschrieben 1349) **Petrus de Guclina (?) Theorica motus longitudinum 7 planetarum.**[1]) „Phisica singulari excellentissimo doctori magistro Johanni de Ganduno Petrus de Gutlina mathematicorum et veracibus discipulis cum studio incendere quia ea que de motibus planetarum in theorica narratione quidem habent ex geometricis demonstrationibus, idciro conclusiones aliquas, quas Gerardus in sua theorica narrando proponit, iuxta imbecilitatem mei ingenii laboraui per modum theoreumatum demonstrare, in quibus minus bene dicta vestri ingenii claritas ac intellectus solertia corrigat, resecanda resecat, suppleat et supplenda. Solem in suo ecentrico equaliter motum in orbe ⋊ quem centrum describit suo motu contingentium, quod fuit propositum demonstrare. Hec ergo de theorica motus longitudinum 7 planetarum ad praesens propter diuersas et in opposita agibilium occupationes demonstrata sufficiant, et vos, amantissime magister, qui astrorum et omnis philosophie contemplationi vacare proponitis et potestis insufficientiam, supportetis, quotiens videritis hoc opusculum, in meam commemorationem 1342." — „Deo gracias, quoniam finiui anno gratie 1349 die tertia martis hora meridiei."

36. 197ʳ—220ʳ (Hd. 4) **Ptolemaeus, Optik.**[2]) „Perspectiua Ptholomei siue optica. Cum considerarem ⋊ Rursus protrahantur perpendicularis *az*."
220ᵛ leer.

37. 221ʳ—244ʳ (Hd. 9 = Engelbert) **Almagestum minor I—VI.**[3]) „Omnium recte phylosophancium ⋊ solis et lunationes quidem tenebrarum sic se habent et cetera. Explicit liber Jeber [in ras.] per manus Engelberti. Deo gratias" (vgl. oben).

Der Herausgeber hat die Hs. 1901 in München, 1902 in Basel und 1910 in Köbenhavn verglichen.

C

(Cod. Coll. Corp. Chr. Oxon. 254.)

Siehe Catalogus codicum mss. qui in collegiis aulisque Oxoniensibus hodie adservantur. Confecit Henr. O. Coxe, Pars II, Oxonii 1852, S. 105. Aus Coxes Beschreibung geht hervor, daß die von ihm angegebenen Nrn. 9 und 10 zusammen den Alkindi-Text bilden, Nr. 9 den anfangslosen Hauptteil geschrieben von einer Hd. des 14. Jahrh.'s (C), Nr. 10 den von einer Hd. des 16. Jahrh.'s (C′) hinzugefügten Anfang. Nr. 9 ist ein älteres Frag-

1) Dieser Text findet sich auch im Cod. Torun. R. 4⁰. 2. Nach dieser Thorner-Hs. hat Curtze dessen Einleitung und Sätze herausgegeben. Vgl. Zeitschr f. Math. u. Ph. XIII, Suppl. S. 79—80.

2) Vgl. oben A, 8.

3) Dies unedierte Werk ist kaum, wie früher angenommen, von Geber (vgl. Curtzes Ausgabe von liber trium fratrum (oben Nr. 19) u. AGMW XIV, S. 146—47). Vielleicht ist es eine von Robertus Retinensis übersetzte, verkürzte Astronomie des Al-Bâttani (vgl. Weissenborn, Gerbert, S. 113), vielleicht ein Kompendium eines Westeuropäers (Cod. monac. 56 vom Jahre 1436 hat den Titel „Almagesti abbreviatum per mag. Thomam de Aquino." Cod. Prag. V. A. 11 (14 Jahrh.) hat „Paruum Almagesti Ptholomei demonstratum per Campanum de primis 6 libris"). Die arabischen Lehnwörter deuten darauf, daß ursprünglich eine Übersetzung aus dem Arabischen vorliegt.

ment, welches im 16. Jahrh. suppliert und ganz willkürlich einer anderen Hs. dieses Jahrhunderts angehängt worden ist.

Der Herausgeber hat diese Hs. im Jahre 1904 in Oxford verglichen.

D

(Cod. Dresd. Db. 86.)

Siehe M. Curtze, Über eine Handschrift der Königl. öffentlichen Bibliothek zu Dresden. Zeitschrift für Mathematik und Physik XXVIII, Dresden 1883, S. 3—15. Zu Curtzes Beschreibung ist folgendes hinzuzufügen.

2. Die Euklidübersetzung beginnt „Punctus est, cui pars non est . . .“ und schließt „. . . equalium laterum figuraliter componere.“

3. „Geometria Jordani“; vgl. oben B, 28.

4. „Arithmetica Jordani“: „Unitas est esse ⋈ tres medios assignare sit possibile“; vgl. oben B, 8.

5. „Euclides de visu“: „Ponatur ab oculo rectas lineas ⋈ quemadmodum in circularibus.“ Diese direkte Übers. aus dem Griechischen, nicht identisch mit der obigen (A, 6), hat Heiberg herausgegeben (Euclidis opera VII, p. 3—121; vgl. proleg. XXXII ff.). Vgl. Cantor-Festschrift, Leipzig 1909, S. 98. Haskins & Lockwood, Sicilian translators (Harv. Studies in class. philol. XXI), S. 85, 90 & 100. Hermes Bd. 46 (1911), S. 209.

6. „Euclidis de speculis“: „Rectum visum esse ⋈ posita stuppa accendetur.“ Vgl. oben A, 7.

7. „Theodosii de speris“: „Spera est figura corporea ⋈ *tk* maior arcu simili arcui *ze*. E. i. e. q. demonstrare voluimus.“ Die kurze Übersetzung von Theodosios' Sphärik (durch Gerhard v. Cremona) mit 22 + 22 + 14 Sätzen. Dieselbe in P. und Cod. S. Marc. Venet. 332 (Valent. XI. 6), S. Marco Florent 206 (conv. soppr. J. I. 32), und Bodl. Auct. F. 5. 28, alle aus dem 13., und Par. 7399 aus dem 14. Jahrh. Die andere Übersetzung (vgl. oben B, 31) ist wahrscheinlich durch Plato Tiburtinus.

9. „Quodlibet intellectum ⋈ [Einmaleins]“ ist der 2. Teil von Jordanus Nemorarius' Algorismus. Vgl. Bibl. Math. 7_3, S. 24 — 37; 8_3, S. 135 — 153.

11. „Figure numerorum ⋈ in se semel, quod erat propositum“ ist der 1. Teil desselben Werkes.

12. Diese Übersetzung von Archimedes' Kreismessung hat Heiberg in Z. f. M. u. Ph. 35, S. 464 ff. nach D herausgegeben.

13. „Campani de figura sectore“ ist gedruckt in Sphera mundi, Venetiis 1518, Sphera cum commentis, ib. eod. anno, und in Steinschneider, Lettera tertia a Boncompagni, Roma 1864, S. 36—37. Vgl. B. Boncompagni, Platone Tiburtino, S. 9 ff.

15. De arcubus similibus. Später hrsg. von Curtze in den Mitteilungen des Coppernicus-Vereins VI, p. 48—50 (nach D). Derselbe Text im Cod. Bodl. Auct. F. 5. 28, 144ᵛ—145ʳ (13. Jahrh.) und mit abweichendem Schluß im Cod. Digbean. 174, 133ʳ—ᵛ (12—13. Jahrh.). Curtze vermutet, daß Jordanus Nemorarius der Verfasser sei.

16. Isoperimetrie. Vgl. oben B, 13.

17. [Pseudo-]Euklid — Jordanus, De ponderibus II. Vgl. unten R, 3.

18. Der Beweis „Diameter est assimeter coste“ schließt „. . . ergo ex XV VIII binarius est quadratus.“

20. Die Aufgabe „Si fuerit aliquod corpus de duobus mixtum“ schließt „. . . proportionalibus longitudines erunt similiter.“

26. Euklids Data. Die direkte Übersetzung aus dem Griechischen. Unediert. Vgl. Cantor-Festschrift, Leipzig 1909, S. 98. Haskins a. Lockwood, The Sicilian translators, S. 99. Hermes Bd. 46 (1911), S. 209.

27. „Quadratura circuli.“ Dieses Fragment über Halbmondquadraturen findet sich auch in den Codd. Mus. Br. Reg. 12. E. XXV, 155ᵛ (14. Jahrh.), Bodl. Auct. F. 5. 28, 157ʳ (13. Jahrh.) u. S. Marc. Flor. 214 (conv. soppr. J. IV. 24), 33ʳ (13. bis 14. Jahrh.)



28. Die drei Sätze über Kreise schließen: „. . . *ab* arcum; ergo ex 2ª parte VIIIᵉ *ac* arcus est minor *ab*."

35. „Liber Jordani de ponderibus": „Omnis ponderosi motum esse ⤫ habebit trahere *b*." Vgl. oben B, 24.

37. sog. Archimedes, libellus de ponderibus: „Quoniam propter irregularitatem [nicht „per raritatem", wie Curtze ließt] quorundam corporum ⤫ ipsius *a*, que est *s*, patet propositum par premissum." Vielleicht übersetzt von Wilhelm v. Mörbecke. Gedruckt in „Sphera mundi", Venetiis 1518 und „Sphera cum commentis", Venetiis 1518. Wird nach Wilhelm v. Mörbeckes Originalhs. neu hrsg. von Heiberg in dessen neuer Archimedes-Ausgabe. Vgl. Cantor-Festschrift, Leipzig 1909, S. 101.

38. [Pseudo-] Euklid, De speculis. „Preparatio speculi ⤫ in longitudine cordae quintae". S. Ausgabe oben S. 97—99,21.

39. Ibn al Haitam, Über Brennspiegel (nicht wie Curtze meint: Tideus, de speculis). Vgl. oben A, 5 u. B, 12.

Der Herausgeber hat die Hs. in Köbenhavn 1903 und Dresden 1904 verglichen.

E.

(Cod. Cantabr. Ii. I. 13.)

Siehe A catalogue of the manuscripts preserved in the library of the University of Cambridge. Vol. III, Cambr. 1858, S. 321—27. Zu dieser Beschreibung ist folgendes hinzuzufügen:

Die Handschrift dürfte nicht im 14., sondern gegen Schluß des 13. Jahrh. geschrieben sein; denn die Datierung fol. 117ᵛ „perfectum die Veneris 2. mensis Augusti Anno Dni. MCC 79" gilt, wie es scheint, für die Abschrift, da das betreffende Werk (Ptolemaeus' Centiloquium) schon im Jahre 1136 übersetzt wurde, und zwar von Johs. Hispalensis; vgl. Wüstenfeld, Die Übersetzungen arabischer Werke in das Lateinische, S. 28.

2. Alexander de Villa Dei, Algorismus schließt nicht fol. 11ᵛ, sondern 9ʳ. Der Kommentar steht fol. 9ᵛ — 11ʳ und schließt „. . . et exibit in numero denoᵗᵉ quotiens figure mu⁰ mlā ."

10b. Fol. 37ʳ Tabula lunae magistri Petri de Dacia.

11. Fol. 38ʳ — 39ᵛ ist eine (verkürzte?) Redaktion von Robertus Anglicus' Tractatus quadrantis. Hrsg. von P. Tannery in Notices et extraits 35 (1897), S. 593—632.

12. 40ʳ —41ʳ **[Pseudo-] Euklid, De speculis.** „Preparatio speculi ⤫ etiam aliquid uisibilium simul cum videtur. Et illud est, quod demonstrare uoluimus" d. h. der S. 97—106 herausgegebene Text, komplett. Katalog also unkorrekt. Im alten Inhaltsverzeichnis steht „Compositio speculorum mirabilium".

13. 41ᵛ— 48ʳ schließt „Explicit de multiplicatione specierum in visu secundum omnem modum probatus per magistrum Walterum de Euesham."

14—15. Zwischen den beiden Texten hat die 1. Hd. hinzugefügt: „Compilatus per magistrum Walterum de Euesham."

18. „Incipit liber Gaphar de temporis mutatione, qui dicitur Geazar (nicht „Gtazar") Babiloniensis" ist Abu Maaschar's liber imbrium, dessen Textanfang „Universa astronomiae iudicia prout indorum . . ." ist. Textausgabe Paris 1540 mit Alkindi, De temporum mutationibus. Nach Steinschneider (Europäische Übers. 36—37) auch eine Ausgabe vom Jahre 1507. Vgl. Wüstenfeld, Lat. Übers. S. 22.

19. Dieser Text ist die Trigonometrie des Richard of Wallingford, Abt von St. Alban, bisher unpubliziert. Findet sich auch in den Codd. Digbean. 168, 178 u. 190. Vgl. Braunmühl, Geschichte der Trigonometrie I, S. 108.

20. Ibn al Haitam, De crepusculis. Vgl. oben B, 16.

22. Der erste Teil desselben Werkes im Cod. Laud. Misc. 644, 213r—216v (13. Jahrh.) in Oxford.

23. Herausgegeben in Reisch's Margarita philosophica. Basel 1503 und Straßburg 1515.

25. Al-Fergani, Astronomie. Vgl. oben B, 5.

26. Inwiefern diese Redaktion ganz oder nur teilweise mit der 1493 zu Venezia gedruckten identisch ist, bleibt noch unsicher. Ob Plato Tiburtinus oder Johannes Hispalensis oder beide das Werk übersetzt haben, ist noch nicht ermittelt. Vgl. Wüstenfeld, l. c. S 27 und Steinschneider, Europäische Übers., S. 41, 43 u. 65.

32. Das Tafelwerk 157r—177r wird im alten Inhaltsverzeichnis als „Almanak Euesham" bezeichnet.

34. In dieser Form sonst unbekannt.

38. Die Verse hier scheinen nirgends mit Halliwells Ausgabe von Alexander de Villa Dei übereinzustimmen. Die Angabe des Kataloges ist also möglicherweise unrichtig.

Der Herausgeber hat diese Hs. im Jahre 1904 in Cambridge verglichen.

K

(Cod. Cracov. 569.)

Pergamenths. in Folio aus dem eingehenden 14. Jahrhundert. Besteht aus 201 paginierten Textblättern und am Schluß 3 unpaginierten leeren Bl. 1 Hd. (kleine Minuskelschrift). Figuren rothe mit grünen Figurenbuchstaben oder umgekehrt. Hier und da rote oder grüne Initialen. Zwischen pag. 246 u. 247 fehlen vielleicht ein oder mehrere Blätter. Die Pergamentbl. des Operculums tragen Fragmente eines französischen Textes. Pag. 2 (mit Mathias de Michows Hd.) Inhaltsverzeichnis mit Hinzufügung jgr. Hd.: „Hec scriptura est Doctoris Mathie de Miechow. — Datus pro Libraria Vniversitatis studij Cracoviensis per Venerabilem Dominum Doctorem Mathiam de Miechow Canonicum Cracoviensem." Daneben schreibt Johs. Broscius „Hec scriptura est Nicolai de Wichyha Doctoris Medicinae. Ego Joannes Broscius Curzeloviensis acceperam istum librum a Clarissimo Domino Valentino Fontano anno 1614. Vide Privilegium Astrologi ordinarij, in quo auxit causam ipsius pie memorie Dominus Mathias Miechowita, ubi mentionem fecit huius et aliorum librorum. Deus illi retribuat in aeterna beatitudine." Es scheint, da der Einband mit den französischen Schutzblättern aus der Wende des 15. u. 16. Jahrh. stammt, daß die Hs. im Anfang des 16. Jahrh. aus Frankreich nach Polen gekommen ist und von Prof. Mathias de Michow († 1523) erworben wurde, um bald darauf von Valentin Fontana im Jahre 1614 an den Universitätsbibliothekar Johs. Broscius als Geschenk an die Bibliothek überreicht zu werden. Neben dem Inhaltsverzeichnis des Math. de Miechow schreibt eine 5. Hd. „hi libri continentur hic" und daneben schreibt der Arzt Nicol. de Wichyha: „Haec addidit Nicolaus de Schadech." Vielleicht besaßen diese beiden Männer die Hs. nach Math. v. Miechow, aber vor Valent. Fontana. Vgl. Anaritii in decem libros priores elementorum Euclidis commentarii ed. M. Curtze, Lips. 1899, proleg. X—XII.

Inhalt.

1. p. 7—80 **Al-Narizi, Euklidkommentar.**[1]) „Incipit expositio Anaritii x priorum librorum geometrie. Dixit Euclides. Punctum est, quod partem >< usque in infinitum. Explicit Anaritius super x primos libros Euclidis."

1) Hrsg. von Curtze nach K: Euclidis Opera omnia. Supplementum. Lips. 1899. Auch im Cod. Reg. 1268. Vgl. AGMW 14, S. 141.

2. p. 80—99 **Euklid, Elemente XI—XV.**[1]) „Incipit XI^{us} liber Euclidis. Corpus est quod longitudinem et latitudinem et altitudinem habet >< [XV, Satz 12:] Fabricato quouis regularium corporum sibi speram inscribere. A centro spere . . . super unam perpendicularium semicirculum circumduxeris, factum erit. Explicit 15 Euclidis."

3. p. 99—102 **Ibn al Haitam, De crepusculis.**[2]) „Incipit liber de crepusculis matutino et uespertino, quem fecit Abhomadhi, translatus a magistro Cremonensi Toleti de arabico in latinum. Ostendere quid sit crepusculum et quae causa >< perueniunt vapores ascendentes ex terra, et illud est, quod volumus."

4. p. 103—132 **Theodosius, Sphärik I—III.**[3]) „Theodosii de speris liber primus. Spera est figura solida vna tantum superficie connexa, scilicet contenta >< ad lineam *oc* est maior proportione anguli *coh* ad angulum *cqh*. Explicit Theodosius de speris"

5. p. 132—235 **Dshabir ibn Aflah, Astronomie.**[4]) „Incipit liber Jeber. Scientia species habet, quarum melior >< sunt digniores, vt euanescant et destruantur. Completa est declaratio eius. Explicit liber Jeber, quo corrigitur Almagestis Ptholomei."

6. p. 235—245 **Maschalla, De orbe.**[5]) „Incipit liber Messahalac de causis orbis et motus eius. Incipiam et dicam, quod orbis est >< non est deus nisi ipse gloriosus sapiens. Finit liber motus orbis et nature eius editne Messehaia."

7. p. 245—246 **Bruder Egidius' Beweis.**[6]) Überschrift mit Nicol. de Schadech's Hd.: „Alacen de aspectibus." — Text mit 1. Hd.: „Improbatio cuiusdam cause, que solet assignari, quare radius solis transiens per foramen quadrangulare facit figuram rotundam in pariete, quam improbationem facit frater Egidius de Baisíu. Quarum causa, quare lux >< triangularis et extremus in circumferentiam vnius ** trium./"

Ein Blatt oder mehrere Blätter fehlen hier.

8. p. 247—250 **Ibn al Haitam, Optik (Fragment).**[7]) /„comprehendet illam rem visam >< quarum causa est reflexio. Nunc autem terminemus hunc tractatum, qui est finis libri. Explicit VII liber Alhaceni de aspectibus."

9. p. 250—261 **Alkindi, Optik.**[8]) „Incipit liber Jacobi Alkit de causis diuersitatis aspectuum. Oportet postquam optamus >< qui est *bag*. Et illud est quod demonstrare voluimus. Explicit liber de aspectibus."

---

1) Fragment von Athelhart von Bath's Euklidübersetzung ohne Campanus' Kommentar. 2) Vgl. oben B, 16.

3) Diese und vielleicht nur diese Hs. stimmt genau mit dem gedruckten Text in Sphera mundi und Sphera cum commentis (Venetiis 1518). Diese Rezension hat 32, 31 und 15 Sätze. Buch III ist eine Mischung der beiden Übersetzungen; vgl. oben B, 31 und D, 7.

4) Gerhard v. Cremonas Übersetzung, hrsg. mit Peter Apians Instrumentum primi mobilis, Nürnberg 1534.

5) Gerhard v. Cremonas Übersetzung. Hrsg. in Nürnberg 1504 und 1549.

6) Sonst unbekannt.

7) Noch unsicher, ob das Werk 1269 von Witelo übersetzt ist. Hrsg. von Fr. Risner, Basel 1572. Vgl. Steinschneider, Eur. Übers. 82.

8) Ausgabe S. 3—41.

10. p. 261—262 **Tideus, De speculis.**[1]) „Incipit liber Tidei de ymagine speculi. Scias equidem, quod illud, quod videt homo ⋊ strictura pinealis oculi, id est piramidis, que est vt pinea procedens ab oculo. Explicit liber de ymagine speculi."

11. p. 263—298 **Ptolemaeus, Optik.**[2]) Überschrift mit Nicol. de Schadech's Hd.: „Obticorum Ptolomei" und mit Johs. Broscius' Hd.: „Optica seu perspectiua Ptolemaei." — Text: „Cum considerarem ⋊ perpendicularis *az*."

12. p. 299—402 **Euklid, Elemente I—XI, 30**[3]) in Joh. Campanus' Redaktion. „Punctus est, cuius pars non est ⋊ super vnam basim, que sit *ad* sed non super lineam vnam. Sintque/." Rest fehlt.

Der Herausgeber hat diese Hs. im Jahre 1910 in Köbenhavn verglichen.

L

(Cod. Vatic. Palat. lat. 1377.)

Gemischte Papier- und Pergamenths. in 6 Heften vom 12. oder 13. bis zum 15. Jahrh. Im ganzen von 194 Blättern und mehreren Händen. Der Inhalt ist zum Teil musikalisch oder philosophisch. Hier werden jedoch nur die physischen, mathematischen oder astronomischen Werke aufgezeichnet.

Inhalt.

Heft 1. Pap. 14—15. Jahrh. 22 Bl.

1. 1^r—5^r **Pietro d'Abano Padovano, De motu octavae sphaerae.**[4]) „Incipit tractatus, quem composuit magister Petrus Paduanus in motu 8^e spere, et sequitur capitulum primum prohemiale in operis causa et ipsius intentione. Quoniam iuxta Ptholomeum rerum quippe causas ⋊ inde causa existit prefati. Explicit tractatus motus 8^{ue} spere ordinatus a magistro Petro Paduensi anno gratie 1310."

Scholion von 8 Zeilen.

2. 5^r—9^r **Philo von Bysanz, Pneumatik** (Fragment).[5]) „Incipit liber Aristotelis (!) de conductibus aquarum. Quia tuum amice mi ⋊ emanans per canalem uasis qui est qui est (!) *g*. Explicit Philonius de aquarum conductibus."

9^v und ein darauf folgendes unnum. Bl. leer.

3. 10^r—11^r „Liber de presagiis tempestatum."

4. 11^v—14^r **Tideus, De speculis.**[6]) „Incipit liber Tadei (!) de speculis. Sermo de eo quod est in speculo et in eo quod non est speculum, et

---

1) Ausgabe S. 73-82. 2) Vgl. oben A, 8.

3) Die 1482 von Erh. Ratdolt in Venezia zum erstenmal gedruckte Übersetzung durch Athelhart von Bath mit Johs. Campanus' Kommentar.

4) Dieses seltene kaum edierte Werk findet sich auch im Cod. Canon. Miscell. 190, fol. 78^r—83, datiert 1445, in Bodleian Library in Oxford.

5) Dieses Fragment ist herausgegeben von Val. Rose in Anecdota graeca et graecolatina II, S. 299—313, Berlin 1870, nach Cod. Sloan. (Brit. Mus.) 2030 (14. Jahrh.) u. Par. 7295 (15. Jahrh.), sowie den Codd. Monac. 444 und 534. Vgl. auch unten T, 5; V, 12 u. Q, 2a. Letztere Hs. (Cod. Digbean. 40) aus dem Anfang des 13. Jahrh. ist die älteste bekannte. Der vollständige Text in der arab. Übers. hrsg. von Carra de Vaux in Notices et extraits 38 (1903), S. 27 ff.

6) Ausgabe S. 73—82.

causis illius, quem collegit ex libris antiquorum Tadeus filius Theodori arinogoni medicus. Scias, quod illud quod >< ut pinea procedens ab oculo."

5. 14^r—18^v **Ibn al Haitam, Über Brennspiegel.**[1]) „De sublimiori, quod >< et sunt fortioris combustionis omnibus aliis speculis. Explicit iste liber de speculis."

6. 18^v—19^r ($1\frac{1}{4}$ col.) Auszüge aus Witelos Optik II.

7. 19^r—20^v **[Pseudo-]Euklid-Jordanus, De ponderibus.**[2]) „Incipit tractatus Jordani de ponderibus. Jordani de ponderibus 1^a suppositio: Omnis ponderosi motum esse ad medium >< quia ex hac exceditur brachium brachio *** habetur que situm. Explicit tractatus Jordani de Ponderibus cum commento."

2 leere Blätter.

Heft 2. Pap. 14. Jahrh. 24 Bl. + 2 Bl. jgr. Zeit.

8. 21^r—37^v **Abraham ibn Esra, Liber introductorius in judicia astrorum.**[3]) „Liber Abrahe ducis et Aueneßre. Inicium sapientie timor dominj huius aut verbi sensus est, quod dum homo >< secundum contrarium signorum ita est, ut commemorat Ptholomeus in libro fructus. Hunc librum edidit Abraham Auenesre, quod interpretatur magister adiutorij. Translatus est hic liber a magistro Henrico de Malinis dicto Bate cantore Leodiensis, et est hec translatio perfecta in vrbe veteri anno domini 1292 in octaua assumptione beate Marie virginis gloriose. Deo gratias."

9. 37^v—42^v **De fortitudine planetarum.**[4]) „Per translatorem super ysagoga Abrahe ducis Aueneßre. De fortitudine planetarum. Planetarum fortitudo considera, si locus >< arcum oppositum. Et consimiliter est de principio 3^0 domus. Explicit deo gratias. Perfecta est translatio huius libri in vrbe veteri a magistro Henrico de Malinis dicto Bate anno domini 1272 in crastino angulorum (?) salomonis (?) et iude. Deo gratias."

Anhang. 42^v—43^v Scholien und eine Tafel zu den Werken des Abraham ibn Esra. — 44^r—46^v Zeichnungen und Notizen mit jgr. Hd. Zwischen 43 u. 44 ein leeres Bl.

Heft 3. Pap. datiert 1436. 12 Bl. + 1 Bl. jgr. Zeit.

10. 47^r—50^v **Sacrobosco, Algorismus.**[5]) „Incipit tractatus de minuciis, qui dicitur algorissmus. Omnia que a primaeva >< dicta sufficiant de ra-

1) Vgl. oben A, 5.

2) Kurzer Text mit 13 Sätzen wie im nachfolgenden V, 7 und A, 10, aber mit einem kurzen „Commentum" zu jedem Satz. Vgl. AGMW XIV, S. 147. Vgl. auch B, 24 u. D, 35.

3) Diese Übersetzung aus dem Hebräischen durch Henricus Bates aus Mecheln ist hrsg. unter dem Titel Abrahe Auennaris Judei in re iudiciali opera, Venezia 1507 (ap. Petr. Lichtenstein). Hier wird die Übersetz. dem Pietro d'Abano beigelegt. Vgl. Steinschneider, Hebr. Übers., S. 951 u. 973; AGMW III, S. 126.

4) Dieser Text ist vielleicht ein Zusatz zum vorigen von Chajjim ben Moses (Hagin), dem Dolmetscher des Henricus Bates für die Übersetzung des vorigen Textes ins Französische. Vgl. Steinschneider, Hebr. Übers. 951 u. 973.

5) Zahlreiche Ausgaben. Die erste oder eine der ersten ist die in Straßburg durch Johannes Pryß 1488, die letzte die von M. Curtze zusammen mit Petri Philomeni de Dacia's (Canonicus Roskildensis) Kommentar, Hauniae 1897, herausgegebene.

dicum extractione tam in numeris quadratis tam in numeris cubicis Explicit liber algorismus intitulatus scriptus per me magistrum Jacobum de Cademustis de laude sub (?) die 8. Martij annj 1436 in die Jouis ad laudem dei et omnium sanctorum et sanctarum ipsius."

11. 51^r—58^r **Sacrobosco, De sphaera.**[1]) „Incipit tractatus de spera magistri Johannis de sacroboscho. Tractatum de spera 4^{or} capitulis distinguimus ⋉ aut mundana machina dissoluetur. Explicit tractatus de spera magistri Johannis de sacroboscho scriptus et finitus per me Jacobum de Cademustis artium doctorem de laude sub anno domini 1436 die 23 Junij hora 21 ad honorem dei et beati Bassiani et tocius curie triohphantis. Amen. Amen. Amen."

Anhang. 58^v Notizen von demselben Dr. Jacobus de Cademustis. — Fol. 59 Berechnungen mit jgr. Hd.

Heft 4. Pap. 15. Jahrh. 35 Bl. + 2 leere Bl. Johs. de Muris' Musik u. a. musikalische Werke.

Heft 5. Perg. 12—13. Jahrh. 16 Bl.

12. 95^r—110^v **Astrolabientext.** „Incipiunt septem (corr. in ?) libri horologi Regis Ptolomei. Capitulum 1 : Quomodo scias altitudinem solis . . ."

Heft 6. Pap. 15. Jahrh. 82 Bl. Tractatus causarum. 2 Bücher mit bzw. 4 u. 6 Traktaten.

Heft 7. Perg. 14. Jahrh. 12 Bl. Fixsterntafel und Fixsternbilder.

Der Herausgeber hat diese Hs. im Jahre 1902 in Rom eingesehen und 1910 nach Papiernegativen verglichen.

M

(Cod. Ambros. P. 21. sup.)

Papierhs. aus dem ausgehenden 14. oder eingehenden 15. Jahrh. Besteht aus 2 Vorsatzbl. (A—B), 217 Textbl. und 2 Zusatzbl. 2 Kolumnen Fol. A^r Inhaltsverzeichnis mit einer Hd. des 16. Jahrh.: „Petri Aponensis de uenenis. — eiusdem de balneis 29. — Arnaldi de Villanoua de uenenis 33. — Albucasis de praeparatione medic. 39. — Euclidis optica ex Arabico 119. — Jac. Alchindi de causis diuersitatis aspectus 135. — Chronica summatim ab initio mundi 163." — Hierzu fügt eine 2. Hd.: „Alberti Magni de Lapidibus pretiosis. Codex hic fuit Vincentij Pinelli VC1." Diese 2. Hd. gehört also vielleicht dem Besitzer, dem gelehrten Buchliebhaber in Pavia (gestorben ca. 1602—3). — Daran anschließend schreibt eine dritte Hd.: „Item Liber inscriptus Lapidarius seu de qualitatibus Lapidum ordine Alphabetico." Die Hs. ist also gemischt, hauptsächlich medizinisch. Wir katalogisieren nur die beiden optischen Werke:

1. 119^r—133^r **Euklid, Optik.**[2]) „Liber de aspectibus et speculis Euclidis feliciter incipit. Radius egreditur ab oculo ⋉ ad centrum circuli secundum dispositionem, quam diximus, et hoc est quod demonstrare uoluimus. Explicit liber de aspectibus Euclidis feliciter."

133^v—134^v sind leer.

1) Zahlreiche Ausgaben, die erste vielleicht in Ferrara 1472.
2) Vgl. oben A, 6.

2. 135r—162r **Alkindi, Optik.**[1]) „Incipit liber Jacob Alchindi de diuersis causis diuersitatis aspectus et dandis demonstrationibus super eas feliciter. Oportet postquam optauimus ≍ minor angulo maiore, qui est *bag*. Et illud est, quod demonstrare uoluimus. Explicit liber de diuersis causis diuersitatis aspectus Jachobi Alchindi feliciter."

Der Herausgeber hat diese Hs. in den Jahren 1902 und 1905 in Milano verglichen.

N

(Cod. Amplon. Q. 385.)

S. die Beschreibung in Schum, Beschreibendes Verzeichnis der Amplonianischen Handschriftensammlung zu Erfurt, Berlin 1887, S. 641—44.

Hier finden sich als Nr. 27—28 fol. 200v—204r Tideus, De speculis, anonym, und fol. 204v—206v [Pseudo-]Euklid, De speculis, auch anonym. Zwischen den beiden steht: „Causa efficiens sequentis tractatus fuit Antelidem" (!).

Der Herausgeber hat diese Hs. im Jahre 1904 in Erfurt eingesehen.

O

(Cod. Ashmolean. 357.)

S. die Beschreibung in W. H. Black, A descriptive, analytical, and critical catalogue of the mss. bequeathed unto the University of Oxford by Elias Ashmole, Oxford 1845, Sp. 266—268. Hier ist hinzuzufügen:

5. Al-Kabisi's Introductorius liber, ist nach Steinschneider (Europ. Übers. I, 45) zuerst 1473 in Bologna herausgegeben und mehrmals später (Venezia 1485 und 1491, Paris 1521 usw.).

6. Centiloquium Hermetis ist herausgegeben zu Leipzig bei Mart. de Landsberg ohne Jahr, mit Ptolemaeus' Quadripartitum Venezia 1493, mit Julius Firmicus Basel 1551 und unter dem Titel Astrologia aphoristica Ulm 1674.

8. „Isti sunt libri astronomie quos transtulit Gerardus Cremonensis de arabico in latinum." Die nachfolgende Liste ist sehr schlecht wiedergegeben in Boncompagni, Gherardo Cremonese, Roma 1851, S. 12—13. Die richtige Liste ist:

„liber alfragani habens 30 capitula.[2])
liber almagesti habens 13 tractatus.[3])
liber introductorius Ptholomei ad artem spericam.[4])
liber gebri tractatus 9.[5])
liber messahalla de orbe tractatus 1.[6])
liber theodosii de locis habitabilibus tractatus 1.[7])
liber esculegit [lege: esculegii] tractatus 1.[8])
liber thebith de expositione nominum scilicet almagesti tractatus 1.[9])

---

1) Ausgabe S. 3—41.
2) Vgl. oben B, 5.
3) Boncompagni, Gherardo Cremonese, S. 16 ff.
4) Geminus' Astronomie. Vgl. Gemini elem. astronom. ed. C. Manitius, Lips. 1898, Proleg. XVIII ff.
5) Vgl. oben K, 5.
6) Vgl. oben B, 6.
7) Vgl. oben B, 26.
8) Hypsicles' Anaphorikos. Vgl. oben B, 7.
9) Vgl. Steinschneider, Eur. Übers. I, 26 und Z. f. M. u. Ph. XVIII, S. 335. Unediert.

liber thebith de motu accessionis et recessionis tractatus 1.[1])
liber autolici de spera mota tractatus 2.[2])
liber tabularum jahan cum regulis suis.[3])
liber de crepusculis tractatus 1.“[4])

9. Al-Mansur ben Araham, Centiloquium, vgl. Wüstenfeld, l. c. S. 41.

11. Al-Battâni (?), Centiloquium. Vgl. Steinschneider, Hebr. Übers. 527; Europ. Übers. I, 43.

14. Ahmed ben Jusuf, De proportione et proportionalitate. Unediert.

15. „Tractatus de radiis et umbris et aliis ad perspectivam pertinentibus“. „Oportet postquam ≍ per lineam *uz*.“ d. h. Alkindi's Optik. S. 3, 1—28, 18.

16. Vgl. oben K, 5.

Der Herausgeber hat diese Hs. im Jahre 1904 in Oxford verglichen.

P

(Cod. Paris. 9335.)

S. die Beschreibung in der Bibliotheca Mathematica 3_3 (1902), S. 65 ff. Hier ist zu korrigieren:

1. Theodosius' Sphärik. Vgl oben B, 31 und K, 4.

2. Autolycus' De motu sphaerae. Vgl. oben B, 18.

5. Theodosius' De habitationibus. Vgl. oben B, 26.

8. Ahmed ben Jusuf, De arcubus similibus. Dieser Text ist in der Bibl. Math. 3_3 (1902), S. 69 fälschlich mit dem anonymen von Curtze dem Jordanus Nemorarius beigelegten Text „de arcubus similibus“ identifiziert worden. Vgl. oben D, 15.

10. Liber trium fratrum. Vgl. oben B, 19. Der Anhang findet sich auch in der unter B, 19 erwähnten bisher unbekannten Hs. vom „Liber trium fratrum“: Cod. S. Annunc. (Conv. soppr. A. 1. 1475) zu Firenze.

12—14. Vgl. die gegenwärtige Ausgabe.

16. Kommentar zu Euklids Elementen, Buch X. Suter meint, der Verfasser sei Muh. b ʿAbdelbâqî el-Bagdâdî; vgl. Bibl. Math. 4_3, S. 22 ff. Später hat er den Kommentar analysiert; vgl. Bibl. Math. 7_3, S. 234 ff.

17. Alchwarizmi, Algebra. Vgl. Bibl. Math. 6_3, S. 239 ff.

18. Abubekr, Liber mensurationis. Über den Verfasser s. Suter in Bibl. Math. 4_3, S. 19 ff.

19. Sayd Abuothman. Über den Verfasser s. ibidem.

20. Liber Aderameti. Über den Verfasser s. ibidem.

25. Al-Farabi, De scientiis. In deutscher Übersetzung herausgegeben von E. Wiedemann in den Sitzungsberichten der physikalisch-medizinischen Sozietät zu Erlangen 39 (1907), S. 74 ff.

Der Herausgeber hat die hier publizierten drei Texte nach P in München 1900—1901 und in Paris 1904 abgeschrieben.

Q

(Cod. Digbean. 40.)

S. die Beschreibung in Macray, Cat. codd. mss. Bibl. Bodl. pars nona codices a ... Kenelm Digby ... anno 1634 donat., Oxonii 1883, col. 36—37. Hier ist folgendes zu korrigieren oder hinzuzufügen:

1 (fol. 1^r—8^r). „In nomine domini pii et misericordis. Incipit liber de compositione uniuersalis astrolabii. Ptolemaeus * mercurii incedens uestigiis in

1) Vgl. oben B, 34. 2) Vgl. oben B, 18.
3) Vgl. Steinschneider, Hebr. Übers. S. 574—575. 4) Vgl. oben B, 16.

libro suo qui uocatur almagesti de motu sic ait ⋊ utrique conueniat ad plenum dicetur. Explicit liber etc." 8ᵛ leer.

2a (fol. 9ʳ—12ᵛ) **Philo von Bysanz, Pneumatik (Fragment)**[1]) schließt: „. . . emanans per canalem uasis qui est sic."

2b (fol. 13ʳ—15ᵛ) **[Pseudo-]Euklid, De speculis**[2]) (ohne Titel): „Praeparatio speculi ⋊ simul cum videtur, et illud est, quod demonstrare voluimus.

4b. (fol. 51ᵛ) Tabula lunaris.

Der Herausgeber hat diese Hs. im Jahre 1904 in Oxford eingesehen und den bisher übersehenen Text 2b (Pseudo-Euklid, De speculis) verglichen.

R

(Cod. Paris. 10260.)

Papierhs. in Folio aus dem 16. Jahrh. Besteht aus 4 Vorsatzbl. (A—D) und 201 Textbl. 2 Hände, von denen die eine nur den ersten Text (Ptolemäus' Optik, fol. 1—64) geschrieben hat. Fol. Aʳ: aufgeklebter Ausschnitt eines gedruckten Katalogs mit der älteren Signatur der Hs. »Cod. gr. Suppl. Nr. 263.« Fol. Aᵛ—Dʳ leer. Fol. Dᵛ: handschr. Inhaltsverzeichnis: »Liber Ptolemaei de Opticis. Tractatus perspectiuae editus a Rogerio Bacone. Euclides de Ponderibus et Leuitatibus corporum. Quaestiones Alberti Praedicatoris super formis in speculis apparentibus. Anonymi de qualitate ejus quod videtur in speculo. Anonymi Tractatus de optica, caret initio.«

Inhalt.

1. 1ʳ—64ʳ **Ptolemaeus, Optik.**[3]) „Incipit liber Ptolomei de opticis siue aspectibus translatus ab Ammiraco Eugenio Siculo de Arabico in latinum. Cum considerarem ⋊ *az*. Explicit nec plus inuenitur de eo."

2. 64ᵛ—137ʳ **Roger Baco, Optik.**[4]) (64ᵛ, jüngere Hd.:) „Tractatus perspectiuae editus a fratre Rogerio Bacconis ordinis minorum." (Hd. 1:) „Hic incipit tractatus perspectiuae habens tres partes, prima est de communibus . . ." (7 Zeilen) „Hic aliqua sunt dicenda de perspectiua, auctores quidem . . ." (65ʳ—137ʳ, Hd. 1:) „Incipit tractatus perspectiuae editus a fratre Rogerio Baco de ordine minorum. Quomodo inter gradus sapientiae ⋊ ignorans non posset sustinere. Explicit tractatus perspectiuae editus a fratre Rogerio Bacco de ordine minorum."

3. 137ᵛ—138ʳ **[Pseudo-]Euklid-Jordanus, De ponderibus II.**[5]) „Incipit liber Euclidis de ponderibus et leuitatibus corporum ad inuicem. Equalia corpora in magnitudine sunt, que replent loca equalia ⋊ ad potentiam ipsius *a* que est *f*. Explicit quia plus non inuenitur." 138ᵛ leer.

4. 139ʳ—144ʳ **Albertus Praedicator, Katoptrik.**[6]) „Incipit tractatus questionum Alberti Praedicatoris super formis in speculis apparentibus.

---

1) Vgl. oben L, 2. 2) Ausgabe S. 97—106. 3) Vgl. oben A, 8.

4) Hrsg. in Frankfurt 1614. Sodann im opus maius (Jebb, London 1733 und Venezia 1750; Bridges, Oxford 1897. II. Bd.)

5) Diese Rezension auch in V, 3; T, 7; D, 17; Bodl. Auct. F. 5. 28 (13. Jahrh.) fol. 148ʳ und S. Marc. Flor. (conv. soppr. J. I. 32) (13. Jahrh.) fol. 47ʳ.

6) Dieser Text scheint nicht gedruckt zu sein. Vgl. Alberti Magni Opera I—XXI, Lyon 1651.

Quaeritur de forma resultante in speculo ≍ paruam differentiam uisibilitatis. Et haec de rationibus speculorum sufficiant. Explicit tractatus Alberti praedicatoris de rationibus speculorum."

5. 144v—149v **Tideus, De speculis.**[1]) „Incipit liber de qualitate eius, quod uidetur in speculo et acceptionibus eorum. Scias, quod illud ≍ pinea procidens [!] ab oculo. Explicit liber de qualitate eius, quod uidetur in speculo, et in non speculo, et dico explicit, quia plus non inueni in exemplari."

150r—152v leer.

6. 153r—169r **Alkindi, Optik**[2]) (Fragment von S. 7, 2 bis S. 37, 16). „Desideratur Principium. /secundum rectitudinem peruenit ad una[m] candelarum ≍ ad ipsam partem. Quod sic probatur/. desideratur Finis."

169v—170v leer.

7. 171r—179r **[Pseudo-]Euklid-Jordanus, De ponderibus I.**[3]) „Incipit liber Euclidis de ponderibus. Omnis ponderosi motum esse ad medium ≍ rursum *ab*, ergo et *ad* data est, quare et eius medietas *ag*; quod oportebat ostendere. Atque hinc manifestum est totum, quod in principio uolebamus. Explicit liber Euclidis de ponderibus."

8. 179v—183r **[Pseudo-]Euklid, De speculis.**[4]) „Incipit liber Euclidis de speculis. Preparatio speculi ≍ quod radii ad nos uenientes sunt equidistantes. E. i. e q. d. u."

9. 183v—192r **Tabit ibn Korrah, Liber karastonis.**[5]) „Incipit liber Karastoni de ponderibus. Continuet deus conseruationem tuam ≍ cognoscere casum erroris. Finitus est liber Karastonis editus a Thebit filio Core."

192v—193v leer.

10. 194r—199r **Ibn al Haitam, De crepusculis.**[6]) „Incipit liber Abhomadi Malfegeyr de crepusculis. Liber Abhomadi Malfegeyr, id est in crepusculo matutino, in saffae, id est in uesperino crepusculo. Uerba eius: Ostendam, quid sit crepusculum ≍ uapores ascendentes ex terra. Hic eius est finis, quem intendit in hac epistola ... (7 Zeilen) ... quia in illis, quae dicit, nulla est utilitas, ideo praetermisi. Explicit liber Abhomadj de crepusculis."

Der Herausgeber hat diese Hs. im Jahre 1904 in Paris eingesehen.

S

(Cod. Savilian. 24.)

Papierhs. in Quarto aus dem 16. Jahrh. Besteht aus 1 Vorsatzbl. (A) und 188 Textbl. 1 Hd. Fol. Ar (mit jüng. Hd.) Inhaltsverzeichnis: »Ptolemaei Opti-

---

1) Ausgabe S. 73—82. 2) Ausgabe S. 3—41. 3) Vgl. oben A, 10.
4) Ausgabe S. 97—106. 5) Vgl. oben A, 9. 6) Vgl. oben B, 16; unten V, 11.

corum sermones 5 ex Arabico Latine redditi. Jacobi Alkit [Tractatus opticus] de causis diuersitatis Aspectus. Lat. — Pediasemi Geometria. Gr.« — Geschenk von Joh. Praetorius an Henry Savile (vgl. fol. 170^v unten).

Inhalt.

1. 1^r—137^v **Ptolemaeus, Optik.**[1]) „Cum considerarem ≻ *az.*".

138^{r-v} leer.

2. 139^r—167^v **Alkindi, Optik.**[2]) „IACOBI ALKIT DE CAVSIS DIuersitatis aspectuum liber. Oportet, postquam optamus ≻ qui est ABG. Et illud est, quod demonstrare uoluimus."

168^r—170^r leer.

170^v (mit anderer Hd. als der Text) »Henrico Savile viro clarissimo optimo et disciplinarum peritissimo et vero artifici memoriae et suorum officiorum commendationis gratia hunc optices Ptolemaei librum d. d. Johan. Praetorius.«

3. 171^r—188^r. Griechischer Text (vgl. Inhaltsverzeichnis oben).

188^v leer.

Der Herausgeber hat diese Hs. im Jahre 1904 in Oxford verglichen.

T

(Cod. Coll. Rom. H. C. 93. = Cod. Vitt. Em. 2548. Ms. Gesuitic. 419.)

Papierhs. in Quarto aus dem 16. Jahrh. Besteht aus 1 Vorsatzbl. (A) und 154 Textbl. Mehrere Hände, die untereinander geschrieben haben. Textlücken. Fol. A: Inhaltsverzeichnis und die Signatur „Collegij Romani Soc^{ti}. Jesv." Die Hs. gehörte also früher dem Jesuiterkollegium in Rom, befindet sich aber nun als Nr. 2548 (Mss. Gesuitici 419) in der Bibliotheca Centrale Vittorio Emanuele in Rom. — Kopie der nachfolgenden Hs. (V).

Inhalt.

1. 1^r—73^v **Ptolemaeus, Optik.**[3]) Anfang wie V, 1. Schluß: „perpendiculare *az.* Explicit non plus inuenitur de eo. Explicit liber Tholomei de opticis siue de aspectibus." (Bl. 25—26 ohne Text.)

Bl. 74—75 leer.

Bl. 76^{r-v}. Ein oben weggelassenes Stück vom Ptolemaeustexte fol. 25—26, wo fol. 25^r steht: „hic erit folium, quod est in fine sermonis quinti pag. 76."

Bl. 77^{r-v} leer.

2. 78^r—79^r **[Pseudo-] Euklid, De speculis.**[4]) Genau wie V, 4.

3. 79^v—84^v **Albertus Praedicator, Katoptrik.**[5]) Genau wie V, 5.

4. 85^r—90^r **Tideus, De speculis.**[6]) Genau wie V, 6.

Bl. 90^v—91^v leer.

---

1) Vgl. oben A, 8. 2) Ausgabe S. 3—41. 3) Vgl. oben A, 8.
4) Ausgabe S. 97—106. 5) Vgl. oben R, 4. 6) Ausgabe S. 73—82.

5. 92^r—96^v. **Philo von Bysanz, Pneumatik** (Fragment).[1] „Incipit liber Vastor de ingenijs Philonis in ductu aquarum“ usw. genau wie V, 12.

6. 97^r. **Fragment** genau wie V, 13.

Bl. 97^v leer.

7. 98^r—98^v **[Pseudo-] Euklid-Jordanus, De ponderibus.**[2]) Genau wie V, 3.

8. 99^r—105^v. **Ibn al Haitam, De crepusculis.**[3]) Wie V, 11 nur „sasfac“ für „salfac“. Schluß „Verumtamen terre non est apud hunc orbem quantitas magna, et ponam arcum *bg* 19 gradus, que est depressus solis apud ortum crepusculi supra punctum. Ergo *g* est centrum/“ [fol. 105^v schließt].

Bl. 106 leer.

9. 107^r—122^v **Alkindi, Optik.**[4]) Genau wie V, 14. Unter die erste Seite: „incerti Autoris ad finem libri“. Nach dem Schluß hinzugefügt: „Hermis.“

Bl. 123—124 leer.

10. 125^r—132^v. **Tabit ibn Korrah, Liber karastonis.**[5]) Genau wie V, 9.

11. 133^r—140^r. **[Pseudo-] Euklid-Jordanus, De ponderibus.**[6]) Genau wie V, 7.

12. 140^v—143^v. **[Pseudo-] Euklid, De speculis.**[7]) Genau wie V, 8.

Bl. 144 leer. Die letzten 10 Blätter unnumeriert.

Der Herausgeber hat diese Hs. in Rom im Jahre 1902 eingesehen.

V

(Cod. Vatic. lat. 2975.)

Papierhs. in Folio aus dem 16. Jahrh. Besteht aus 2 Vorsatzblätter und 234 Textbl. (Wasserzeichen: „Antonio Fornari C Fabriano.“ Deutliche Schrift mit Textlücken und am Rande Korrekturen einer zweiten Hd. Figuren mit roten und schwarzen Figurbuchstaben auch am Rande.

Inhalt.

1. 1^r—78^v **Ptolemaeus, Optik.**[8]) „Incipit liber Ptolomei de opticis siue aspectibus translatus ab Ammiraco Eugenio Siculo de Arabico in latinum. Cum considerarem ≍ perpendicularis *az*. Explicit nec plus inuenitur de eo.“

Bl. 79 ist leer.

2. 80^r—146^v **Roger Baco, Optik.**[9]) „Incipit tractatus perspectiue editus a Fratre Rogerio Baco de ordine Minorum. Quoniam inter gradus ≍ non posset substinere. Explicit tractatus perspectiuae editus a fratre Rogerio Bacco: de ordine minorum.“

1) Vgl. oben L, 2. 2) Vgl. oben R, 3. 3) Vgl. oben B, 16.
4) Ausgabe S. 7,2—37,16. 5) Vgl. oben A, 9. 6) Vgl. oben A, 10 und R, 7.
7) Ausgabe S. 97—106. 8) Vgl. oben A, 8. 9) Vgl. oben R, 2.

Bl. 147 ist leer.

3. 148^{r-v} **[Pseudo-] Euklid-Jordanus, De ponderibus.**[1]) „Incipit liber Euclidis de ponderibus et leuitâtibus corporum ad inuicem. Equalia corpora in magnitudine sunt que replent loca equalia ⋊ 3 ad potentiam ipsius *a*, que est *s*. Explicit quia plus non inuenitur de eo."

Bl. 149 ist leer.

4. 150^{r}—151^{r} **[Pseudo-] Euklid, De speculis.**[2]) „Incipit libellus Euclidis de speculis. Preparatio speculi ⋊ et conuersione eius ad oculum."

Anhang. „Reliquum autem parum, quod restitit ad scribendum, tractabat de radio cadente super specula plana, qualiter conuertebatur ad equales angulos, si oblique super ea cadebat, uel ad se ipsum, si directe ut in hac figura, Item qualiter lumen solis intrans per fenestram in domo uel corpore opposito est maior quantitate fenestrae per quam intrat ut in hac figura."

5. 151^{v}—156^{v} **Albertus Praedicator, Katoptrik.**[3]) „Incipit tractatus questionum Alberti predicatoris super formis in speculis apparentibus. Queritur de forma ⋊ differentiam uisibilitatis. Et haec de rationibus speculorum sufficiant. Explicit tractatus Alberti predicatoris de rationibus speculorum."

6. 157^{r}—162^{r} **Tideus, De speculis.**[4]) „Incipit liber de qualitate eius quod uidetur in speculo et deceptionibus eorum. Scias, quod ⋊ pinea procedens ab oculo. Explicit liber de qualitate eius, quod uidetur in speculo et in non speculo. Et dico explicit quia plus non inueni in exemplari"

Bl. 163 ist leer.

7. 164^{r}—171^{r} **[Pseudo-] Euklid-Jordanus, De ponderibus.**[5]) „Incipit liber Euclidis de ponderibus. Omnis ponderosi motum esse ad medium ⋊ quare et eius medietas *ag*, quod oportebat ostendere Atque hinc manifestum est totum quod in principio uolebamus. Explicit liber Euclidis de ponderibus."

8. 171^{v}—174^{v} **[Pseudo-] Euklid, De speculis.**[6]) „Incipit liber Euclidis de speculis. Preparatio speculi ⋊ quod radij ad nos uenientes ⟨Lücke⟩ sunt equidistantes, et illud est q. d. u."

Bl. 175 ist leer.

9. 176^{r}—183^{v} **Tabit ibn Korrah, Liber karastonis.**[7]) „Incipit liber karastonis de ponderibus. Continuet Deus conseruationem ⋊ cognoscere casum erroris. Finitus est liber karastonis editus a Thebit filio Core."

10. 184^{r}—201^{r}. **Euklid, Optik.**[8]) „Incipit liber de uisu. Ponatur ab oculo eductas rectas lineas ⋊ demonstrabimus contingentia quemadmodum in circularibus. Explicit liber de uisu."

---

1) Vgl. oben A, 10. 2) Ausgabe S. 97—99,22. 3) Vgl. oben R, 4.
4) Ausgabe S. 73—82. 5) Vgl. oben A, 10; R, 7 und T. 11.
6) Ausgabe S. 97—104,22. 7) Vgl. oben A, 9. 8) Vgl. oben D, 5.

11. 202r—208v. **Ibn al Haitam, De crepusculis.**[1]) „Incipit liber Abhomady malfegeyr de crepusculis Liber Abhomady malfegeyr, id est in crepusculo matutino, et saffac, id est in uespertino crepusculo. Verba eius: Ostendam, quid sit crepusculum ⋉ uapores ascendentes ex terra.

Hic enim est finis, quem intendit in hac epistola Quaedam autem secuntur in arabico, quae ego praetermisi, quia in eis nulla est utilitas. Non enim continentur in eis nisi quaedam, in quibus laudat Deum more Saracenorum et reprehendit illos, qui quaerebant, quis fructus est in hoc, quod ipse dixit in hac epistola, et dixit, illos esse redarguendos, qui non comprehendunt insensibilia cum sensibilibus. Et quia in eis, quae dicit, nulla est utilitas, ideo praetermisi ea. Deo gratias et beato Roberto martyri. Explicit liber Abhomady de crepusculis."

Bl. 209 leer.

12. 210r—214v **Philo von Bysanz, Pneumatik** (Fragment).[2]) Incipit liber Vassor de ingenijs Filonis in ductu aquarum. In nomine Dei misericordis et pij incipit liber Philonis de ingenijs spiritulibus Dixit: Quia tuum amice mi ⋉ ab *abc* per *d*, et est hoc autem, cum sint eiusdem generis et ad illud ualent. Explicit, quia plus non inuenitur translatum."

13. 215r **Fragment von 20 Zeilen.** „Incipit quoddam ingenium ad eleuanda magna pondera cum facilitate ⋉ et cum attrahes cordam, ad te pondus eleuabitur, ut patet in figura." [Figur fehlt!]

14. 216r—231v **Alkindi, Optik**[3]) (Fragment). — „Desideratur principium. /Secundum rectitudinem perueniet ad una (!) candelarum ⋉ partis eius ad ipsam partem, quod sic probatur. / Desideratur finis."

Bl. 232—234 leer.

Der Herausgeber hat diese Hs. im Jahre 1902 in Rom eingesehen und zum Teil verglichen.

Y

(Cod. Magliab. Cl. XI, Nr. 30 = Bibl. Naz. Firenze II. III. 35.)

Papierhs. in Folio aus dem Ende des 16. oder Anfang des 17. Jahrh. Besteht aus 6 Vorsatzbl. (A—F) und 104 Textbl. Eine Hand (ital. Minusk.). Fol. Ar: „III. PTOLEMAEI (Cl.) de Opticis Ammiraco Eugenio Siculo ex Arabico interprete etc. Cod. 35." Fol. Br: „Ex Libris Antonii Magliabechii nonis Jul. 1714. Catalogus primus nostrae Biblioth." Fol. Cr: „In Catalogo primo nostrae Bibliothecae Cl. XI. P. 3. Cod. 30. Cl. Ptolemaei de Opticis translatus ab Ammiraco Eugenio Siculo de Arabico Cod. scriptus saec. XVI." Fol. Dr: „OPERVM SERIES: 1. Ptolemaei (Cl.) de Opticis sive aspectibus, ex Latina versione Ammiraci Eugenii Siculi ex Arabico, cum interpretis prooemio. In Cod. integro chart. foll. 104 in fol. Saec. XVI a fol. 1 recto ad 88 rectum. Desin. in Libro V trunco et in fine notatur „nec plus invenitur de eo." — 2. Euclidis Liber de Ponderibus, Latine. A fol. 89 recto ad 98 versum. — 3. — Liber de Speculis,

1) Vgl. oben B, 16. 2) Vgl. oben L, 2. 3) Ausgabe S. 7,2—37,16.

Latine. A. fol. 99 recto ad 103 versum. Fuit Antonii Magliabechii." Fol. E^r: „OPERUM SERIES ALPHABETICA." Darauf folgt noch ein Inhaltsverzeichnis wie das vorhergehende.

Inhalt.

1. 1^r—88^r **Ptolemaeus, Optik.**[1]) „Incipit liber Ptolomei de opticis siue aspectibus translatus ab Ammiraco Eugenio Siculo de Arabico in latinum. Cum considerarem >< perpenducularis *az*. Explicit nec plus inuenitur de eo."

Bl. 88^v leer.

2. 89^r—98^v **[Pseudo-] Euklid-Jordanus, De ponderibus.**[2]) „Incipit liber Euclidis de Ponderibus. Omnis ponderosi motum >< manifestum est totum, quod in principio uolebamus. Explicit liber Euclidis de ponderibus."

3. 99^r—103^v **[Pseudo-] Euklid, De speculis.**[3]) „Incipit liber Euclidis de speculis. Preparatio speculi, in quo uideas >< radii ad nos uenientes ⟨Lücke⟩ sunt equidistantes et i. e. q. d. u."

Bl. 104 leer.

Der Herausgeber hat diese Hs. in Firenze im Jahre 1902 eingesehen.

X

(Cod. Norimberg. cent. V, 64.)

Gemischte Papier- und Pergamenths. in 4 Heften vom bzw. 15., 13., 14. und 15. Jahrh. Im ganzen 183 Blätter (fol. 1—104, 107—175, 176a, 176b, 177 bis 183) und geschrieben von 4 Händen. Randnoten mit einer Hd. von ca. 1500. Auf der Innenseite des Bandes eine Berechnung von kirchlichen Einnahmen (Zehnten) aus „Stegesdorf", „Chorflach", „Trawtmannstorff" „Paldauf", „Bānibb", „Sanct. Florian". In bezug auf den letzten Ort steht „Item decima in sancto Floriano habet Martinus Cellerarius in Lonsperg". Diese Namen verweisen aufs Lassnitz-Gebiet in Steiermark.

Inhalt.

Heft 1. Pap. 15. Jahrh. (nach 1440). 106 Bl.

1^r—4^v leer.

1. 5^r—6^v „Tabula Equationis domorum ad altitudinem 48 graduum."

2. 7^r **Nativität.** „Anno domini 1440 an sand Jacobs tag ze mittag was dy sunn in . . ."

7^v—12^r leer.

3. 13^r—84^r **Pierre d'Ailly, Concordantia theologiae et astronomiae I—III.**[4]) (13^r:) „[T]ractatus sequens de concordantia Theologie." (13^v leer. 14^r:) „Tractatus sequens de concordantia Theologie et astronomie vigintiloquium dici potest, quia viginti uerba vtilia continet, primum quia

1) Vgl. oben A, 8. 2) Vgl. oben A, 10. 3) Ausgabe S. 97—104, 22.

4) Gedruckt von Erh. Ratdolt in Augsburg 1490 unter dem Titel: „Petri de Aliaco Cardinalis Cameracensis Concordantia astronomie cum theologia. Concordantia astronomie cum historica narratione. Et elucidarium duorum precedentium." Ebenso in einer Folioausgabe s. l. s. a. (d. h Lovaniae durch Joh. v. Paderborn) fol. aa_1 ff.

secundum phylosophiam omne verum ⨯ scripta sunt penitus ignorare. Hec itaque ad dei laudem et gloriam finiantur, qui sine fine viuit et regnat in secula seculorum Amen. Explicit tercius tractatus de concordia astronomie cum theoloyca et hystorica veritate. Compilatus a domino Pe[tro] cardinali Cameracensi apostolice sedis legato finitus Colonie anno Christi 1414 die 24 mensis Septembris."

4. 84ᵛ—92ʳ **Pierre d'Ailly, Apologetica defensio astronomicae veritatis I—II.**[1]) „Qverunt aliqui de nativitate Christi vel Marie matris eius, vtrum subiecta fuerit astrorum legibus. De cuius questionis materia scripsi breuiter in tractatu de legibus et sectis contra supersticiosos astronomos ⨯ (88ʳ:) et subcorrectione quorumlibet probabilius dicentium. Explicit [prima] appollogetica defensio astronomice veritatis a domino Pe[tro] Cardinali Cameracensi datum Colonie 1414 die 26 septembris. Sepe et multum hoc mecum cogitaui, cur magni doctores theologi etiam in sciencys mathematicis peritissimi ⨯ et utique hoc facit ad laudem et exaltationem huius scientie et ad honorem et gloriam almi conditoris siderum, qui est benedictus in secula seculorum Amen. Explicit secunda appollogetica defensio astronomice veritatis a domino Pe[tro] Cardinali Cameracensi datum Colonie Anno domini M°CCCC⁰ XIIII die 3 mensis Octobris etc."

5. 92ᵛ—102ʳ **Magister Evno (?), Judicia de impressionibus in aere.**[2]) „Felix inquam nimium prior etas in qua ⨯ periti vero considerant et perscrutantur hinc et inde, antequam indicunt etc. Expliciunt Judicia de impressionibus que fiunt in aere collecta et experimentata a magistro Evnone (??) morantem (!) circa sanctum Burgardum in Herbipoli."

102ᵛ—108ᵛ leer.

Heft 2. Perg. 13. Jahrh. 55. Bl.

6. 109ʳ—116ᵛ **Al-Zarkâli, Canones super tabulas Toletanas** (Fragment).[3]) „Canones tabularum." „/Post motuum superioris circuli notitiam restat 7 celestium corporum infra positorum circulorum cursus inuestigare... (1 Kolonne) . . . Cum cuiuslibet planete medium cursum libuerit inuenire ⨯ etiam facies cum vniuersis gradibus usque in perfectionem 90 graduum. Expliciunt canones Azarchelis super tabulas toletanas."

7. 117ʳ—163ᵛ **Toletanische Tafeln.**[4]) „|Tabula medii motus solis in annis arabum ad meridiem ciuitatis Toleti | ⨯ | Tabula declinationis uerificata secundum Almeonem filium Albumazaris que est uidelicet 23 gr. 33. | Expliciunt tabule astronomie siue toletane."

1) Dieser Zusatz zum vorigen Werke fehlt in der Quartausgabe vom Jahre 1490, findet sich aber in der Folioausgabe fol. gg_6 ff. mit dem Titel „Apologetica defensio astronomice veritatis."

2) Dieser Text ist uns sonst unbekannt. Der Autor, dessen Name auch Fynone gelesen werden könnte, lebte in der Mitte des 14. Jahrh.; denn im Werke steht: „vidi anno domini 1355".

3) Diese Canones sind nur in Auszügen herausgegeben, und zwar von Steinschneider (Bulletino Boncompagni XX, 7) und Curtze (Bibl. Math. 1_3 (1900), S. 338—47).

4) Gedruckt im Jahre 1483 von Erh. Ratdolt in Venezia und 1492 ibidem von Joh. Hamman.

Heft 3. Perg. 14. Jahrh. 11 Bl.

8. 164^r—168^v **Euklid, Optik.**[1]) „Rectas ductas lineas ferri spatio ≻ quemadmodum in circularibus."

9. 168^v—170^v **Euklid, Katoptrik.**[2]) „Visum rectum esse cuius medium ≻ in eis positi (!) stupa accendetur. Explicit liber de speculis."

10. 171^r—172^r **Theodosius, De habitationibus.**[3]) „Jllis quorum habitationis loca sub polo ≻ tempore quo sol preteriret (?) signum dies erit, etc. finis."

11. 172^r—173^v **[Pseudo-] Euklid, De speculis.**[4]) „Preparatio speculi, in quo videas ≻ simul cum omnibus videtur. Et hoc est etc. finis."

12. 173^v—174^v **Anonyme Optik.**[5]) „Circa o^m visus, de quo certum est ≻ exaratis et cetera sunt s. in vniuerso vide etc. finis. Explicit iste liber etc. finis. Sit scriptor criminis (?)."

Heft 4. Pap. 15. Jahrh. 10 Bl.

175^r leer.

13. 175^v—$176a^v$ **Astrologisch-meteorologische Notizen.** „Describo figuras octo circulares et diuidam omnes circulos in 12 partes equales ≻ Item si hoc est amicabili aspectu planetarum et indigne aliqua fl.: venti uel fri./"

$176b^r$—183^v leer.

Der Herausgeber hat diese Hs. im Jahre 1911 nach der Drucklegung des [Pseudo-] Euklid-Textes in København verglichen.

Z

(Cod. Magliabech. Cl. XI, Nr. 55 = Bibl. Naz. Firenze II. IV. 352.)

Papierhs. aus dem 16. Jahrhundert. Besteht aus 23 beschriebenen Blättern.

Inhalt.

1. 1^r—9^v **[Pseudo-] Euklid-Jordanus, De ponderibus.**[6]) „Omnis ponderosi motum esse ad medium ≻ medietas *ag*, quod oportebat ostendere. Atque hinc manifestum est totum, quod in principio uolebamus. Explicit liber Euclidis de ponderibus."

2. 10^r—14^r **[Pseudo-] Euklid, De speculis.**[7]) „Preparatio speculi, in quo uideas ≻ radij ad nos uenientes sunt aequidistantes. Et i. e. q. d. u."

3. 14^r—23^v **Anonyme Astrolabienbeschreibung.**[8]) „De astrolabio multi tum veteres tum recentiores scripsere. Messhalah fabricam instrumenti huius usumque satis exposuit ≻ astrolabij sit australis et superstans septemtrionalis. Hec quoad theoriam, fabricam usumque astrolabij satis; caetera, quoniam trita sunt et ab alijs tradita, facile notescent."

Der Herausgeber hat diese Hs. in Firenze im Jahre 1905 verglichen.

1) Die Anfangsworte „Ponatur ab oculo" sind hier weggefallen. Vgl. Heibergs Ausgabe von Euclidis opera omnia VII p. 3—121. Vgl. oben D, 5 u. V, 10.
2) Vgl. oben A, 7. 3) Vgl. oben B, 26. 4) Ausgabe S. 97—106.
5) Dieser Text ist uns sonst nicht bekannt.
6) Vgl. oben A, 10. 7) Ausgabe S. 97—104, 22. 8) Sonst unbekannt.

TEXTGESCHICHTLICHE AUFSCHLÜSSE.

Alkindi, De aspectibus.

Nach den arabischen Bibliographien scheint der Titel „Über die Verschiedenheiten der Bilder" gewesen zu sein.[1]) Indessen kommen in den Listen über Alkindîs Schriften auch andere Titel vor, die dem hiesigen Werke entsprechen könnten, wie z. B. „Über die Verschiedenheit der Spiegelbilder" und „Über den Unterschied zwischen dem Gange und der Wirkung der Strahlen".

In den bekannten arabischen Handschriften ist dieses Werk bisher nie angetroffen worden, so daß der Urtext verschollen zu sein scheint. Da Steinschneider keine hebräische Übersetzung anführt, dürfte Alkindîs Optik nur in der vorliegenden lateinischen Übersetzung erhalten sein. Der im Cod. Par. arab. 2467 erhaltene „Auszug aus der Verbesserung der Optik" ist noch nicht untersucht, scheint aber nach dem Titel eher irgendeine Rezension von Euklids Optik zu enthalten.

Von den 11 bisher bekannten Handschriften, die Alkindîs Optik enthalten, reicht keine über das 14. Jahrh. hinauf. Die Auszüge des Werkes, die sich im Cod. Digbean. 168, fol. 129^r-130^v befinden (mit dem Titel: „Ex libro Jacob Alchindi de perspectiva"), gehören, nach der Schrift zu urteilen, möglicherweise noch dem 13. Jahrh. an. Daß die Übersetzung schon um die Mitte des 13. Jahrh. allgemein verbreitet war, bezeugen die Zitate des Werkes bei Albertus Magnus († 1280), Vincenz von Beauvais († 1267), Roger Baco († 1294) und Witelo (13. Jahrh.); vgl. S. 70 oben.

Wenn das Werk schon so früh verbreitet war, gehörte es aller Wahrscheinlichkeit nach der reichen Übersetzungsliteratur des 12. Jahrh. an.

In den bekannten Hs. wird zwar kein Übersetzer genannt. Indes dürfte die allgemeine Annahme, daß Gerhard v. Cremona († 1187) das Werk, wie so viele andere, in Toledo übersetzte, nicht fehlgehen, und dies um so weniger als in den Verzeichnissen über Gerhard v. Cremonas Übersetzungen der Buchtitel „Liber Alchindi de aspectibus tractatus I" vorkommt.[2])

Tatsächlich kennen wir auch in unserer mittelalterlichen Literatur kein anderes Werk als das hier vorliegende, das diesem Titel entspricht.[3])

---

1) Suter in AGMW VI, S. 13.

2) Vgl. Boncompagni, Gherardo Cremonese, S. 5, wo diese Liste nach dem Cod. Vatic. 2392 abgedruckt ist, und Wüstenfeld, Übersetzungen arabischer Werke in das Lateinische, S. 62, wo der Titel nach der Liste in den Codd. Lips. 1119 und 1148 angegeben wird. Genau denselben Titel haben aber die vom Herausgeber verglichenen Codd. Vatic. 2390 (fol. 57^r) und Par. 14390 (fol. 223^{r-v}).

3) Wenn man glaubte, im Cod. Coll. Corp. Chr. 254 (C) zwei optische Werke des Alkindî zu finden, so beruht dies, wie oben S. 129—30 dargelegt, auf einem Mißverständnis.

Zu dieser äußeren Wahrscheinlichkeit gesellen sich aber innere Kriterien für Gerhard v. Cremona als Übersetzer, die sehr schwer wiegen.

Erstens kommt mehrmals (12, 2; 16, 24; 30, 8; 34, 9) das arabische Lehnwort meguar (miḥwar) = Umdrehungsachse vor. Dasselbe Wort findet man in vielen sicheren und mehreren wahrscheinlichen Gerhard-Übersetzungen, nämlich in Euklids Elementen;[1]) in Al-Narizi's Kommentar zu denselben (vgl. Curtzes Ausgabe S. 7, 19); Geminus' Astronomie (vgl. oben O, 8[2]); Dshabir ibn Aflahs Astronomie (vgl. oben K, 5; O, 8 und Peter Apians Ausgabe S. 62 — 63); Liber trium fratrum (vgl. oben B, 19 und Curtzes Ausgabe S. 152, 9); Autolycus' Kugellehre (vgl. oben B, 18; unediert, kollationiert vom Herausgeber nach mehreren Hss.); Theodosius' Wohnungslehre (vgl. oben B, 26; unediert, untersucht nach B, P und mehreren Hss.); Theodosius' Sphärik, kurze Übersetzung, untersucht nach D, P und mehreren Hss. (vgl. oben D, 7; B, 31 und K, 4). In sicheren Übertragungen anderer Übersetzer kommt aber das Wort nicht vor, soweit wir es bisher feststellen konnten.

Zweitens benutzt der Übersetzer von Alkindîs Optik den Ausdruck in duo media secare, diuidere oder partiri für halbieren (7, 1, 3, 13, 15, 20; 25, 1; 33, 33; 34, 3, 5, 18—20). Dieser Ausdruck ist sehr allgemein in den oben genannten Gerhardschen Übersetzungen und mehreren anderen wie z. B. Ptolemaeus' Almagest (Syntaxis), Alkwarizmi's Algebra, Menelaus' Sphärik usw. Trotz eifrigen Suchens in den Übersetzungen anderer, haben wir den Ausdruck nur einmal in der von Campanus kommentierten Athelhartschen Übersetzung von Euklids Elementen (I, def. 17) gefunden, sonst aber andere Ausdrücke wie per medium, per aequalia, per dimidium, in duo aequalia, per aequa, in duo aequa, in duas medietates, per duas medietates secare, diuidere oder partiri.

Ein drittes für Gerhard sprechendes Kriterium, nämlich die fehlerhafte Übersetzung von Schnittebene oder Schnittlinie durch die Bezeichnung differentia communis statt sectio communis (die arabischen Wörter für Schnitt und Unterschied sind nämlich einander sehr ähnlich) läßt uns bei Alkindîs Optik im Stiche, da hier keine solchen stereometrischen Beweise geführt werden, in denen das Wort vorkommen könnte.

Die Vorliebe des Übersetzers für die Wörter sermo (Buch, Abhandlung), forma (Figur, Fall), dispositio (Darstellung), cadere supra (schneiden, durchgehen), signare (anmerken, bezeichnen), declarare (beweisen), imaginari (sich denken) und nota (Punkt, Schnittpunkt) finden wir in sicheren Gerhard v. Cremona-Übersetzungen wieder. Dasselbe gilt für die holperige, schwerfällige, aber wortgetreue Art und Weise die ara-

---

1) Vgl. Bibl. Math. 6_3, S. 242 ff. Zu den hier angeführten Hss. von Gerhard v. Cremonas Euklidübersetzung ist hinzuzufügen der Cod. Ambros. D. 186. inf. 1r—107v, eine süditalienische Hs. mit ähnlicher Schrift wie Cod. Paris. 9335 (P) und aus derselben Zeit (Anfang des 14. Jahrh.).

2) In den von Manitius in seiner Geminus-Ausgabe zitierten Stellen der lateinischen Übersetzung kommt das Wort nicht vor, dagegen im folgenden dem Cod. Mediceo-Fesul. 168 entnommenen Zitat: „Cum mundus sit spericus, tunc dyameter spere mundi, super quam reuoluitur, nominatur meguar, et duo extremitates meguar nominantur duo poli mundi.“

bischen Wendungen zu übertragen, sowie für die gewissenhafte Übersetzung von Dualis, Futurum und dem äußeren Apparat des Beweises mit den einleitenden Worten exempli causa, verbi gratia und dem Schluß et illud est quod declarare (oder demonstrare) uoluimus.

Daß Alkindîs Optik im Cod. Paris. 9335 (P) steht, ist gewissermaßen ein Zeichen davon, daß hier eine Übersetzung des Gerhard v. Cremona vorliegt; denn diese Handschrift scheint fast ausschließlich aus seinen Übersetzungen zusammengesetzt zu sein, und zwar überall mit textkritischen Marginalnoten der 1. Hand, die offenbar auf den Übersetzer oder einen sehr frühen Bearbeiter zurückgehen. In den jüngeren Abschriften oder in solchen, welche der verschollenen autographierten Übersetzung oder alten Bearbeitung ferner stehen, sind sie nämlich weggelassen oder an verschiedenen Stellen im Texte eingefügt.

Solche textkritische Noten kommen gerade auch im Alkindî-Texte vor. S. 10, 2—3 hat P die Randnote „uel: non uidentur circuli", also eine Variantangabe, die in den übrigen (von P unabhängigen) Handschriften auf verschiedenen Stellen im Texte Aufnahme gefunden hat. S. 12, 2 hat P das oben erwähnte Lehnwort meguar am Rande durch die Worte „id est axe" erklärt; in zwei anderen Hss. findet sich die Erklärung als Interlinearglosse. S. 12, 14 findet sich in P am Rande eine Erklärung des Wortes defert: „id est in qua est." Diese Worte hat C in den Text aufgenommen, in den anderen Hss. sind sie weggelassen. Aller Wahrscheinlichkeit nach waren also diese Notizen ursprünglich Interlinearglossen des Übersetzers oder alten Bearbeiters.

Nach all dem hier Angeführten muß man annehmen, daß man mit vollem Recht die vorliegende anonyme lateinische Alkindî-Übersetzung dem Gerhard v. Cremona vindiziert hat.

Tideus, De speculis.

Der Verfasser dieses Werkes ist sonst nicht bekannt. Der Name des Vaters (Theodoros) deutet auf einen griechischen Autor. Der Geburtsort ist in den drei Handschriften, wo er angegeben wird, verschrieben. Die beste Handschrift (P) hat Regoiu, oder eigentlich R/egoiu, eine fast gleichzeitige, sehr gute Hs. (A) hat Ruegoui, eine bedeutend jüngere und weniger gute Hs. (L) hat Rinogoni. Letztere Form deutet indessen darauf hin, daß in P im Anfang des Wortes eine Verkürzung stattgefunden hat, die durch den Strich nach R angedeutet ist. Reggio (Rhegium, Ῥήγιον), die alte griechische Kolonie auf Sizilien, gäbe wohl die beste Erklärung der Verdrehungen; Rinocolura (Ῥινοκόλουρα) in Ägypten wäre auch eine Möglichkeit, die aber kaum so nahe liegt.

Sowohl über den Verfasser als über den Inhalt von Tideus' Schrift hat man falsche Ansichten gehabt.

Macray, welcher im oben erwähnten Cod. Digbean. 168, fol. 123^{r} u. 130^{v} (vgl. S. 146) Auszüge aus Tideus' Werk fand, notiert eine Bemerkung dazu: „Theudii mathematici, auditoris Platonis, meminit ex Proclo Savilius in Euclidem, pag. 33." Macray hat also den Tideus mit dem Theudius aus Mag-

nesia in dem bei Proclus wiedergegebenen Mathematikerverzeichnis des Eudemus identifizieren wollen. Diese Identifikation muß aber falsch sein, da der Verfasser, wie es aus der Erklärung S. 94 hervorgeht, viel jünger sein muß; hat er doch ganz offenbar die Werke des Ptolemaeus und des Hero usw. benutzt.

Schlimmer ist Leclercs und Steinschneiders Identifikation von Tideus mit Diocles (ca. 200—50 v. Chr.); vgl. Leclerc, Histoire de la médecine Arabe II, S. 413; Steinschneider, Euklid bei den Arabern in Zeitschr. f. Math. u. Ph. 31 (1886), S. 104—105; Hebräische Übersetz. des Mittelalters, S. 514; Zeitschr. d. deutschen morgenländischen Gesellsch. 50, S. 194—95; Europäische Übersetzungen (Sitzungsber. der Wiener-Akademie. Phil. hist. Kl. Bd. 149), S. 17.

Die Veranlassung zu diesem Fehler gaben die von Eutocius in seinem Kommentar zu Archimedes' „Über Kugel und Zylinder" (II) angeführten Auszüge aus Diocles' περὶ πυρίων, d. h. Über Brennspiegel (?). Wenn aber Steinschneider die von Leclerc sehr vorsichtig dahingestellte Identifikation als Tatsache betrachtet hat, so ist die Ursache eine Verwechselung von Tideus' Schrift mit dem kürzlich von Heiberg und Wiedemann herausgegebenen Buch „Über Brennspiegel" von Ibn al Haitam (Bibl Math. 10_3, S 218—31; vgl. oben A, 5; B, 12; D, 39; L, 5; N, 27; P, 14[3]). Diese Verwechslung liegt bereits in der Basler Handschrift F. II. 33 (B) vor, indem der Name „Thides" in einer Seitenüberschrift mit der anonymen lateinischen Übersetzung von Ibn al Haitams Buch verknüpft worden ist (vgl. S. 126). Ebenso wird im Cod. Ampl. Q 387 (14. saec.) im alten Inhaltsverzeichnis vom 15. Jahrh. zu Ibn al Haitam's (dem Archimedes beigelegtem) Werk hinzugefügt: „sed verius pars est de libro Tydei de aspectibus et speculis et habes in 96. librarii collegii huius in quo signavi" Dadurch hat Curtze sich verwirren lassen und — vorsichtigerweise mit einem Fragezeigen — angenommen, Tideus habe zwei kleine Schriften verfaßt, die beide in der Basler-Hs. vorliegen sollten, nämlich der hier vorliegende Text und Ibn al Haitams „De speculis comburentibus"; vgl. Zeitschr. f. Math. u. Phys. 19, S. 95—96; 28, S. 14; Ausgabe des Liber trium fratrum, S. 111 (vgl. oben S. 131).

Ohne den Inhalt der betreffenden Werke zu kennen, hat Steinschneider dann „nach äußeren Kriterien" festgestellt, daß Ibn al Haitams Buch über Brennspiegel mit Tideus' Traktat über die Spiegel sowie mit Diocles' (von Eutocius exzerpierten) Schrift περὶ πυρίων identisch sei, ein gutes Beispiel dafür, wie gefährlich es ist, nach Titeln und Überschriften in den Handschriften allein zu schließen. Es ist indessen sehr selten, daß Steinschneider derartige Fehler unterliefen; in der Regel hat er sie scharfsinnig entdeckt und selbst korrigiert.

Tideus scheint also ein sonst unbekannter Autor zu sein, wahrscheinlich ein Spätgrieche (Byzantiner), und wir kennen nur ein Werk von seiner Hand, nämlich den hier herausgegebenen sermo de speculis.

Daß Tideus' Büchlein nicht etwa eine lateinische Schrift aus dem Mittelalter ist, sondern eine Übersetzung aus dem Arabischen, geht aus dem

Verzeichnisse über Gerhard v. Cremonas Übersetzungen hervor. Da steht nämlich direkt vor dem „Liber Alchindi de aspectibus tractatus I" (vgl. oben S. 148) ein „Liber Tidei (oder Thidei)[1]) de speculo tractatus I"; vgl. Boncompagni, Gherhardo Cremonese S. 5; Wüstenfeld, l. c. S. 62. Während aber mehrere lateinische Übersetzungen von Werken des Alkindî vorliegen, kennen wir von Tideus' Spiegellehre nur diese eine Übersetzung und, wie gesagt, kein anderes Werk von seiner Hand. Obwohl also Gerhard v. Cremona in keiner uns bekannten Handschrift als Übersetzer genannt wird, müssen wir annehmen, daß er vor 1187 (seinem Todesjahre) das Buch des Tideus übersetzte. Damit stimmt überein, daß Roger Baco, wie oben S. 94 dargelegt wird, das Werk zitiert, und daß es auch im Cod. Digbean. 168 (gleichfalls im 13. Jahrh.) exzerpiert wird (s. oben S. 148).

Schon im Titel spürt man übrigens die Übersetzung aus dem Arabischen und noch mehr im Texte mit den vielen aus dem Arabischen herkommenden sprachlichen Schwerfälligkeiten. Von sicheren terminologischen Gerhard-Kriterien können wir allerdings kein einziges anführen, da das Werk keine mathematischen Beweisführungen enthält. Ebensowenig begegnen uns in dieser Übersetzung Lehnwörter. Sprachliche Eigentümlichkeiten, die uns von anderen Gerhard-Übersetzungen bekannt sind, gibt es aber genug.

Wie in Alkindîs Optik werden mit Vorliebe die Wörter sermo, forma, dispositio und cadere supra (oder super) benutzt (vgl. 73, 19; 74, 2; 75, 26; 76, 12; 77, 9; 79, 1, 2, 21; 81, 12). Wörter wie diuersificare, exemplificare, ratiocinare und Wendungen wie res non est, sicut; et illud est, quoniam; et haec est res, quae; et propter illud fit, quod; et illud est, quoniam; ergo tunc; similiter iterum; et ex hoc modo fit, gehören auch ganz der wortgetreuen Übersetzungsweise des Gerhard v. Cremona zu (vgl. S. 73, 18; 74, 1; 75, 10, 17, 27, 33; 76, 11; 77, 15, 18, 26; 78, 20, 29; 79, 26; 80, 11, 23—26). Eine zukünftige Untersuchung der mittelalterlichen Übersetzer-Terminologie wird hoffentlich die hier gegebenen, noch recht unsicheren terminologischen und sprachlichen Kriterien klären.

Abgesehen von den Exzerpten im Cod. Digbean. 168 kennen wir keine Tideus-Handschrift, die älter wäre als aus dem Anfang des 14. Jahrh. Wie bei Alkindîs Optik ist deshalb Cod. Paris. 9335 (P) wohl die älteste Quelle, aber auch die beste. Ebenso begegnen uns, wie bei Alkindîs Optik, in P textkritische Randnoten des Übersetzers oder des alten Bearbeiters, die andere Hss. weggelassen oder in den Text aufgenommen haben.

S. 73, 10 erklärt P am Rande das Wort „lapillorum" durch die Notiz „id est qui refugit ab aceto sicut quidam dicunt". Diese Worte lassen drei andere Hss. weg, eine aber umschreibt sie und fügt sie in den Text hinein. S. 76, 15 gibt P die Variante „uel quies" an, welche die anderen (von P unabhängigen) Hss. an verschiedenen Stellen in den Text einfügen. S. 77, 27 gibt P die Variante „uel relucet", die eine andere Hs. vorausnimmt, eine dritte wegläßt, eine vierte in den Text aufnimmt. S. 78, 1 hat P die Variantangabe „uel mensura". Dieselben Worte hat eine andere Hs. im Texte; in den übrigen sind sie weggelassen.

1) Cod. Paris. 14390 hat Thidei, die anderen genannten Hss. haben Tidei. Cod. Ampl. F 266a, fol. 126v (13. Jahrh.) hat „Liber Tidei de speculo tractatus".



S. 78, 25 hat P die Erklärung des Wortes eius: „id est formae". Eine andere Hs. schreibt im Texte „eius formae", zwei andere lassen die Erklärung weg, eine fünfte sowohl diese als das Wort eius. S. 79, 13 fügt P zum Worte „mora" die Variante „uel statione"; zwei andere Hss. lassen sie weg, zwei andere geben sie vor oder nach dem Worte mora im Texte. S. 79, 28 fügt P die Erklärung oder die Variante „uel facit, ut illud sit necessarium" zum Worte „cogit". Die anderen 4 Hss. fügen diese Worte an verschiedenen zum Teil verkehrten Stellen in den Text ein; zwei von diesen Hss. korrigieren jedoch „uel" in „et", um dem Texte besseren Sinn zu verleihen. Am Schluß des Textes (S. 82, 8) gibt P am Rande zu den Schlußworten „pinealis oculi" die Erklärung „id est piramidis, quae est ut pinea procedens ab oculo." Drei andere Hss. fügen sie zum Texte, eine aber läßt sie hinweg.

Nach dem Angeführten darf man behaupten, daß die vorliegende anonyme lateinische Tideus-Übersetzung dem Gerhard v. Cremona gehört.

Über die Person des Verfassers wissen wir nur, was wir aus seiner Arbeit schließen dürfen. Die Grenzen, zwischen die seine Lebenszeit fällt, sind jedoch sehr weit. Als sichere untere Grenze gilt eigentlich nur das Todesjahr des Übersetzers (1187). Da wir aus den arabischen Wendungen derselben ersehen können, daß das ursprünglich wohl griechisch abgefaßte Werk zuerst ins Arabische übersetzt worden ist und dann erst ins Lateinische, so müssen wir zunächst annehmen, daß das Werk bedeutend über das 12. Jahrhundert zurückgeht. Bei der kritischen Untersuchung des Inhalts hat Vogl (vgl S. 94) nachweisen können, daß die Alten, aus denen der Autor geschöpft zu haben sagt, Ptolemaeus, Hero, Galen, Euklid und der sog. Damianus sein müssen, so daß wir dadurch eine obere Grenze erhalten. Da zwischen „den Alten" und dem Autor eine gewisse Spanne von Zeit verlaufen ist, so muß Tideus zwischen dem 4. und 11. Jahrh. gelebt haben. Er wird als Arzt bezeichnet, und Vogl macht darauf aufmerksam, daß ein Beispiel aus der Augenheilkunde, das den Schluß der Arbeit bildet, dasselbe bezeugt. Vogl fügt hinzu, daß er vermutlich der oströmischen-byzantinischen Epoche angehört, aus welcher Zeit mehrere Schriften von Augenärzten, die zumeist auf Galen fußen, genannt werden; vgl. Hirschberg, Gesch. d. Augenheilkunde, S. 351 ff. Daraus, daß mehrere Stellen in Tideus' Büchlein und Alkindîs Optik gemeinsam sind (vgl. S. 94), läßt sich nichts Sicheres schließen; denn sie können ja aus derselben Quelle geschöpft haben.

[Pseudo-]Euclides, De speculis.

Über den Ursprung dieses Werkes sind wir sehr schlecht unterrichtet. Wir kennen weder griechische noch arabische Handschriften, in denen das Werk enthalten ist, sondern nur die genannten lateinischen und außer diesen noch vier hebräische Handschriften, die leider undatiert sind.



In den hebräischen Handschriften findet sich das Buch stets als Anhang zur Optik Euklids. Nach Steinschneider lautet der Titel ספר חמואיכ (Sefer ha Mar'im, Buch der Spiegel) und als Autor wird Euklid genannt.[1])

Die Münchener Hs. hat Vogl mit dem lateinischen Text vergleichen lassen,[2]) und zwar mit dem Resultat, daß wir alle Sätze unseres lateinischen Textes bis auf den letzteren Nr. 15 im hebräischen Codex finden, teils mit dem lateinischen Text übereinstimmend, teils gekürzt. Die Zeichnungen aber sind in der hebräischen Hs. mehrmals unkorrekt. Numeriert werden daselbst nur 5 Sätze, Nr. 1—3 = 1—3 im lat. Text, Nr. 4 = 8 im lat. Text, Nr. 5 = 5 im lat. Text. Zwischen Nr. 3 und 4 sind ohne eigene Nummer die Nrn. 4 und 7 des lat. Textes eingeschoben, und nach 5 folgen die Nrn. 6, 9, 10, 11 a—b, 12, 13, 14 des lat. Textes. Die häbräische Münchener Hs. gibt also eine zum Teil verdorbene oder gekürzte Redaktion. Da sie aber, wie es scheint, dem 15. oder 16. Jahrh. gehört, so braucht das nicht zu bedeuten, daß der hebräische Text ursprünglich verstümmelt war.

Den hebräischen Text hat Steinschneider — nach äußeren Kriterien — mit der dem Euklid fälschlich beigelegten Katoptrik[3]) identifizieren wollen; denn er sagt, daß der hebräische Text der lateinischen Übersetzung („Visum rectum esse . . .“) dieser Katoptrik entspricht.[4]) In seinem letzten Buche hat er jedoch den Fehler korrigiert und auf Grundlage der Beschreibung des Cod. Paris. 9335 (P)[5]) die hebräische Spiegellehre des Pseudo-Euklid mit dem hier herausgegebenen Text „Praparatio speculi . . .“ richtig identifiziert.[6])

Daß dieser Text, so wie er hier S. 97—106 vorliegt, nicht Euklid gehört, hat Vogl (vgl. S. 118) aus dem Inhalt nachgewiesen; denn das Buch ist offenbar eine Kompilation von Sätzen älterer Autoren, und zwar aus der Katoptrik des Hero, der Optik des Euklid und der obenerwähnten zweifelhaften Katoptrik des Euklid („Visum rectum esse . . .“). Dagegen ist es nicht ausgeschlossen, daß die verschollene Katoptrik des Euklid direkt oder indirekt eine Hauptquelle gewesen ist.

Fragen wir nun nach der Zeit, dem Namen und der Nationalität des Autors, so sind wir auf den lateinischen Text angewiesen. Hierbei gestatten uns die sprachlichen Eigentümlichkeiten einen Schluß auf die Sprache, in der der Text ursprünglich geschrieben sein mochte. Aus der Verwertung

---

1) Steinschneider in Zeitschr. f. Math. u. Phys. X (1865) S. 472, und in Monatsschr. f. Gesch. u. Wissensch. des Judent. 37 (1893), S. 520. Die Hss. sind Cod. Monac. hebr. 36, Cod. Mant. hebr. 3, Cod. Paris. hebr. 1021, u. Cod. Vat. hebr. 400; vgl. Steinschneider, Die hebr. Hss. d. Münchner Staatsbibl., Nr. 36; Die hebr. Übersetz. des Mittelalters, S. 511—12.

2) Festschrift, Moritz Cantor gewidmet, Leipzig 1909, S. 128.

3) Vgl. J. L. Heiberg, Litterargeschichtliche Studien über Euklid, Leipzig 1882, S. 148 ff. Euclidis Opera omnia VII, proleg. XLIX ff.

4) Vgl. die oben zitierten Stellen, sowie Zeitschr. d. deutsch. morgenl. Ges. 50, S. 171 (d. h. die arab. Übers. aus dem Griech. § 92). Vgl. oben A. 7.

5) Bibl. Math. 3_3 (1902), S. 70.

6) Steinschneider, Europäische Übersetz. II, S. 17.

der Schrift bei anderen Autoren und aus dem Alter der Handschriften selbst erhalten wir einen Terminus, ante quem das Werk verfaßt sein muß.

Von den 12 bisher bekannt gewordenen Handschriften dürfte die älteste der Cod. Digbean. 40 (Q) in Oxford sein; etwas jünger (datiert 1279) ist die Abschrift (s. unten) desselben im Cod. Cantabr. Ii. 1. 13 (E) in Cambridge. Nicht viel jünger ist der Cod. Dresd. Db. 86 (D), der vielleicht noch dem 13. Jahrh. angehört, und dann folgt zeitlich die Pariser Handschrift (P). Schon im 13. Jahrh. scheint also der Text allgemein verbreitet gewesen zu sein. Dies stimmt durchweg mit den von Vogl nachgewiesenen häufigen Zitaten bei Roger Baco, Albertus Magnus, Vincenz von Beauvais und Witelo (S. 119). Baco schickte seine Werke, in denen Zitate aus der Pseudo-Euklidischen Schrift 'De speculis' vorkommen, im Jahre 1267 an den Papst. Darin findet sich auch schon ein Urteil über die naturwissenschaftliche Bedeutung Alberts, das eine Kenntnis seiner Schriften voraussetzt, die wiederum auf unsere Pseudo-Euklidische Schrift verweisen, wenn wir nicht annehmen wollen, daß Baco den Albertus persönlich von seinem Pariser Aufenthalt her kannte. Wie dem auch sein mag, vor 1240 kann Albertus seine physikalischen Schriften kaum verfaßt haben, da er in der Isagoge in meteor. c. 30. einen Kometen aus dem Jahre 1240 bespricht; und nach 1250 können sie auch nicht entstanden sein, da sie von Vincenz von Beauvais in seinem ca. 1250—1253 beendeten „speculum naturale" zitiert werden, in demselben Werke, in dem auch Pseudo-Euklids 'De speculis' direkt benützt wurde. Um 1240—50 also wurde diese Arbeit von den Gelehrten Europas allgemein studiert. Da das Werk, wie wir sehen werden, eine Übersetzung aus dem Arabischen ist, so gehört es aller Wahrscheinlichkeit nach der Übersetzungsliteratur des 12. Jahrhunderts an, und da es in der Pariser Hs. (P) steht, stammt es zunächst von Gerhard v. Cremona oder seiner Schule (vgl. S. 150).

In dieser Pariser Hs. hat ein Benutzer den (falschen) Autornamen „Euclidis" in „Ptolomei" korrigiert [vgl. Bibl. Math. 3_3 (1902), S. 66 u. 70]. Dieser Leser ist kaum der Physiker Johannes Fontana, der Venetianer, der im 15. Jahrh. eine Arbeit über Hohlspiegel schrieb und die Pariser Hs. mit zahlreichen Randnoten versah. Eher ist er der französische Astronom Ismael Bouillaud (1605—94), der sie später erwarb (vgl. AGMW XIV, S. 137). Diese Korrektur war geeignet, Konfusion zu erregen, um so mehr, als schon im Jahre 1518 ein anderer Text mit dem Titel „liber Ptolomei de Speculis" zum Druck befördert war[1]), den man als einen Teil von Ptolemaeus' Optik betrachtete. Da Martin indessen bewies, daß Ptolemaeus' Optik in der lateinischen Übersetzung des Eugenius Siculus vorhanden ist[2]), so ergab sich von selbst, daß Ptolomei de speculis kaum dem Ptolemaeus gehören konnte, und es gelang der Beweis, daß diese Schrift nichts anderes

1) Sphera cum commentis, Venetiis 1518, fol. 250v—252v. Sphera mundi, Venetiis 1518, fol. 250v—252v. Vgl. Boncompagni, Platone Tiburtino, S. 14 und 21—22.

2) Vgl. oben A, 8; B, 36; K, 11; R, 1; S, 1; T, 1; V, 1; Y, 1. S. Martin in Bullettino Boncompagni IV, S. 466—69.

sei als die in der Ursprache verlorene Katoptrik des Hero von Alexandria.[1]) Als Ptolemaeus' Optik 1885 durch Govi herausgegeben wurde, zeigte es sich auch klar, daß unsere Pseudo-Euklidische Schrift, die der spätere Benutzer der Pariser Hs. dem Ptolemaeus zuerkannt hatte, von dessen Optik ganz und gar verschieden sei; und so gelangte man zu der richtigen Auffassung, daß unsere Schrift von einem unbekannten Autor stamme und weder mit Euklids Katoptrik noch mit Ptolemaeus' Optik etwas zu tun habe.

Ungelöst aber bleibt die Frage, woher die Schrift stammt.

Daß sie eine Übersetzung aus dem Arabischen ist, zeigt die Sprache sowie die Figurenbuchstaben. Die Dualisformen, die Futura sowie der Satzapparat („Verbi gratia", „Causa exempli", „Et illud est quod demonstrare uoluimus") bezeugen, daß das Werk zur Übersetzungsliteratur gehört. Ausdrücke wie „cadere supra" und „secare in duo media"[2]), bestätigen dasselbe (vgl. S. 147), und so auch die Anordnung der Figurenbuchstaben. Ein sicheres Kriterium für die Übersetzung aus dem Arabischen ist nämlich die Reihenfolge abgde**u**zhtiklm statt abgdezhtiklm, wo **u** ja nicht zum griechischen Alphabet gehört, und dieses **u** kommt in unserer Abhandlung in den Sätzen 8, 11 und 12 vor. Die Anwendung von **u** bildet dagegen keinen Beweis dafür, daß die Arbeit ursprünglich arabisch ist[3]); denn auch in griechischen Werken, die von arabischen Verfassern kommentiert oder einfach übersetzt sind, kommt dieses **u** vor, so z. B. in Euklids Optik; vgl. oben A, 6; M, 1; P, 15.[4])

Dennoch braucht dieses Kriterium nicht ganz zu versagen, wenn es gilt zu entscheiden, ob Pseudo-Euklids 'De speculis' zunächst von einem Griechen oder einem Araber verfaßt sei; denn bei einer derartigen Kompilation pflegen die Autoren ihre Quellen oft recht unkritisch abzuschreiben; und wenn dann in einem solchen Text einige Beweise die griechische Anordnung der Figurenbuchstaben, andere aber die arabische haben, so ist anzunehmen, daß die Verfasser einige Sätze griechischen Werken, die anderen arabischen Arbeiten entnommen haben.

Gerade auf diese Weise verhält es sich aber auch mit dem vorliegenden Text. Satz 1 hat die unveränderte griechische Buchstabenreihe abgdezhti ($\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\vartheta\iota$) und stimmt wirklich auch mit Heros Katoptrik, Satz 18. Satz 2 hat die griechischen Buchstaben in unrichtiger Reihenfolge (abgdzteiklmnh statt abgdezhtiklmn) und ähnelt Heros Katoptrik Satz 12 derart, daß man annehmen darf, die Quelle sei griechisch. Satz 5 (das Brechungstheorem) hat die Reihe abegdzsm, wo **s** und **m** innere Marken für schon im voraus zureichend markierte Winkel sind; dies deutet darauf, daß hier eine arabische Bearbeitung eines ursprünglich

---

1) Val. Rose, Anecdota graeco-latina I, S. 315 ff. u. II, S. 291 ff., und Heronis Opera, ed. Nix u. Schmidt, II, 1, S. 303 ff.

2) Vgl. S. 97, 16—17; 98, 5, 17—18, 29; 102, 27; 103, 6; 105, 30, 33.

3) S. auch Euclidis Opera VII, ed. Heiberg, S. XL. Bibl. math. 3_3 (1902), S. 71.

4) Umgekehrt aber, wenn eine Übersetzung aus dem Arabischen durchweg die griechische Anordnung der Figurenbuchstaben hat, darf man schließen, daß das Werk ursprünglich griechisch war.

griechischen Satzes vorliegt, und dies stimmt ja damit, daß das Brechungstheorem und die dazu gehörige Figur den Griechen bekannt waren.[1]) Im 6. Satz wird die griechische Buchstabenreihe a b g d e durch ein q und in den Sätzen 8, 11 und 12 durch ein u abgebrochen. Die beiden ersten dieser Sätze sind nun gerade solche, für welche keine griechische Quelle nachgewiesen werden kann, die aber an andere arabische Werke (namentlich an Alkindîs Optik) erinnern (vgl. oben S. 111—114). In den Sätzen 13 und 14 sowie in 9—10 wird die Ordnung der Buchstaben nicht eingehalten, weil die Beweise wohl teilweise verdorben sind. Ein u mitten in der Reihe spricht aber auch hier für den arabischen Ursprung, und dasselbe geschieht wohl in den ähnlichen Sätzen bei Ibn al Haitam (vgl. S. 115—118).

Nach den Figurbuchstaben zu urteilen, dürfte also Pseudo-Euklids 'De speculis' eine arabische Kompilation arabischer und griechischer Quellenschriften sein.

Den lateinischen Übersetzer festzustellen ist nicht möglich. Die Schrift ist in allen bekannten Hss. unsigniert, und in den Verzeichnissen über Gerhard v. Cremonas Übersetzungen kommt ein „Euclidis de speculis" nicht vor. Wir wissen indessen aus der Lebensbeschreibung Gerhards, daß er Nachahmer (Schüler) gehabt hat. So müssen wir denn Gerhard selbst oder einem seiner Schüler zunächst die Übersetzung beilegen.

Durchaus sichere Gerhard-Kriterien findet man allerdings in der Übersetzung nicht. Das Sicherste dürfte wohl die Bezeichnung diuidere, secare oder partiri in duo media für halbieren sein (98, 5, 17—18, 29); es kommt indessen auch für halbieren ein anderer Ausdruck vor, nämlich duas lineas supra earum media secare (103, 26—27). Wörter wie forma für „Bild" oder „Figur", nota für „Punkt", signare für „abtragen", imaginari für „sich denken", cadere supra für „schneiden", dispositio für „Darstellung", die zu Gerhards Wörterbuch gehören (vgl. oben S. 149 und 152), kommen auch vor in Pseudo-Euklids de speculis (97, 25—26; 98, 1, 34; 100, 20; 102, 18; 103, 6, 25—28, 34—35; 105, 6—7, 26, 33), desgleichen Wörter wie gibbositas, pinea (Kegel), pinealis (kegelförmig), inconueniens (unzutreffend) (99, 10; 101, 10, 19; 102, 10; 104, 20; 105, 30, 33), die uns von den beiden vorhergehenden Übersetzungen geläufig sind. Die Futura, die Dualisformen, sowie der Beweisapparat erinnern, wie gesagt, ganz an Gerhard und ebenso die Vorliebe für die Präpositionen secundum und supra.

Von Variantangaben in Randnoten finden wir in der Pariser Hs. nur eine einzige, nämlich S. 101, 18 die Erklärung des Wortes umbra: „id est terrae"; eine andere Hs. hat die Erklärung in den Text eingefügt, die anderen lassen sie weg. Dagegen findet sich in P ein Doppeltitel des Satzes 4, nämlich zuerst der deutliche Titel „De exitu radiorum et conuersione eorum" und direkt darauf der weniger deutliche: „In egressione radii a uisu et conuersione eius ad oculum." Die Titel sagen dasselbe

1) Vgl. Ptolemaeus' Optik, ed. Govi, Buch 2; Euclidis opera omnia VII, S. 299, 309, 313 u. 317.

und obwohl sie in P nebeneinander stehen, ist der eine offenbar nur eine Erklärung oder Variante des anderen. Daß der letzte, holperige Titel der ursprüngliche ist, bezeugen die beiden ältesten Hss. (Q und E), die nur diesen Titel haben, während zwei jüngere Hss. wie P die Titel nebeneinanderstellen, die eine jedoch in umgekehrter Anordnung (vgl. S. 99, 22).

Nach dem hier Gesagten ist die Stellung von Pseudo-Euklids De speculis als Gerhard-Übersetzung, obwohl die Schrift in der berühmten Pariser Hs. steht, lange nicht so sicher als die der zwei vorhergehenden Werken. Zu Gerhards Übersetzerschule gehört die Übersetzung offenbar; daß sie aber ihm selbst gehört, bleibt sehr zweifelhaft.

TEXTKRITISCHE ERÖRTERUNGEN

Alkindi, De aspectibus

Da die Pariser-Hs. P nach den obigen textgeschichtlichen Aufschlüssen die einzige Handschrift ist, die eine direkte Abschrift der originalen lateinischen Übersetzung sein könnte, und jedenfalls direkt auf die Redaktion des Textes zurückgeht, auf der die uns bekannten Handschriften ruhen, so wurde sie der vorliegenden Ausgabe zugrunde gelegt, während die Lesearten der anderen Handschriften nur in solchen Fällen benutzt wurden, in denen P leicht erklärliche Schreibfehler oder zweideutige Abkürzungen darbietet. Auch wo eine Reihe anderer Hss. gegen P eine offenbar richtige Leseart hat, sind wir von P abgewichen.

Keine der übrigen Hss. darf als Abschrift von P angesehen werden. Ihr am nächsten liegen wohl die beiden Milaneser Hss. A und M, von denen A eine alte italienische und sehr gute, M hingegen eine jüngere und durchgehends schlechte Abschrift ist. A wurde deshalb ganz, von M nur der Anfang des Textes (Satz 1—5) und der Schluß (Satz 14) verglichen.

A ist auch deshalb eine wertvolle Quelle, weil sie außer unseren 3 Werken auch noch die Optik des Ptolemaeus enthält, die der Ausgabe von Govi zugrunde liegt.[1]) Wenn demnach P und A übereinstimmen, so verwerfen wir nur ausnahmsweise (s. S. 4, 25; 27, 27) ihre gemeinschaftliche Leseart, auch wenn alle übrigen Hss. abweichen und eine andere brauchbare Leseart darbieten.

Außerdem ist aber A noch dadurch von Interesse, daß sie die Stammhs. für eine Klasse jüngerer Hss. ist, die ein lückenhaftes und verdorbenes Fragment (S. 7, 2—37, 16) des Alkindî-Textes enthalten, nämlich die Pariserhs. R, die Vatikanhs. V und die des römischen Jesuitenkollegiums T. Von diesen Hss. ist T, wie aus der Handschriftenbeschreibung S. 141—144 hervorgeht, eine teilweise unvollständige Abschrift von V, weshalb wir sie nur eingesehen haben.

Um aber ein Bild zu geben, wie sehr diese Klasse von Hss. des 16.—17. Jahrhunderts[2]) verderbt ist, haben wir ein Stück ihres Textanfanges kollationiert und im Apparat dessen Varianten mit aufgenommen (S. 7—10).[3])

1) Govis Ausgabe ist gar nicht zuverlässig. Prof. Fr. Boll hat sie mit der Hs. verglichen und zahlreiche Fehler nachgewiesen. Ein Vergleich der Kollation Bolls mit den übrigen alten Hss. ergab, daß A die beste Hs. ist.

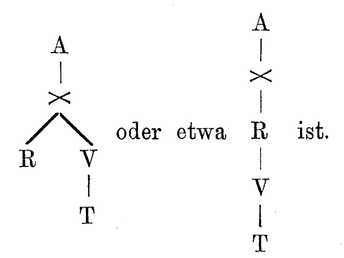
2) Dieselben Hss. enthalten einen gleichfalls verdorbenen und lückenhaften Text von Ptolemaeus' Optik.

3) S. 8, 27—29 fehlen die Variantangaben für R, da wir von Satz 6 an nur die Hauptvarianten notiert haben.

Wie es aus diesen Varianten ersichtlich ist, stimmen V und R fast überall überein und wiederholen alle die Abweichungen, die für A charakteristisch sind. Wie A schreiben sie „contineatur“ für „continetur“ (7, 9), „diuidit“ für „diuidet“ (7, 15), „manere“ für „in aere“ (7, 24), dneg für duge (8, 8), „hoc ut“ für „ut“ (9, 12), „Quamplures“ für „Plures“ (10, 4). Die deutlichsten Abhängigkeitskriterien sind jedoch erstens die Worte „demonstrare uoluimus“ (7, 22), die A in „d. v.“ verkürzt, während R und V dies „d. v.“ als „dicere v.“ verstehen und abschreiben, zweitens die S. 150 erwähnte alte Variantangabe „uel: non uidentur circuli“, die A fälschlich vor die andere Leseart „non ingreditur circulos“ einfügt, was auch V und R tun (10, 2—3).

Daß V und R von A herstammen, ist also sicher; sehr fraglich ist es aber, ob sie direkt nach A abgeschrieben sind. A ist ja eine vollständige Abschrift, und wenn sie auch viele Abkürzungen enthält, die — was Govis Ausgabe von Ptolemaeus' Optik bezeugt — recht leicht Fehler hervorrufen können, so erklärt die Schwierigkeit, A richtig zu lesen, keineswegs die vielen Lücken in V und R (7, 30; 9, 10, 22, 23; 10, 24). Da V und R außerdem dieselben Lücken haben und dennoch vielleicht gegenseitig unabhängig sind, so müssen wir zunächst annehmen, daß zwischen A einerseits, R und V anderseits eine unvollständige und schwerleserliche Abschrift liegt, die uns unbekannt geblieben ist. Wenn schließlich sowohl R als V das Fragment des Alkindî-Textes mit den Worten „Desideratur principium“ und „Desideratur finis“ versieht, so muß man auch annehmen, daß die Vorlage für V und R im Gegensatz zu A defekt gewesen ist.

Was die gegenseitige Stellung von V und R betrifft, so zeigt der fast ganz übereinstimmende Inhalt, daß die beiden Handschriften entweder eine gemeinsame Vorlage gehabt haben, oder daß die eine die Abschrift der andern ist. Im letzteren Falle könnte R zunächst eine Abschrift von V sein, da V einen Text mehr als R enthält (Philos Pneumatik). Indes deutet die Variante S. 9, 7 bestimmt darauf hin, daß R nicht nach V abgeschrieben ist. R hat nämlich die fast richtige Leseart „candelae, quae est b, quae est contrario partis u“, während V nur „candelae, quae est contrario partis u“ schreibt. Es scheint ausgeschlossen, daß der Schreiber von R diese verkürzte Leseart richtig ergänzt haben sollte. Dagegen könnte V eine Abschrift von R sein, obwohl V, wie gesagt, die vollständigere der beiden Hss. ist. Es ist also unsicher, ob der Zusammenhang



Nächst A dürften K und O die besten Abschriften sein. Von diesen scheint K die ältere zu sein, während O eine weniger fehlerhafte Abschrift derselben Klasse von Handschriften darstellt. K hat nämlich viele Abschreibefehler, mitunter aber eine richtige, nur mit O gemeinschaftliche Leseart, wie z. B. 4, 25 „faciunt umbras eis aequales" für „faciunt umbras eis aequalia."

Daß K auch eine sehr gute Vorlage gehabt hat, erhellt daraus, daß sie die ursprüngliche Interlinearglosse S. 10, 2—3 in den Text richtig eingefügt hat, während A sie, wie oben gesagt, an falscher Stelle einfügt und C umschreibt. Mitunter haben K und O die richtige Leseart mit P gemeinsam, während sowohl A wie die beiden Hss. B und C abweichen, so z. B. S. 13, 17 „defertur"; mitunter haben sie die richtige Leseart mit A gemeinsam, so z. B. 15, 15 „quae" für „ex quae" (P); mitunter hat K die richtige Leseart mit A und C gemeinsam, so z B. 35, 5 „sensu", 35, 16 „tunc etiam a". Die vielen Fehler und Ungenauigkeiten in K stammen offenbar daher, daß der Schreiber seine Vorlage nur mit Schwierigkeit lesen konnte; schreibt er doch manchmal ganz sinnlose Wörter, die nur auf diese Weise zu erklären sind, z. B. „taneris" für „itineris" (26, 1), „canoma" für „concaua" (31, 11). Auch viele Lücken finden sich in K. Selbst unter diesen Umständen bleibt aber K noch eine Quelle von bedeutendem Wert, weshalb wir sie ganz kollationierten.

Auch in der Beziehung ist K von Bedeutung, daß sie die Vorlage für S, das ist die dem berühmten Henry Savile von Johann Praetorius geschenkte Oxforder-Hs., ist. Wir haben deshalb von S nur den Textanfang (Satz 1—2) und Textschluß (S. 40, 29—41, 4) kollationiert. S's Abhängigkeit von K ist aus den darin vorkommenden Varianten leicht ersichtlich. Gleich im Titel wiederholt S z. B. den Fehler „Alkit" für „Alkindi" und folgt nun K ganz genau, wie die Varianten S. 3, 7, 11, 12; 4, 14—15, 25; 5, 18, 23, 25, 26, 27 zeigen. Besonders entscheidend für S's Abhängigkeit von K sind jedoch die beiden Textlücken S. 4, 14—15 und S. 40, 30—41, 1 in K, die S wiederholt, ferner das Wort „pinealis" S. 5, 15, das K nicht verstanden und als „p^{i}mealis" wiedergegeben hat, während S das sinnlose Wort sehr verständig zu „piramidalis" korrigiert, endlich die Stellen, wo K S. 5, 21 und 28 falsche Figurbuchstaben hat, die S wiederholt, nur mit Verwechslung von *n* und *u*, was eben bei einer Abschrift nach K leicht erklärlich ist; K ist nämlich mit feiner Perlschrift geschrieben, und die *n*, *m*, *u*, *i* sind schwer zu unterscheiden. Diese Auffassung von K, die wir also durch deren Abschrift von Alkindis Werk gewinnen, stimmt ganz mit derjenigen überein, die wir durch einen Vergleich ihrer Abschrift von Al-Narizis Euklidkommentar mit der Abschrift im Cod. Reg. 1268 erhalten haben. Auch da zeigt es sich, daß K eine ungenaue Abschrift einer sehr guten Vorlage ist.

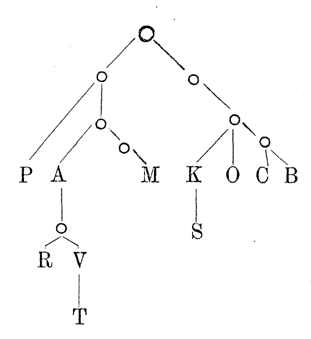
Die Oxforder-Hs. O ist eine viel bessere Abschrift derselben Klasse von Hss.; als Quelle verliert sie aber einen sehr großen Teil ihres Wertes dadurch, daß sie nicht komplett ist (vgl. S. 138); plötzlich mitten in einem Satz (S. 28, 18 der Ausgabe) schließt die Abschrift. So weit sie reicht, ist sie indessen kollationiert worden. Eine Lücke (S. 6, 2—3), die sie mit

keiner anderen Hs. gemeinsam hat, beweist, daß sie nicht Vorlage für den im 16. Jahrh. hinzugefügten Anfang der anderen Oxforder-Hs. (C) ist; denn dieses Supplement schließt gerade mit den in O ausgefallenen Worten „sicut figura *gde*. Et illud est, quod demonstrare uoluimus". Für die anderen vollständigen Abschriften kann die am Schluß defekte O selbstverständlich nicht die Vorlage gewesen sein. Abgesehen von dieser Lücke weicht O sehr selten von P ab, überspringt aber oft ein Wort (S. 8, 18—19; 9, 17; 12, 1, 25; 13, 23; 14, 2, 9, 26; 15, 5; 16, 13; 17, 17, 20, 27—28; 18, 20; 19, 29; 20, 3; 21, 31; 22, 6, 32; 23, 1; 24, 16—19, 30; 25, 17, 22, 29; 26, 8, 13, 22; 28, 1, 13). Was nicht übersprungen wird, ist meistens richtig abgeschrieben. Sowohl Lücken als Variante hat O mehrmals mit B und namentlich mit K und C gemeinsam (13, 6; 14, 2, 9; 15, 5, 8; 16, 13, 14, 15; 19, 29; 22, 6, 32; 23, 7; 24, 16—19; 25, 1, 31; 27, 20, 32), so daß diese 4 Hss. (O, K, B, C) eine Klasse für sich zu bilden scheinen. An einer Stelle korrigiert O einen falschen Buchstaben, der auf die Figur hinweist (22, 17). Aber auch K hat einmal eine auf Korrektur beruhende Leseart, wo im Texte ursprünglich eine falsche Hinweisung auf die Figur stand (28, 29).

Neben P, A, K und O sind die Oxforder-Hs. C und die bekannte Baseler-Hs. B von geringerem Wert, C weil sie wie K eine ungenaue Abschrift und wie O unvollständig ist (der Anfang fehlte und ist später hinzugefügt), B weil der Abschreiber den Text wissentlich korrigiert hat, beide, weil sie eine, wie es scheint, gemeinsame schon vielfach verdorbene Vorlage benutzt haben. Da sie beide auf eine uns unbekannte Hs. zurückgehen, so haben wir sie jedoch ganz kollationiert, B um so mehr, weil sie eine vielfach benutzte Hs. ist und zugleich dartut, daß sie nicht geeignet ist, allein einer Ausgabe zugrunde gelegt zu werden (vgl. Bibl. Math. 3_3 [1902], S. 63), jedenfalls nicht, wo Hd. 5 im Spiele war. Wissentliche Änderungen, die jedoch in dieser Hs. meistens Verschlimmerungen sind, bilden die gefährlichste Art von Fehlern, wenn es gilt den ursprünglichen Text herzustellen; denn diese Fehler sind gern schwer zu erkennen, da sie oft keinen Anstoß erregen.

Daß B und C einander sehr nahe stehen, erhellt am deutlichsten daraus, daß sie mitunter ein Stück oder Wort des Textes ganz umschreiben, und zwar auf genau oder ungefähr dieselbe Weise (10, 21—22; 16, 13; 17, 15—16). Man könnte deshalb geneigt sein, anzunehmen, die eine Hs. sei eine Abschrift der anderen, d. h. B von C, wenn nicht C eine Lücke hätte, wo B offenbar den Text kennt und umschreibt (S. 11, 28—29). Übrigens haben B und C neben mehreren gemeinsamen Varianten je für sich eine große Menge von speziellen Varianten und übersprungenen Wörtern, die nur bei gegenseitig unabhängigen Hss. derselben Klasse denkbar sind.

Nach dieser Erörterung müssen wir mit allem Vorbehalt und abgesehen von Zwischengliedern, die immer vorliegen können, für die uns bekannten Hss. folgenden Stammbaum als den einfachsten aufstellen:



Tideus, De speculis.

Was wir oben (S. 159) bei der Besprechung des Alkindi-Textes in bezug auf die Pariser-Hs. P gesagt haben, gilt auch für die Abschrift des Tideus-Textes in dieser Hs. Sie könnte eine direkte Abschrift der originalen Übersetzung sein und geht jedenfalls auf eine Redaktion zurück, von der alle die anderen Hss. abhängig sind. P mußte deshalb auch der Tideus-Ausgabe zugrunde gelegt werden.

Keine der anderen Hss. scheint eine Abschrift von P zu sein. Von A, B und K wäre diese Annahme auch gewagt, da sie alle auch den Alkindi-Text in von P unabhängigen Abschriften enthalten. A scheint wieder P am ähnlichsten zu sein. Gleich im Titel haben sie eine gemeinschaftliche falsche Leseart „ea ex“ für „ex“, und kurz darnach (S. 73, 10) ein übersprungenes Wort, wodurch sie als Hss. derselben Klasse charakterisiert werden. Da A kaum eine Abschrift von P sein kann, so deuten diese Varianten darauf hin, daß P nicht eine direkte Abschrift der originalen Übersetzung ist.

An einer Stelle scheint A allein die richtige Leseart zu haben (75, 26). Mehrmals schreibt P „nullo“ (S. 77, 12, 29), wo A richtig „in illo“ hat. Ein paarmal überspringt P ein Wort, das A mitnimmt (78, 18; 80, 3), was dafür spricht, daß P nicht die Vorlage für A gewesen ist.

Daß die übrigen Hss. A, B, K, L alle gegenseitig unabhängig sind, bezeugen vor allem die übersprungenen Sätze und Wörter, Fehler, die in allen vier Hss. reichlich vorkommen.

A läßt gleich im Anfang (73, 11—12) einen Satz aus, und ebenso später (80, 7—9). Auch die Erklärung der Schlußworte „pinealis oculi“ läßt A als einzige Hs. aus (82, 8).

K macht sich wie beim Alkindi-Texte bemerkt durch Auslassungen von Sätzen (74, 4, 28—33; 75, 32—33; 76, 25, 27; 77, 26—27; 78, 7—8, 18—19, 23—25; 79, 6—7; 80, 28—29; 81, 14, 26—28; 82, 2—3) und Wörtern (73, 15, 18; 74, 14, 15, 16, 18; 75, 5, 18, 21; 76, 7, 9, 15; 77, 1, 6, 8, 15, 22; 78, 1, 7, 18, 19, 30; 79, 4, 5, 15, 19; 80, 2, 3, 4, 6, 8, 15, 17, 24; 81, 18, 20; 82, 6). Daß der Abschreiber auch hier beim Tideus-Texte Schwierigkeiten

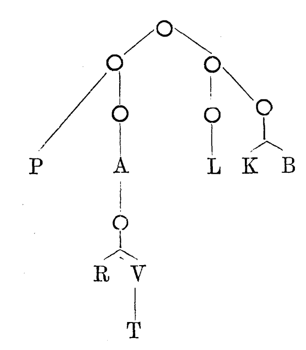
gehabt hat, seine Vorlage zu verstehen, bezeugt namentlich seine Umschreibung des Textes S. 79, 23. Indes scheint K eine gute Vorlage gehabt zu haben. Jedenfalls fügt sie P's Randnoten (die alten Interlinearglossen) im ganzen richtiger in den Text ein als die anderen Hss. (s. S. 79, 13, 28; 82, 8) und hat hier und da eine richtige Leseart, wo P und A abweichen (z. B. 76, 16). Sehr oft stimmt K mit B und L; diese drei Hss. bilden somit eine Klasse für sich gegen P und A. Jedoch liegen K und B einander näher als L, was z. B. daraus erhellt, daß drei von den in K übersprungenen Sätzen (76, 27; 78, 18—19; 81, 26—28) auch in B fehlen. Die Textumstellung (76, 17—19) gilt dagegen speziell für K.

B hat außer den beiden hier erwähnten Sätzen auch zwei andere übersprungen, nämlich S. 74, 1—3 und 76, 5, 18, und viele Wörter (74, 15, 32; 75, 24; 76, 6, 13, 17, 23; 77, 7; 78, 7, 12, 27, 29; 79, 5, 7; 80, 7, 12; 81, 10, 18, 31). Hierzu kommt aber B's Geneigtheit, den Text kritisch zu behandeln, die aber lange nicht so bemerkbar ist wie beim Alkindi-Texte (s. doch 75, 10, 27, 30; 76, 1; 77, 3, 24, 27; 78, 11; 79, 2; 80, 8, 9, 11, 28; 81, 19, 20). An einer Stelle (77, 29) könnte B eine alte in P fehlende Variantangabe haben, indem der Abschreiber im Texte statt „quantitate" die Worte „quantitate uel m̃" schreibt. Aller Wahrscheinlichkeit ist dies jedoch der gleich darauf folgenden Variante „quantitate uel mensura" (78, 1), die mehrere Hss. haben, nachgebildet.

L hat nur selten Sätze übersprungen (78, 14—15), öfter aber Wörter (73, 20; 74, 22, 26; 75, 7, 20; 76, 19; 77, 22; 78, 12; 79, 19; 80, 3, 8, 26, 29, 30; 81, 10, 29). An einer Stelle (S. 76, 16—17) hat der Abschreiber seine Vorlage mißverstanden und deshalb den Text umschrieben. L ist in gewissen Beziehungen eine bessere Quelle als K und B und bedeutet für die kritische Behandlung des Textes mehr als diese beiden Hss. L hat z. B. den Titel des Textes bewahrt, und zwar in einer stellenweise richtigeren Form wie P und A (s. S. 73, 3). Ebenso scheint L Variantangaben bewahrt zu haben, die in den anderen Hss. (auch in P) fehlen. So schreibt L im Texte S. 73, 7 „melius seu uerius" statt „uerius", S. 74, 18 „agens uel agit" statt „agit". Einmal hat L zwei Worte beibehalten, die die anderen Hss. weggelassen haben, weil der Text sinnlos schien; wiederum läßt L hier zwei andere Worte aus, um dem Texte Sinn zu verleihen (80, 25). Wie B scheint L den Text kritisch abgeschrieben zu haben, und man ist mitunter im Zweifel, ob der Abschreiber eine schon verdorbene Vorlage vor sich hatte, ob er diese Vorlage mißverstanden oder sie kritisch korrigiert hat.

Unter diesen Umständen werden wohl die Hss. nach ihrem Quellenwert geordnet die Reihenfolge P, A, L, K, B einnehmen; alle fünf Hss. wurden aber ganz kollationiert. Leider besaß der Herausgeber noch keine Abschrift vom Tideus-Texte, als er die übrigen Hss. (N, R, T, V) in Rom, Paris und Erfurt einsah. Die Erfurter-Hs. hätte eigentlich genauer untersucht werden sollen, da sie recht alt ist. Was die übrigen drei Hss. betrifft, so hegen wir die Erwartung, daß sie sich als Herkömmlinge von A herausstellen werden, wie beim Alkindi-Texte.

Der nach unserer Auffassung einfachste Stammbaum der Hss. — von der Erfurter-Hs. N abgesehen — wird dann der folgende werden:



[Pseudo-]Euclides, De speculis.

Die Pariser-Hs. P ist bei diesem Texte den anderen Hss. lange nicht so überlegen, wie es bei den beiden vorigen Texten der Fall war. Teils sind ältere Hss. vorhanden, nämlich die Oxforder-Hs. Q und die Dresdener-Hs. D, teils enthalten die jüngeren Hss. wie die Milaneser-Hs. A, die Basler-Hs. B und die Nürnberger-Hs. X hier und da Lesearten von Wert, oder sie ergänzen Lücken in P.

Im ganzen aber bilden die einander ganz nahestehenden Hss. P und A auch hier die beste Überlieferung. Es hängt dies sicher mit der Provenienz zusammen. P und A sind süditalienischen Ursprunges, und die aus Süditalien stammenden Hss. des eingehenden 14. Jahrh. scheinen öfters besser zu sein als die anderswoher stammenden Hss. älterer Zeit. In der Hauptsache ist deshalb P und A unserer Ausgabe zugrunde gelegt worden. Jedoch haben wir gebührend Rücksicht genommen auf die beiden älteren Hss. Q und D.

Selten weicht A von P ab. Mitunter ist in A ein Wort übersprungen (99, 2, 5; 100, 4; 102, 15; 103, 1); mitunter hat der Schreiber ein Wort mißverstanden (98, 33 „innouerit“ für ‚mouerit“; 101, 1 „candelae“ für „cannae“; 104, 15 „transionis“ für „transiens“; 105, 28 „paruitatem“ für „peruietate“); manchmal zieht A ein anderes Wort vor (98, 32 „et sint“ für „sintque“; 102, 36 „egreditur“ für „ingreditur“); hier und da werden die Figurenbuchstaben vertauscht (101, 13; 102, 15; 104, 32; 105, 3, 16). Meistens ist also P richtig, wo A einen Fehler hat. An einer Stelle aber hat A richtig „qui“, wo P „quae“ hat (102, 23), an einer anderen „sensu“, wo P fehlerhaft „sensum“ hat (104, 6), ferner „assumam“, wo P „affirmam“ schreibt (104, 13), und an ein paar Stellen hat A ein von P übersprungenes Wort bewahrt (99, 8; 102, 6); in diesen Fällen stimmt A mit den meisten anderen unabhängigen Hss. überein.

Wie beim Alkindi-Texte scheint A die Vorlage für die Vatikan-Hs. V zu sein, die zwei unvollendete Abschriften des Pseudo-Euklid-Textes enthält (vgl. S. 143). Da die beiden Abschriften oft voneinander und ebenso von A abweichen, könnte man annehmen, daß außer A — oder besser gesagt außer der zwischen A und V liegenden Hs. — noch eine andere uns unbekannte Hs. benutzt worden wäre. Bei näherer Untersuchung dieser

Abweichungen kommt man jedoch zunächst zu der Annahme, daß sie auf kritischen Textverbesserungen des Abschreibers beruhen. Solche Verbesserungen sind bald gemeinsam für die beiden Abschriften in V (V_1 fol. 150^r—151^r, V_2 fol. 171^v—174^v), bald verschieden. Als Überschrift haben beide Abschriften „Incipit libellus" (s. S. 97, 1) für „Tractatus" (P) oder „Liber" (A). S. 98, 32 korrigieren sie beide „et sint" in „et sit", was sehr nahe liegt, da von „quantitas una" die Rede ist. S. 98, 33 lesen sie richtig „mouerit unam", wo A die sinnlose Leseart „innouerit una" gibt. S. 98, 25 korrigiert V_1 „sint" in „sit", weil von einer Linie *men* die Rede ist. S. 99, 4 schreibt V_1 „ex eo" für „ipsum", weil die Übersetzung „faciemus ipsum (d. h. arcum) regulam" nicht gefällt. S. 99, 5, wo der Ausdruck wiederholt wird, korrigiert V_1 zu „faciemus ipsam regulam", V_2 zu „faciemus eum regulam". Das Wort „limemus" (99, 9) scheint der Abschreiber nicht verstanden zu haben, denn in V_1 steht „lineabimus", in V_2 „lineemus". Gleich danach schreibt aber V_1 „lineemus", während V_2 das Wort in blanco stellt, und von dieser Stelle an folgen in V_2 eine Reihe von Lücken ganz wie in den Abschriften des Alkindi-Textes. S. 99, 15—16 korrigiert V_1 die Worte „tergamus ipsam, quemadmodum specula tergi solent, donec facies in ea uideatur" in „tergamus ipsa ad modum speculi". V_2 beschränkt sich aber darauf, für das Wort „donec" Platz offen zu lassen; der Abschreiber hat also dieses Wort nicht deuten können. S. 99, 20 schreibt V_2 „donec uisus erit".

Daß V von A abhängt, wenn auch nicht direkt, zeigt die für A und V spezielle Einfügung des Doppeltitels vorne im Satz 4 (99, 22) sowie zwei nicht unwichtigen Varianten S 104, 16 und 104, 18, wo sowohl A als V „sunt" für *s* schreiben. S. 98, 32, wo $V_{1,2}$ in „et sit" korrigiert (cfr. oben), hat nur A „et sint", die übrigen Hss. „sintque", „sitque" oder „sint".

Die römische Collegien-Hs. T haben wir nur eingesehen, sie ist aber unzweifelhaft eine direkte Kopie von V (vgl. S. 159) und gibt jedenfalls genau die beiden Textstücke V_1 und V_2 wieder.

Die beiden Florentinischen Hss. in der Magliabecchiana-Sammlung sind Abschriften von V, d. h. Y ist eine Abschrift von V, Z von Y. Sowohl Y wie Z geben nämlich genau das Textstück V_2 (vgl. S. 145 u. 147). Mehrere Fehler, die uns sonst nur in V_2 begegnen, haben sowohl Y als Z, z. B. 97, 18 *dzg* statt *zdg* (V_1 hat *zgd*), 97, 21 *it* statt *zt*, 98, 7 „altitudini" statt „altitudinis", ebenso die oben erwähnten Umschreibungen in V_2 S. 99, 5 ff. Auch eine Umstellung des Textes S. 98, 34—35 („uidelicet cum dextra dextram et cum sinistra sinistram") ist den Hss. V_2, Y und Z speziell und gemeinsam. Y und Z sind indessen nicht einfach nach V_2 kopiert, da auch die andere Abschrift derselben Hs. (V_1) konferiert und benutzt worden ist, z. B. zur Ausfüllung eines in V_2 S. 98, 10—13 übersprungenen Textstückes („et producam . . . punctum *z*"). Auch die Leseart „et sint" (S. 98, 32) haben Y und Z vermutlich von V_1 genommen (vgl. oben). Daß nicht umgekehrt V eine Abschrift von Y oder Z sein kann, zeigen mehrere neue Fehler und Lücken, welche erst in diesen beiden Hss. hinzugekommen sind, z. B. die Lücken 98, 5—6 („*ag*, et . . . sit linea"), 98, 7 („lineam medietati"), eine Textverdoppelung daselbst 98, 6—8 („*dz* et . . . linea *bt*"), wo die Lücke

98, 7 „lineam medietati“ nur das eine Mal vorkommt, und Fehler S. 97, 5 (*gb* für *bg*) und S. 98, 13 (*gz* für *z*). Daß Z nach Y abgeschrieben ist, zeigen einzelne neue Fehler, die erst in Z hinzugekommen sind, z. B. *ddb* für *edb* (S. 97, 10).

Da wir bei der Kollation von V, Y und Z nur die Hauptvarianten notiert haben, so haben wir diese 3 minderwertigen Hss., abgesehen von V's Überschrift des Werkes, aus dem Apparat weggelassen.

Die nächste Klasse von Hss. bilden die Oxforder-Hs. Q und die Cambridger-Hs. E, welche beide dem 13. Jahrh. gehören und vermutlich älter als D sind, so daß sie die ältesten Pseudo-Euklid-Hss. sind. Schon ein oberflächlicher Blick über den Apparat zeigt, daß Q und E sehr oft gegen die anderen Hss. gemeinsame Lesearten haben, ja fast nur voneinander abweichen, wenn E einen weder in Q noch in anderen Hss. vorkommenden Fehler hat. Wir müssen deshalb annehmen, daß E eine Abschrift von Q ist, obwohl die beiden Hss. einander zeitlich sehr nahe liegen und nichts hindern könnte, E älter als Q anzusetzen. Q kann hingegen nicht eine Abschrift von E sein; denn E hat Lücken und übersprungene Wörter, die in Q vorkommen (97, 16; 98, 5, 9, 15, 35; 99, 1, 18, 31; 105, 32—34); umgekehrt hat Q keine Fehler oder Lücken, die nicht auch in E da sind; endlich haben beide Hss. mitunter Lesearten, die auf eine direkte gegenseitige Abhängigkeit schließen lassen, so z. B. 99, 6 statt „similem“ das sinnlose „filerem“; Q hat hier offenbar seine Vorlage nicht deuten können, und E hat das sinnlose Wort treu wiedergegeben; daß beide dieselbe undeutliche Vorlage mit einem verkürzten similem (filēm) unabhängig voneinander als filerem gedeutet haben sollten, ist wohl möglich, aber sehr unwahrscheinlich. In der Überzeugung, daß E nach Q abgeschrieben ist, haben wir nur die Varianten aus E für den Textanfang (S. 97—100, 16) und Textschluß (105,24—106) in den Apparat mit aufgenommen. Sie genügen, um ein Bild von der Zuverlässigkeit der nicht unwichtigen Hs. E zu geben, die zahlreiche lateinische Werke enthält, darunter Richard v. Wallingfords unedierte Trigonometrie und Alferganis Astronomie in der gleichfalls nicht edierten Übersetzung des Gerhard v. Cremona.

Obwohl Q mehrere Lücken hat (z. B. 99, 18—19; 101, 29; 104, 35) und nicht wenige Fehler, ist sie doch eine wichtige Quelle für die Textredaktion, die wir an solchen Stellen benutzt haben, wo P verdächtig schien oder offenbar fehler- oder lückenhaft war. Daß dies berechtigt war, zeigte uns nachträglich die Nürnberger-Hs. Cod. Norimb. Cent. V, 64.

Diese Hs. X ist bei unserer Ausgabe nicht verwertet, da wir leider erst nach deren Drucklegung, bei der Ausarbeitung des Nachtrags, auf diese Hs. aufmerksam wurden. Durch das freundliche Entgegenkommen der Direktion der Stadtbibliothek in Nürnberg gelang es uns aber, nachträglich die Hs. zu vergleichen.

Der Teil von X, der den Pseudo-Euklid-Text enthält, ist um die Mitte des 14. Jahrh. geschrieben. Die Schrift ist den Schriften in der Basler-Hs. B (datiert 1349) sehr ähnlich. Wie B ist dieser Teil von X sehr undeutlich geschrieben und oft wegen Verkürzungen, Korrekturen und Zusammenfließen der Wörter schwer leserlich. Die Abschrift ist lange nicht so genau wie P, A oder Q; sie ist aber unabhängig von den anderen be-

kannten Hss., bildet sozusagen eine Klasse für sich und gibt in vielen Fällen die Entscheidung, wo man zwischen den Lesearten in Q, P und A schwankt. Die Hs. wäre deshalb unserer Ausgabe sehr zuträglich gewesen. Nun kann sie uns aber die einzelnen Fälle, wo wir unrichtig zwischen den Varianten gewählt haben, darlegen und sonst mehrere Lesearten unserer Ausgabe bestätigen.

An folgenden Stellen bestätigt X unsere Abweichungen von P: S. 97, 18 *edg* für *egd*. S. 98, 26 „lineae *bt* coniunctam" für „coniunctam lineae *gt*", wo X jedoch die Wortfolge „coniunctam lineae *bt*" hat, die also wohl die richtigste Leseart bildet. S. 98, 13, wo wir zu *z* die Bemerkung [lege: *e*] fügen, hat X deutlich *e*. S. 99, 8 hat X wie Q, A und B das von P und D übersprungene Wort „sit". S. 99, 22 fehlt in X wie in Q die von uns als unecht angesehene doppelte (in P rot geschriebene) Überschrift. S. 102, 6 gibt X das von P übersprungene Wort „quod". S. 102, 23 hat X wie A „qui est" statt „quae est". S. 104, 6 hat X gegen P wie die übrigen Hss. „sensu" für „sensum". S. 104, 10 fehlt in X wie in den übrigen Hss. das offenbar von P hinzugefügte *e*. S. 104, 13 hat X wie A und Q gegen P und B „assumam" statt „affirmam". S. 104, 15—16 haben wir einen in allen uns damals bekannten Hss. fehlenden Satz in [ ] eingefügt. Diesen Satz finden wir nun in X von Wort zu Wort mit unserem Einschiebsel übereinstimmend, nur daß X „. . . et protraham etiam lineam . . ." schreibt.

An zwei Stellen läßt X uns vermuten, daß wir uns mit Unrecht von P entfernt haben. S. 100, 16 lasen wir mit Q „ad *z*"; X hat aber wie P „a *d* ad *z*", was richtig sein dürfte. S. 102, 4 lasen wir mit Q „orizontem"; da X wie P und A „orizontes" hat, so wäre es sicher richtiger gewesen, „orizontes [lege: orizontem]" zu lesen, ganz wie auf der vorhergehenden Seite 101, 27. Neben diesem Wort „orizontes" hat X (101, 26) wie alle Hss. außer Q „implebunt" statt des doch wohl richtigen „implebit". Auf derselben Seite (101, 10) hat X die Abkürzung „vl'is", die uns durch ihre Zweideutigkeit erklärt, daß nur B richtig „visualis", P, A und Q dagegen „universalis" schreiben.

Wie es erhellt nimmt X bei dem Pseudo-Euklid-Texte eine ähnliche zentrale Stellung zwischen den anderen Handschriften ein, wie K beim Alkindi-Texte und L bei dem Tideus-Texte. Daß X aber keineswegs eine an sich genaue Abschrift, sondern — wie K und L bei den anderen Texten — eine vielfach ungenaue Kopie einer guten Vorlage ist, zeigt eine Auswahl von Varianten in X, die hier folgt; wo X mit anderen Hss. stimmt, sind diese in ( ) hinzugefügt.

97, 3 alterius] alteram. 10 **edb**] **ebd**. 22 aequalem **db**] aequale **ab**. 26 huius forma] quod demonstrare volumus. — **98**, 4—7 altitudin . . .] latitudin . . . 15 circumducam] coruscumducam (!). 19 **l** puncto **e**] **e** puncto **l**. 27 linea] **om.** — **99**, 3 circumduxerimus] circumdiximus. 4 accipiemus] accipiamus. 7 longitudo sit] latitudo. 17 uidens in] vidimus. 19 Specula] Sed specula. 20—21 sit in eius] eius sit. 29 illud lumen] lumen eius. — **100**, 3—4 Et . . . uoluimus] **om.** 6 Siue enim] fi'en (!). si obuiat] et obuiatne. 8 Sin uero] Si autem. 11 Sit] Et sit. 15 egredietur] egrediatur. ab **e**] **om.** 16 conuertetur] conuertitur. 20 ferrea] **om** 22 partem] punctum. **dz**] **de**. 23 **ame**] axe. lineam] **om.** 25 **ame**] **corr. ex** axe. **edg**] **egd** (B). 26 fiunt] fient. **m**] quod. 29 **amt**] **corr. ex axt**. existit] consistit. 30 etiam] **om** (Q). **td**] **dt**. 30—31 Et . . . uoluimus] **om.** 32 etiam] **om** (B). — **101**, 1 prospexerimus] quod spexeri-

mus. 11 caelum] to^m (= totum). 14 cui] **om.** radius] radio. 15 **g**] **g**, ut vides in figura. 16 Similiter quoque egreditur] Egreditur itaque. 18 umbra] id est terrae umbra (A). 20 cooperiens] torquens. 22 unum] vmbre. 27 orizontes] orizontis (B). — **102**, 1 **t**] **t** et similiter **i** et **k**. **i**] **b**. 2 cum **h**] **b**. 3 **t**] **k**. 8 et] **om.** 13—14 eius umbris eius] **om.** 14 minor] maior. 15 elongatur umbra] tanto elongatur umbra eius. 16 Et . . . uoluimus] Et hoc est. 24 **tz**] **tez**. 26 **b**] **om.** 32 **tz**] quod **tz**. 33 per] secundum. 34. fenestrae] fenestrae, ut in figura declaratur. 35 autem sol] sol itaque. 36 fenestram] fenestram, ut ostensum in figura. — **102**, 37—**103**, 1 sed . . . quantitatem] **bis**. 6 tunc] **om.** 7 terrae] dict (!). 8 **dgu**] **gev**. 11 omni] in omni. 17 ipsorum] eorum (Q). 18 et] **om.** modum] modum eius. 29 Et . . . producam] Et protraham a linea **gz** super ipsam. 30 perpendiculariter] perpendicularem. 38 **ht** ad **kt**] **hk** ad **ht**. **hq**] **hiq**. — **104**, 2 **gb**] **gl**. igitur] **om.** 3 quo quaeque] quoque (Q). 9 Et . . . uoluimus] **om.** 18 est maior] **bis**. 19 una] **om.** 22 quod . . . uoluimus] **om.** 26 Verbi] Exempli. 32 linea] **om.** 35 producam] protraham. 36 quae est] **om.** — **105**, 1, 2 aequidistat] aequidistant. 3 eas] eis. **et**] **ez**. 4 **zet**] **ebt**. 7 ergo] **om.** 8 habentis] habent. 9 Et . . . uoluimus] **om.** 13 uectis] uetus. 23 Et . . . uoluimus] **om.** — **106**, 1—2 quod . . . uoluimus] **om.** 3 terram] terra. 6 est] est id. 8 maior] minor. 10 est] **om.** 12 illud . . . uoluimus] hoc est etc. finis.

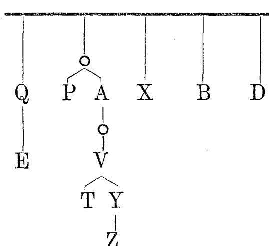
Unter diesen meistens für X speziellen Varianten finden sich sehr wenige, die zur Verbesserung der Ausgabe dienen können. Eigentlich ist nur die Leseart 102, 15 „tanto elongatur umbra eis“ empfehlenswert. Es ist jedoch nicht ausgeschlossen, daß hier eine sprachliche Korrektur des Abschreibers vorliegt, um so weniger, als dieser gar nicht ungeneigt ist, Korrekturen anzubringen. 101, 16 vereinfacht er den in Gerhardschen Übersetzungen oft vorkommenden Pleonasmus „Similiter quoque“; 102, 1 fügt er ein Glied hinzu, das ihm bei Betrachtung der Figur zu fehlen scheint; mehrmals fügt er Hinweisungen auf die Figur ein (101, 15; 102, 34, 36). Die Schlußworte des Beweises („Et illud est, quod demonstrare uoluimus“) ändert er gern, oder aber er läßt sie ganz weg. An einer Stelle aber, wo der Text den in Gerhardschen Übersetzungen nicht ungewöhnlichen, im Latein holperig klingendem Ausdruck „Et hoc est huius forma“ hat, korrigiert er zu dem gewöhnlichen „Et hoc est, quod demonstrare uoluimus“. Im Schluß des zum Teil verdorbenen Beweises 11 gibt er oft andere Figurenbuchstaben als die übrigen Abschreiber, versucht also eine Textrestitution. X ist also eine ungenaue, aber kritische Abschrift, die eine sehr gute Vorlage gehabt hat und deshalb nach P neben A und Q einer Ausgabe sehr zuträglich ist.

Die Basler-Hs. B dagegen ist fast wertlos. Wie gewöhnlich gibt sie eine Reihe spezieller Lesearten, die auf nicht zu reiflicher und kluger Überlegung beruhen. Die Korrekturen von „portio“ in „proportio“ (98, 17), „limemus“ in „lineemus“ (99, 9—11), „si“ in „siue“ (100, 6) z. B. sind sinnlos, die von „quae“ in „et“ (98, 25), „assumemus“ in „accipiemus“ (99, 6), „profundum“ in „profunditatem“ (99, 11) unnötig. Mitunter bestätigt B jedoch die Lesearten von P, z. B. beim oben erwähnten Wort „sintque“ (98, 32), bei den Worten „elongatur a sole“ (102, 15) und dem Wort „peruietate“ (105, 28), und B hat gegen P, A und Q die richtige Leseart „uisualis“ für „universalis“ (101, 10), die X also bestätigt. Übrigens ist B wie bei den vorhergehenden Werken recht ungenau, überspringt mehrmals Sätze und Wörter und mißversteht oft seine Vorlage.

Die Dresdener-Hs. D, die wie B sehr bekannt ist und von Curtze und Heiberg mehreren Ausgaben zugrunde gelegt wurde (vgl. S. 130—131), ist

verhältnismäßig alt, gehört vielleicht noch dem 13. Jahrh. an. Ihre Abschrift von Pseudo-Euklids De speculis ist nur ein Fragment und außerdem eine sehr ungenaue und unkritische Abschrift; ihre Lücken und Fehler beruhen offenbar teils auf Ungenauigkeit, teils darauf, daß der Abschreiber seine Vorlage nicht lesen konnte [s. z. B. die sinnlose Leseart „fin cuius" für „fuerit" (98, 29)]. Der Abschreiber scheint plötzlich müde geworden zu sein; offenbar um sich die Arbeit zu erleichtern, verkürzt er den Satz „mouebit forma illa manum suam dextram" zu „mouebit forma eandem" (99, 18—19). Den folgenden Satz überspringt er, ebenso das Verbum „sit" in der nächsten Zeile, und als der Beweis gleich darauf schließt, so schreibt er nicht mehr, so daß die Abschrift ein Fragment blieb.

Da die Hss. B, D und X eigentlich keine Klasse bilden, sondern alle drei hier und da je mit P und A von der richtigen Leseart abweichen, so können wir einen Stammbaum, der den möglichen Zusammenhang der Hss. mit der Urquelle andeutet, nicht errichten. Folgende Schema möge angeben, was wir wissen.



Wert der benutzten Handschriften.

Die textkritische Untersuchung der drei vorhergehenden optischen Werke erlaubt uns eine Wertschätzung der benutzten Hss., die künftigen Ausgaben zuträglich sein kann. Eine derartige Wertschätzung ist um so wichtiger, als man augenblicklich nicht imstande ist, bei den verschiedenen lateinischen Hss., in denen uns die mathematische Wissenschaft des lateinischen Mittelalters aufbewahrt ist, das Gute vom Schlechten zu scheiden. Zu den meisten Ausgaben hat man die nächstliegende ältere, meistens nicht italienische Hs. benutzt, also Abschriften, die nördlich der Alpen gemacht waren. Bei den Übersetzungen aus dem Griechischen oder dem Arabischen scheinen indessen die älteren italienischen Hss. die besten zu sein. In den einzigen Ausgaben lateinischer Übersetzungen auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften, bei denen mehr als ein paar Hss. und darunter italienische verglichen worden sind, nämlich Heibergs Ausgabe von Ptolemaeus' Planisphaerium (Opera omnia II, 227 ff, Lips. 1907) und von Ibn al Haitams Schrift über Brennspiegel (Bibl. Math. 10_3, 1909—10, S. 218 ff.), ergab es sich, daß die italienischen Hss. unbedingt die besten waren. In beiden Fällen stammten die Hss. aus Süditalien, bei Ptolemaeus' Planisphaerium war die beste Quelle der Cod. Reg. 1285, eine Schwesterhs. zu dem hier benutzten Cod. Par. 9335 (P), im anderen Falle war es der berühmte Cod. Ottob. 1850, Wilhelm v. Mörbeckes Autograph. Curtze hatte leider

nicht Zutritt zu den italienischen Hss. Er benutzte vorwiegend den Basler-Codex B, den Dresdener-Codex D und den Krakower-Codex K, hat aber auch verschiedene Hss. aus München, Wien, Göttingen, Erfurt und Paris herangezogen. Die Zusendung des berühmten Cod. Par. 9335 (P) wurde ihm aber verweigert. In drei Fällen haben wir Gelegenheit gehabt, Curtzes Ausgaben mit älteren italienischen Hss. zu vergleichen, und jedesmal mit dem Resultat, daß ihre Heranziehung der Ausgabe sehr zuträglich gewesen wäre. In einem Fall (bei der Ausgabe des „liber trium fratrum"; vgl. oben B, 19) war P (die Pariser-Hs.) viel besser als B (die Basler-Hs.); im anderen (bei der Anaritius-Ausgabe; vgl. oben K, 1) war der Cod. Reg. 1268 (vgl. AGMW XIV, S. 138) entschieden besser als der von Curtze benützte Cod. Cracov. 569 (K), im dritten Falle [bei der Ausgabe von Savasordas (Abraham bar Chijjas) „liber embadorum" (AGMW XII)] war der Cod. S. Marci Flor. 207 (conv. soppr. J. VI. 36) besser als die von Curtze benutzten Pariser-Hss., von denen die ältere indessen auch eine italienische Hs. zu sein schien, aber von einem Franzosen überarbeitet und jünger als die im Anfang des 13. Jahrh. oder noch früher geschriebene Florentiner-Hs.[1])

Ähnliches zeigt sich wieder hier bei unserer Untersuchung: Die Pariser-Hs. P und die Milaneser-Hs. A, die beide aus Italien stammen, sind entschieden besser als die älteren, gleichzeitigen oder etwas jüngeren Hss. aus Österreich, Frankreich, Deutschland, England und der Schweiz. Wir kommen deshalb zu folgender Wertschätzung der Handschriften:

P (Cod. Par. lat. 9335) ist eine erstklassige, süditalienische, leicht leserliche Hs. aus einer Zeit (der Hohenstaufenzeit oder der nächst darauf folgenden Periode) und einem Milieu (Schreiberschule, Kloster, Gelehrtenkreis), wo man besonders sorgfältig und gewissenhaft die Abschreibertätigkeit getrieben hat. Ihre Vorlage ist eine sehr gute und alte gewesen, aus einer Zeit, wo die alten kritischen Interlinearglossen noch nicht gestrichen oder in die Texte hinein gekommen waren. Da die ganze Hs. von einer Hd. geschrieben ist und ein von alter Zeit einheitliches Ganzes zu bilden scheint, so muß die Hs. bei jedem Texte, der darin steht, einer Ausgabe zugrunde gelegt werden.

A (Cod. Ambros. T. 100 sup.) ist eine sehr gute, einhändige, recht leicht leserliche Hs. aus derselben Zeit wie P, der sie sehr nahe steht. Die Abschrift ist aber nicht so genau; die Vorlage scheint weder so alt noch so gut gewesen zu sein und kein Ganzes gebildet zu haben. Wenn nicht ältere oder andere gleichzeitige Hss. vorliegen, kann A einer Kollation zugrunde gelegt werden.

B (Cod. Basil. F. II, 33) ist eine schwer leserliche, oft undeutlich geschriebene Textsammlung von mehreren Händen geschrieben. Wir können nur die Wirksamkeit von Hd. 4 (fol. 44^r—63^v und 197^r—220^r) und Hd. 5 (fol. 65^r—86^v und 99^r—137^r) beurteilen. Der Besitzer von Hd. 4 gibt einen besseren Text als der von Hd. 5, welcher nicht nur ungenau ab-

1) Gleich im Anfang der Savasorda-Ausgabe (S. 10) bei der Definition „Linea est latitudine carens longitudo" erkennt Curtze eine Lücke „cuius termini puncta sunt". Diese Worte finden sich richtig in der Florentiner-Hs.



schreibt, sondern seine Vorlage wissentlich ändert — und meistens nicht mit gutem Resultat. Die Hs. ist deutsche (schweizerische) Arbeit und in keiner Beziehung mit den beiden vorhergehenden Hss. zu vergleichen. Allein darf B nicht zu Ausgaben benutzt werden, und sie ist gar nicht geeignet, die Grundlage für eine Kollation oder Textausgabe zu bilden.

C (Cod. Coll. Corp. Chr. Oxon. 254) ist eine nicht besonders deutlich geschriebene und recht ungenaue, vermutlich englische Hs. Da der von uns benutzte Teil der Hs. ein Fragment für sich bildet, hat diese Beurteilung aber nur für diesen Teil Gültigkeit.

D (Cod Dresd. Db. 86) ist eine recht alte, ganz unkritische und ungenaue, vermutlich mitteleuropäische, aber ganz leserliche Abschrift. Diese Schätzung stimmt nach mündlicher Mitteilung von J. L. Heiberg, der die Hs. zu mehreren Ausgaben verwendet hat, ganz mit dessen Auffassung. Die Hs. scheint durchschnittlich auch keine besonders gute Vorlage gehabt zu haben. Da sie mit einer Hd. geschrieben ist, so dürfte dieses Urteil der ganzen Hs. gelten. Sie darf deshalb nur mit Vorsicht benutzt werden und wenn möglich nicht die Grundlage einer Ausgabe bilden. Zur Grundlage einer Kollation wird sie aber leidlich verwendbar sein.

E (Cod. Cantabr. Ii, I. 13) ist ebenfalls eine recht alte (1279), unkritische, ungenaue, in England gemachte, aber nicht schwer leserliche Abschrift. Der Grad der Ungenauigkeit läßt sich feststellen, da wir die Vorlage (Q) kennen. Es ist aber zweifelhaft, ob E andere Texte als Pseudo-Euklids De speculis nach Q abgeschrieben hat. Jedenfalls dürfte E nicht einer Ausgabe, sondern nur etwa einer Kollation zugrunde gelegt werden.

K (Cod. Cracov. 569) ist eine unkritische, nicht allzu genaue, vermutlich in Frankreich ausgeführte Hs., die aber eine sehr gute Vorlage gehabt hat. Sie ist mit sehr kleiner, aber leidlich lesbarer Schrift geschrieben. Nur mit Vorsicht und Heranziehung möglichst vieler anderer Hss. dürfte K einer Ausgabe zugrunde liegen. Zu Kollationszwecken ist sie aber wohl verwendbar.

L (Cod. Vatic. Palat. lat. 1377) ist eine späte, leicht leserliche, nicht sehr genaue, jedoch leidlich gute Abschrift, mit wenigen Textlücken und überhaupt eine nicht zu unterschätzende Quelle, die eine gute Vorlage gehabt zu haben scheint. Sie ist natürlich nur zu Kollationszwecken geeignet. Dies Urteil gilt indessen bloß für das erste Heft (fol 1^r—20^v) von L.

M (Cod. Ambros. P. 21 sup.) ist eine ganz verdorbene, späte und wertlose italienische Abschrift.

O (Cod. Ashmol. 357) ist eine recht späte, in England ausgeführte Hs. Wegen starker Abkürzungen und schneller Schrift ist sie recht undeutlich. Abgesehen von den vielen Textlücken gibt sie aber eine sehr genaue Abschrift, die gern herangezogen werden sollte, aber weniger geeignet ist, Grundlage zu bilden. Dieses Urteil gilt jedoch nur den Folien 71—178, die mit derselben Hd. wie der Alkindi-Text geschrieben sind.

Q (Cod. Digbean. 40) ist eine alte, aller Wahrscheinlichkeit nach englische Hs., die zum Teil noch dem ausgehenden 12. Jahrh. gehören soll. Ihre Abschrift von Pseudo-Euklids De speculis ist nicht fehlerfrei, aber jedenfalls eine gute Abschrift. Da die Hs. indessen von mehreren Händen geschrieben ist, so gilt dieses Urteil vielleicht nicht dem übrigen Inhalt.

R, S, T, V, Y, Z (Cod. Par. 10260; Savil. 24; Coll. Rom. H C. 93; Vat. 2975; Magliab. XI, 33 et 55) sind alle leicht lesbare, aber wenig genaue und sehr späte Hss., die wertlos sind, wenn ältere Hss. vorliegen. Außerdem geben die meisten dieser Hss. lückenhafte und verstümmelte Texte.

X (Cod. Norimb. Cent. V, 64) ist wie B eine schwer leserliche und undeutliche Hs. mit vielen Verkürzungen. Als Abschrift betrachtet ist sie aber zuverlässiger als B und in der Kritik viel gescheidter. Zudem scheint ihre Vorlage eine alte und gute gewesen zu sein. Dieses Urteil gilt jedoch nur für die Folien 164—174, d. h. für das den Pseudo-Euklid-Text enthaltende Heft. Herangezogen müssen die hier sich befindlichen Abschriften jedenfalls werden, als Grundlage für eine Kollation eignen sie sich jedoch wegen der undeutlichen Schrift nicht.

PERSONENVERZEICHNIS.

ERGÄNZUNGEN:

S. 52 Anm. 2. ..... wenn auch eine sehr kleine Breite haben. **Vgl. zu dieser Frage Alb. Magn. de anima II/III c. 10 ff. Dort auch die Rede von der Natur der Strahlen und die unterscheidbaren Strahlen.**

S. 57. .. .. wohin eine gerade Linie von einem Punkte der Lichtquelle gezogen werden kann [3])

3) Vgl. Alb. Magn. de anima II/III c. 9. 10.

S. 58. ..... Die Araber Alkindi, Averroes, später **Albertus Magnus**[4]) und sogar noch Leon. d. V.

4) Vgl. de anima II/III c. 9.

S. 59 Anm. 1. ..... obgleich doch ihre Entfernung sozusagen unendlich ist. **Vgl. auch Alb. Magn. de anima II/III c. 9.**

S. 61 Anm. 2. Näheres bei Mach, die Mechanik in ihrer Entwicklung. Lpzg. 1901 S. 125 ff. **Vgl. auch Alb. Magn. de anima II/III c. 10.**

S. 89 Anm. 1. ..... von einem leuchtenden Körper ausfließt. **Vgl. Alb. Magn. de anima II/III c. 10—12.**

S. 89 Anm. 3. **Alb. Magn. de anima I/II 12 und II/III 9 u. 10.**

S. 90 Anm. 1. ..... Näheres bei **Alb. Magn. de anima II/III c. 9 u. 10.** Das folgende Ar. III. c. IX gehört dann ganz weg. Ar. ist überhaupt ein Druckfehler und sollte tr. heißen.

S. 92 Anm. 1. ..... Albertus Magnus im Buche de sensu et sensato c 8; 11 **und de anima II/III c. 14.**

Druckfehler:

Seite	Zeile	von	steht	zu lesen ist:
14	17	unten	ɹofupndum	profundum
44	10	oben	ausführt	ausführt.
132	9 u. 21	unten	Wichyha	Wieliczka

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin.

XII. Heft. M. Curtze, Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance. I. Teil: I. Der „Liber Embadorum" des Savasorda in der Übersetzung des Plato von Tivoli. II. Der Briefwechsel Regiomontans mit Giovanni Bianchini, Jacob von Speier und Christian Röder. Mit 127 Figuren im Text. [X u. 336 S.] 1902. n. ℳ 16.—

XIII. Heft. M. Curtze, Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance. II. Teil: III. Die „Practica Geometriae" des Leonardo Mainardi aus Cremona. — IV. Die Algebra des Initius Algebras ad Ylem Geometram magistrum suum. Mit 117 Figuren im Text. [IV u. 292 S.] 1902. n. ℳ 14.—

XIV. Heft. A. A. Björnbo, Studien über Menelaos' Sphärik. Beiträge zur Geschichte der Sphärik und Trigonometrie der Griechen. — H. Suter, Nachträge und Berichtigungen zu „Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke". — K. Bopp, Antoine Arnauld, der große Arnauld, als Mathematiker. Mit 113 Fig. im Text. [VIII u. 337 S.] 1902. n. ℳ 16.—

XV. Heft. P. Sauerbeck, Einleitung in die analyt. Geometrie d. höh. algebraischen Kurven. Nach den Methoden von Jean Paul de Gua de Malves. Mit 76 Fig. im Text. [VI u. 166 S.] 1902. n. ℳ 8.—

XVI. Heft. I. Teil. E. Wölffing, mathematischer Bücherschatz. Systematisches Verzeichnis der wichtigsten deutschen und ausländischen Lehrbücher und Monographien des 19. Jahrhunderts auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften. In zwei Teilen. I. Teil: Reine Mathematik. Mit einer Einleitung: Kritische Übersicht über die bibliographischen Hilfsmittel der Mathematik. [XXXVI u. 416 S.] 1903. Geh. n. ℳ 14.—, geb. n. ℳ 15.—. II. Teil: Angewandte Mathematik. [In Vorbereitung.]

XVII. Heft. H. G. Zeuthen, Geschichte der Mathematik im 16. und 17. Jahrhundert. [VIII u. 434 S.] 1903. Geh. n. ℳ 16.—, geb. n. ℳ 17.—

XVIII. Heft. J. L. Heiberg, Mathematisches zu Aristoteles. — C. H. Müller, Studien zur Geschichte der Mathematik, insbesondere des mathematischen Unterrichts an der Universität Göttingen im 18. Jahrhundert. Mit einer Einleitung: Über Charakter und Umfang historischer Forschung in der Mathematik. — R. Lindt, das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, seine Beweise und die Unmöglichkeit seiner Umkehrung bei Verwendung des Begriffs „Gleichgewicht eines Massensystems". Mit 34 Figuren im Text. [II u. 196 S.] 1904. n. ℳ 6.—

——— Sonderabdruck. C. H. Müller, Studien zur Geschichte der Mathematik, insbes. des mathematischen Unterrichts an der Universität Göttingen im 18. Jahrhundert. Mit einer Einleitung: Über Charakter und Umfang historischer Forschung in der Mathematik. [94 S.] 1904. n. ℳ 2.—

XIX. Heft. Lobatschefskijs imaginäre Geometrie und Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale. Aus dem Russischen übersetzt und mit Anmerkungen herausgegeben von H. Liebmann. Mit 39 Figuren. [XI. u. 188 S.] 1904. n. ℳ 8.—

XX. Heft. In 3 Stücken. 1. Stück. F. Müller, Karl Schellbach. Rückblick auf sein wissenschaftliches Leben. Nebst zwei Schriften aus seinem Nachlaß und Briefen von Jacobi, Joachimsthal und Weierstraß. Mit 1 Bildnis. [86 S.] 1905. n. ℳ 2.80.

——— 2. Stück. K. Bopp, die Kegelschnitte des Gregorius a St. Vincentio in vergleichender Bearbeitung. Mit 329 Figuren im Text. [III u. 228 S.] 1907. n. ℳ 10.—

——— 3. Stück. S. Rothenberg, geschichtliche Darstellung der Entwicklung der Theorie der singulären Lösungen totaler Differentialgleichungen von der ersten Ordnung mit zwei variablen Größen. Mit 5 Figuren im Text. [90 S.] 1908. n. ℳ 3.60.

XXI. Heft. Leibnizens nachgelassene Schriften physikalischen, mechanischen und technischen Inhalts. Herausg. u. mit erläut. Anmerk. vers. v. E. Gerland. [VI u. 256 S.] 1906. n. ℳ 10.—

XXII. Heft. Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und M. H. Jacobi. Herausgegeben von W. Ahrens. Mit 2 Bildnissen. [XX u. 282 S.] 1907. Geh. n. ℳ 6.90, geb. n. ℳ 7.50.

XXIII. Heft. K. Hering, das 200jährige Jubiläum der Dampfmaschine 1706—1906. Eine historisch-technisch-wirtschaftliche Betrachtung. Mit 13 Fig. im Text. [IV u. 58 S.] 1907. n. ℳ 1.60.

XXIV. Heft. Joannis Verneri de triangulis sphaericis libri quatuor, de meteoroscopiis libri sex cum procemio Georgii Joachimi Rhetici, herausgegeben von A. A. Björnbo. — I. De triangulis sphaericis libri quatuor. Mit 1 Bildnis Werners, 12 S. Faksimile des Titels sowie der Einleitung zu der Originalausgabe Cracau 1557 und 211 Figuren im Text. [III u. 184 S.] 1907. n. ℳ 8.— II. De meteoroscopiis libri VI. [Unter der Presse.]

XXV. Heft. Festschrift zur Feier des 200. Geburtstages Leonhard Eulers. Herausgegeben vom Vorstande der Berliner Mathematischen Gesellschaft. Mit 2 Bildnissen Eulers. [IV u. 137 S.] gr. 8. 1907. n. ℳ 5.— Inhalt: G. Valentin, L. Euler in Berlin. — A. Kneser, Euler und die Variationsrechnung. — F. Müller, über bahnbrechende Arbeiten Eulers aus der reinen Mathematik. — E. Lampe, zur Entstehung der Begriffe der Exponentialfunktion und der logarithm. Funktion eines komplexen Arguments bei L. Euler.

XXVI. Heft. 1. Stück. A. Haerpfer, die Probleme von Hansen und Snellius. [22 S.] 1910. n. ℳ 1.—

——— 2. Stück. B. Lind, über das letzte Fermatsche Theorem. [43 S.] 1910. n. ℳ 2.—

——— 3. Stück. A. A. Björnbo und Seb. Vogl, Alkindi, Tideus und Pseudo-Euklid. Drei optische Werke. Mit Textfiguren. 1911. Geh.

XXVII. Heft. F. Müller, Führer durch die mathematische Literatur. Mit besonderer Berücksichtigung der historisch-wichtigen Schriften. [X u. 252 S.] 1909. Geh. n. ℳ 7.—, geb. n. ℳ 8.—

XXVIII. Heft. Y. Mikami, Mathematical Papers from the far East. With 15 Figures. [VI u. 230 S.] 1910. Geh. n. ℳ 10 —, geb. n. ℳ 11.—

XXIX. Heft. Festschrift zur Feier des 100. Geburtstages Eduard Kummers. Mit Briefen an seine Mutter und an Leopold Kronecker. Herausgegeben vom Vorstande der Berliner Mathematischen Gesellschaft. Mit 1 Bildnis Kummers. [IV u. 103 S.] 1910. Geh. n. ℳ 4.—

In Vorbereitung: The British Mathematicians of the nineteenth Century: Peacock, De Morgan, Hamilton, Boole, Cayley, Clifford, H. J. S. Smith, Sylvester, Clerk-Maxwell, Tait, Kelvin, Rankine, Babbage, Adams, Stokes, Rayleigh Kirkmann a. o. By A. Macfarlane in South Bethlehem, Pa., U. S. A. — Histoire des Sciences Mathématiques en France au 19e siècle. Par J. Drach à Poitiers. — A Study on the Development of Mathematics in China and Japan. By Y. Mikami in Tokio.

ABHANDLUNGEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN
WISSENSCHAFTEN MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN
BEGRÜNDET VON MORITZ CANTOR · XXVII. HEFT

FÜHRER
DURCH DIE MATHEMATISCHE LITERATUR

MIT BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG
DER HISTORISCH WICHTIGEN SCHRIFTEN

VON

FELIX MÜLLER

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1909



Vorwort.

Das Buch, das ich hiermit den Freunden der Mathematik übergebe, soll allen denen ein zuverlässiger Führer durch die mathematische Literatur sein, die sich über irgendein Gebiet dieser Wissenschaft, sei es eine mathematische Disziplin oder ein mathematisches Problem oder ein mathematischer Satz, durch Selbstunterricht belehren wollen. Zu dem Zwecke gibt es eine systematische Übersicht über eine beträchtliche Zahl von Einzelwerken und Journalabhandlungen aus der reinen Mathematik, die geeignet sind, in Form von älteren und neueren Lehrbüchern, Originalabhandlungen, speziellen Untersuchungen, Aufgaben und Übungen, Tafeln und Modellen über den gewünschten Gegenstand zu unterrichten.

Insonderheit ist es ein Leitfaden für Studierende der Mathematik, der das in den Vorlesungen Dargebotene nach der historisch-literarischen Seite hin zu ergänzen geeignet ist. Den Herren Dozenten, welche sich in den Vorlesungen über eine spezielle mathematische Disziplin oft nur mit kurzen Hinweisen auf die einschlägige Literatur (Originalarbeiten, Lehrbücher, Aufgaben, Geschichtliches usw.) begnügen müssen, wird es erwünscht sein, auf den „Führer" als auf einen literarischen Assistenten hinweisen zu können, der das zeitraubende Anschreiben von Namen, von genauen Titeln und Quellen erspart.

Aus dem vorher Gesagten geht schon hervor, daß der „Führer durch die mathematische Literatur" keineswegs eine „mathematische Bibliographie" im gewöhnlichen Sinne ist, die womöglich alle im Gebiete der reinen Mathematik erschienenen Einzelwerke und Journalabhandlungen sammelt und systematisch ordnet. Eine solche „Bibliographie" würde einen weit größeren Raum einnehmen, aber deshalb auch weniger zur schnellen Orientierung geeignet sein, als unser bescheidenes bibliographisches Hilfsmittel.

Das Buch zerfällt in drei Teile. Der erste, historisch-enzyklopädische Teil orientiert über große historische Werke, über gesammelte Schriften hervorragender Mathematiker und Klassikerausgaben, über Zeitschriften mathematischen Inhalts und Enzyklopädien. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik werden bis jetzt noch recht selten an Universitäten gehalten. Und doch interessieren sich für die historische Entwickelung der mathematischen Wissenschaften nicht nur viele Mathematiker von Fach, sondern auch viele Vertreter anderer Wissenszweige und sogar viele gebildete Laien. Ein Hinweis auf die historische Literatur wird also auch weiteren Kreisen erwünscht sein. Der Leser wird außer mit den historischen Gesamtdarstellungen

auch mit Schriften bekannt gemacht, welche die Geschichte der Mathematik in einzelnen Zeiten und bei einzelnen Völkern behandeln. Wer sich für die Lebensumstände hervorragender Mathematiker interessiert, findet die betreffende Literatur in dem Abschnitt: „Biographisches". Die zahlreichen „Gesammelten Werke", einschließlich Briefwechsel und Vorlesungsreihen, sowie die Klassikerausgaben ersparen das Aufsuchen wichtiger Originalarbeiten in seltenen oder schwer zugänglichen Zeitschriften. Eine Zusammenstellung der wichtigeren Zeitschriften mathematischen Inhalts wird den Studierenden willkommen sein, zumal aus den oft willkürlichen Abkürzungen vieler Literaturzitate die Quelle schwer zu erkennen ist.

Der zweite Teil des Buches umfaßt Philosophie, Pädagogik, Algebra, niedere und höhere Arithmetik und niedere und höhere Analysis, der dritte Teil das weite Gebiet der Geometrie, in das auch — abweichend von der sonst gebräuchlichen, beispielsweise in dem Jahrbuch für die Fortschritte der Mathematik angewandten Systematik, — die geometrische Optik und die kinematische Geometrie aufgenommen worden sind.

Im allgemeinen beginnt das einzelne Kapitel, das einer speziellen Disziplin gewidmet ist, mit einer kurzen Einleitung, in der die Aufgabe dieser Disziplin mit wenigen Worten charakterisiert und eine kurze historische Notiz über die Entstehung der Disziplin gegeben wird. Daran schließt sich eine Auswahl älterer einschlägiger Werke; es folgen neuere Lehrbücher, grundlegende Abhandlungen, nebst Aufgabensammlungen für das ganze Gebiet, und den Beschluß machen Schriften über spezielle Untersuchungen. Besondere Sorgfalt ist auf die genauen Titel und Quellenangaben gelegt. Der bei den meisten Einzelwerken angegebene Umfang läßt leicht erkennen, ob wir es mit einem größeren Kompendium, einem kleineren Lehrbuch oder einer kurzen Einführung zu tun haben, was die Auswahl erleichtert. Für eine Reihe von Disziplinen gibt es eine so große Zahl von Lehrbüchern, daß ich darauf verzichten mußte, viele, selbst empfehlenswerte, Werke in die Liste aufzunehmen, um nicht den dem Buche zugewiesenen Umfang zu überschreiten. Ganz besondere Berücksichtigung haben die historisch wichtigen Schriften gefunden; in ihnen findet man häufig auch eingehende bibliographische Notizen. Durch eine kurze Notiz sind diejenigen Schriften gekennzeichnet, in denen sich geschichtliche oder bibliographische Angaben in größerer Zahl finden.

Der Verlagsbuchhandlung bin ich zu Dank verpflichtet, da sie meinen Wünschen in bezug auf den recht schwierigen Druck entgegengekommen ist.

Schließlich danke ich den Herren Gustav Eneström, Conrad Müller und Paul Stäckel für freundliche Hilfe bei der Korrektur. Herr Eneström hat mit unermüdlicher Ausdauer sämtliche Korrekturbogen durchgesehen; seine staunenswerte Kenntnis der mathematischen Literatur ist jeder Seite meines Buches zugute gekommen.

Loschwitz, im August 1908.

Felix Müller.

Inhaltsübersicht.

Erster Teil.

Geschichte der Mathematik. Enzyklopädisch-Historisches.

Abschnitt I. Mathematische Geschichtswerke.

Abschnitt II. Biographisches.

Abschnitt III. Gesammelte Werke. Klassikerausgaben.

Abschnitt IV. Zeitschriften mathematischen Inhalts.

Abschnitt V. Mathematische Bibliographien.

Abschnitt VI. Enzyklopädien und Gesamtkompendien.

Zweiter Teil.

Philosophie. Pädagogik. Algebra. Arithmetik. Analysis.

Abschnitt I. Philosophie der Mathematik.

Abschnitt II. Mathematisch-Pädagogisches.

Abschnitt III. Algebra.

Abschnitt IV. Arithmetik.

Kapitel 3. Integralrechnung.

Kapitel 4. Differentialgleichungen.

Kapitel 5. Variationsrechnung.

B. Funktionentheorie.

Kapitel 1. Allgemeines.

Kapitel 2. Besondere elementare Funktionen.

Kapitel 3. Elliptische Funktionen.

Kapitel 4. Hyperelliptische und Abelsche Funktionen.

Kapitel 5. Kugelfunktionen und verwandte Funktionen.

Dritter Teil.

Geometrie.

Abschnitt I. Reine, elementare und darstellende Geometrie.

Kapitel 1. Grundlagen der Geometrie.

Kapitel 2. Elementare Planimetrie.

Kapitel 3. Ebene und sphärische Trigonometrie.

Kapitel 4. Kontinuitätsbetrachtungen.

Kapitel 5. Stereometrie.

Kapitel 6. Darstellende Geometrie.

Abschnitt II. Höhere Geometrie.

Kapitel 1. Analytische Geometrie. Allgemeines.

Kapitel 2. Synthetische Geometrie. Allgemeines.



Kapitel 3. Infinitesimale Geometrie. Allgemeines.

Erster Teil.

Geschichte der Mathematik. Enzyklopädisch-Historisches.

Abschnitt I. Mathematische Geschichtswerke.

§ 1. **Einleitung.** Die Aufgabe des mathematischen Historiographen wird in erster Linie sein, zu zeigen, wann, wie und von wem einzelne Sätze aufgestellt und bewiesen sind, wann und wie ganze Disziplinen der reinen Mathematik geschaffen und weiter entwickelt wurden. Damit darf er sich aber nicht begnügen. Er muß es verstehen, eine historische Entwicklung der leitenden Ideen zu geben, muß zeigen, welche Anwendungen der Inhalt und die Methode der reinen Mathematik auf die Erkenntnis der Natur erfahren hat, und welchen Einfluß umgekehrt die angewandte Mathematik auf die Entwicklung der reinen Wissenschaft gehabt hat. Ferner soll er die Gründe erforschen, aus denen sich die Mathematik zu bestimmten Zeiten und bei einzelnen Völkern so und nicht anders entwickeln konnte.

Wer die Probleme kennen lernen will, welche der Geschichtsschreiber der Mathematik sich zu stellen hat, den verweisen wir auf die kleine Abhandlung von Sigm. Günther: „Ziele und Resultate der neueren mathematisch-historischen Forschung", Erlangen 1876.

§ 2. **Versuche im Altertum.** Die ersten Versuche, eine Geschichte der Mathematik zu schreiben, wurden in der zweiten Hälfte des 4. Jahrhunderts v. Chr. von Schülern des Aristoteles gemacht. Aber nur von Eudemos von Rhodos sind uns Bruchstücke historischer Schriften über Geometrie und Astronomie erhalten. Näheres über die Bedeutung dieser Schriften des Eudemos, sowie über die späteren Schriftsteller des Altertums und des Mittelalters, bei denen historische Notizen sich finden, suche man in M. Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik", von denen weiter unten die Rede sein wird.

§ 3. **Versuche in neuerer Zeit.** Aus der neueren Zeit nennen wir die folgenden für die Geschichte der Mathematik wertvollen Werke:
Petrus Ramus, Scholae mathematicae, Paris 1569.

Von den 31 Büchern mathematischer Untersuchungen enthalten die drei ersten eine Geschichte der Mathematik im Altertum.



Bernardino Baldi, Cronica de' matematici, overo epitome dell' istoria delle vite loro, 1 v. 4°, Urbino 1707, und dessen Vite de' Matematici (abgedruckt im Bull. bibl. storia mat. von Boncompagni; siehe Index, 20, 731).

Giuseppe Biancani (Blancanus), De natura mathematicarum scientiarum tractatio, atque clarorum mathematicorum chronologia, Bononiae 1615, 4°.

Gerhard Johann Voß (Vossius), De universa matheseos natura et constitutione liber, cui subjungitur chronologia mathematicorum, Amstelod. 1650, 4°.

Claude François Milliet Dechales, Cursus seu mundus mathematicus. Pars I: tractatus prooemialis, de progressu matheseos et illustribus mathematicis. 4 v. fol. Lugduni 1690.

Johann Christoph Heilbronner, Versuch einer mathematischen Historie, Frankfurt 1739, 204 S. 8°; und Historia matheseos universae, a mundo condito ad saeculum post Chr. Nat. XVI; accedit Recensio elementorum compendiorum et operum mathematicorum atque Historia Arithmetices ad nostra tempora, Lipsiae 1741, 4°.

Wir müssen uns mit der Anführung der Titel begnügen und verweisen wegen des näheren Inhalts auf Cantors Vorlesungen.

§ 4. **Gesamt-Darstellungen.** Das erste Werk, das wirklich den Titel einer Geschichte der Mathematik verdient, und dessen Inhalt aus den unmittelbaren Quellen geschöpft ist, ist das von

Jean Etienne Montucla: Histoire des mathématiques, dans laquelle on rend compte de leurs progrès depuis leur origine jusqu'à nos jours; où l'on expose le tableau et le développement des principales découvertes dans toutes les parties des mathématiques, les contestations qui se sont élevées entre les mathématiciens, et les principaux traits de la vie des plus célèbres. 2 v. 4°. Paris 1758.

Der erste Band enthält die Geschichte der Mathematik von den ältesten Zeiten bis zum Beginn des 17. Jahrhunderts, der zweite gibt die Geschichte der Mathematik im 17. Jahrhundert. Montucla war im Begriff, seine Geschichte bis auf die Gegenwart fortzusetzen, doch ereilte ihn am 18. Dezember 1799 der Tod, nachdem im August desselben Jahres die 2. Auflage der beiden ersten Bände erschienen war. Der 3. und 4. Band der 2ième Édition, considérablement augmentée et prolongée jusque vers l'époque actuelle, 4 v. 4°, Paris 1799—1802, wurden von Jérôme de La Lande ergänzt und stehen an Wert weit hinter den beiden ersten Bänden zurück. Band I (au VII) umfaßt VIII + 739 Seiten, II (au VII) 717, III (au X) VIII + 832, IV (au X) 688 Seiten.

Mehr eine genaue Beschreibung von Büchern, als eine eigentliche Geschichte der Mathematik, aber doch für jeden Historiker unentbehrlich ist das Werk von

Abraham Gotthelf Kästner, Geschichte der Mathematik seit der Wiederherstellung der Wissenschaften bis an das Ende des achtzehnten Jahrhunderts. Göttingen, 4 Bde. 8°, 1796—1800.

Eine nicht bloß für Mathematiker von Fach, sondern für jeden Gebildeten interessante, aber nicht ins Detail gehende Darstellung der historischen Entwicklung unsrer Wissenschaft gibt

Charles Bossut, Essai sur l'histoire générale des mathématiques. 2 v. 8° Paris 1802; 2. éd. 1810; deutsch von K. Th. Reimer, 2 Teile Hamburg 1804; italienisch von A. Mozzoni mit Zusätzen von G. Fontana, Milano 1802; englisch von Bonnycastle, London 1803.

Die Absicht, einem größeren Leserkreise in allgemeinen Umrissen nachzuweisen, daß das Naturgesetz des geistigen Prozesses sich auch in der Entwicklung der Mathematik erkennen läßt, verfolgt

A. Arneth, Die Geschichte der reinen Mathematik in ihrer Beziehung zur Geschichte der Entwicklung des menschlichen Geistes. Aus der „Neuen Enzyklopädie für Wissenschaften und Künste" besonders abgedruckt. Stuttgart, 1852. 291 S. 8°.

Zu erwähnen ist ferner wegen seines brauchbaren 2. Bandes

H. Suter, Geschichte der mathematischen Wissenschaften. I. Teil, Zürich 1872, 2. Aufl. 1873; II. Teil ib. 1875.

Der erste Teil: „Von den ältesten Zeiten bis Ende des 16. Jahrhunderts" enthält nach Aussage kompetenter Beurteiler zu viele Lücken und Unrichtigkeiten. Im zweiten ist die Entwicklung der mathematischen Disziplinen im 17. und 18. Jahrhundert, besonders die der niederen und höheren Analysis, in ansprechender Weise dargestellt.

Das kulturgeschichtlich wichtige Werk von

William Whewell, History of the inductive sciences, London 1837—1838, 3 v. 8°, 3. ed. 1847, deutsch von Littrow, 3 Bde. Stuttgart 1840—41.

gibt auch eine Darstellung der Gesamtentwicklung der Mathematik, allerdings besonders der angewandten.

Erst in den letzten vier Dezennien erwachte bei den Mathematikern ein lebhaftes Interesse für die historische Entwicklung ihrer Wissenschaft. Immer größer wurde der Kreis der Mitarbeiter auf dem historisch-mathematischen Gebiete. Die Geschichte der Mathematik wurde sogar Gegenstand von Universitätsvorlesungen. Aus solchen entstand ein Werk, das in der Bibliothek keines Mathematikers fehlen sollte, da es über den Bestand der gegenwärtigen historisch-mathematischen Wissenschaften am besten orientiert. Es ist dies das Werk von

Moritz Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Leipzig. I. Bd. Von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 n. Chr. 1880, VIII u. 804 S.; 2. Aufl. 1894, VII u. 883 S. 3. Aufl. 1907. II. Bd. Von 1200—1668. 1892, X u. 863 S.; 2. Aufl. XII u. 943 S. III. Bd. Von 1668—1758. 1898, XIV u. 893 S.; 2. Aufl. X u. 923 S.

Ein vierter Band, den Herr M. Cantor mit Hilfe jüngerer Kräfte bearbeitet, ist dem Abschluß ziemlich nahe; er umfaßt die Jahre 1759 —1799. In der Bibliotheca mathematica veröffentlicht Herr G. Eneström fortlaufend „Kleine Bemerkungen zur zweiten Auflage von Cantors Vorlesungen über Geschichte der Mathematik", welche Zusätze und Berichtigungen seitens verschiedener Mitarbeiter enthalten.

Keine eigentliche Geschichte, eher eine ansprechend geschriebene Sammlung mathematisch-historischer Unterhaltungen, in biographischer Anordnung, teilweise mit ausführlicher Analyse der Hauptwerke, ist:

Max. Marie, Histoire des sciences mathématiques et physiques. 12 v. petit in-8°, Paris 1883—1888. T. I umfaßt Periode 1—3, bis Diophant; II (P. 4 u. 5) bis Vieta; III (P. 6 u. 7) bis Descartes; IV (P. 8 u. 9) bis Huygens; P. 10. De Huygens à Newton; P. 11. De Newton à Euler (T. V—VIII); P. 12. De Euler à Lagrange (T. VIII—IX); P. 13. De Lagrange à Laplace (T. IX—X); P. 14

De Laplace à Fourier (T. X); P. 15. De Fourier à Arago (T. XI); P. 16. D'Arago à Abel et aux géomètres contemporains (T. XII).

Nichts als eine Kompilation aus früheren Werken will sein:

W. W. Rouse Ball, A short account of the history of mathematics. London 1888, xxIII u. 464 S. 8°; 2d ed. London 1893, xxIV u. 520 S. Ital. von D. Gambioli u. G. Puliti, durchgesehen von G. Loria. I. Bologna 1903, x u. 284 S. 8°. II. 1904, vI u. 439 S. Französisch von L. Freund I. Paris 1906. vII u. 422.

Doch ist das Buch recht geschickt abgefaßt und bietet eine gute Einführung in die Geschichte der Mathematik, bei der freilich die neuere Zeit etwas dürftig behandelt ist. Für den Nichtmathematiker, der aber Interesse an der Entwicklung der Mathematik besitzt, ist eine kurze ansprechende Darstellung ein zweites Büchlein von

W. W. Rouse Ball, A primer of the history of mathematics. London 1895. IV u. 146 S. 8°.

Beifällige Aufnahme hat auch gefunden eine populär geschriebene Geschichte der Mathematik von

F. Cajori, A history of mathematics. London and New-York. 1894. xIV u. 422 S.

Noch populärer geschrieben ist:

J. Boyer, Histoire des mathématiques. Paris 1900. xII u. 260 S. Neunzehn Bildnisse von Mathematikern sollen das Interesse des Dilettanten für die Mathematik wecken.

Als allererste Einführung in die Geschichte der Mathematik wird manchem von Nutzen sein das billige Büchlein von

A. Sturm, Geschichte der Mathematik. Leipzig. Sammlung Göschen. 1904. 152 S. 12°. Neudruck 1906. Es schließt mit dem Ende des 18. Jahrhunderts.

Bereits die fünfte Auflage hat erlebt, ohne von groben Irrtümern befreit zu sein,

F. Höfer, Histoire des mathématiques, depuis leurs origines jusqu'au commencement du 19e siècle. Paris. 5e éd. III u. 609 S. 16°.

Mehr, als der bescheidene Titel besagt, bietet das zur Orientierung recht nützliche Büchlein von

Karl Fink, Kurzer Abriß einer Geschichte der Elementar-Mathematik mit Hinweisen auf die sich anschließenden höheren Gebiete. Tübingen 1890. x u. 269 S. kl. 8°. Unter dem Titel: A brief history of mathematics ins Englische übersetzt von W. W. Beman and D. E. Smith. Chicago 1900. xII u. 333 S. 8°.

Für Lehrer der Mathematik zu gelegentlichen historischen Rückblicken wohl zu benutzen sind:

F. Cajori, A history of elementary mathematics. With hints on methods of teaching. New York 1896, vIII u. 304 S. 12°; und

Joh. Tropfke, Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung. I. Bd. Rechnen und Algebra. Leipzig 1902, vIII u. 332 S. II. Bd. Geometrie. Logarithmen. Ebene Trigonometrie. Sphärik und sphärische Trigonometrie. Reihen. Zinseszinsrechnung. Kettenbrüche. Stereometrie. Analytische Geometrie. Kegelschnitte. Maxima und Minima. Leipzig 1903. vIII u. 496 S. gr. 8°.

§ 5. **Geschichte der Mathematik in einzelnen Zeiten und bei einzelnen Völkern.** Wir kommen nun zu denjenigen Werken, welche

die Entwicklung der mathematischen Wissenschaften während einzelner Zeitepochen und bei einzelnen Völkern zum Gegenstande haben. Eine Darstellung der Geschichte der Mathematik im Altertum, mit Ausschluß der Geometrie der klassischen Periode, und der Mathematik im Mittelalter bis zur Mitte des 15. Jahrhunderts enthält das geistvolle, wegen des frühen Todes des Verfassers leider Fragment gebliebene Werk von

Hermann Hankel, Zur Geschichte der Mathematik in Altertum und Mittelalter. Leipzig 1874. 410 S. 8⁰.

Das Wesentliche, was für Studierende und Lehrer der Mathematik zu wissen notwendig ist, geben die Werke von:

H. G. Zeuthen, Forelaesning over Mathematikens Historie. Oldtid og Middelalder. Kjöbenhavn 1893. 282 S. 8⁰; deutsch:

H. G. Zeuthen, Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter. Vorlesungen. Deutsch von v. Fischer-Benzon. Kopenhagen 1896. (4) u. VII u. 342 S. 8⁰;

H. G. Zeuthen, Histoire des mathématiques dans l'antiquité et le moyen âge. Éd. franç. par J. Mascart. Paris 1902. IX u. 296 S.;

H. G. Zeuthen, Forelaesninger over Mathematikens Historie. II. 16de og 17de Aarhundrede. Kjöbenhavn 1903. XI u. 612 S. 8⁰; = Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert. Deutsch von Raphael Meyer. Leipzig 1903. VIII u. 434 S. (Abh. z. Gesch. d. math. Wiss. Heft XVII.)

Wer eingehendere Studien über die Geschichte der Mathematik im Altertum und im Mittelalter machen will, findet die betreffenden zahlreichen Quellenschriften sorgfältig angeführt in M. Cantors Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Wir begnügen uns deshalb, einige auch für den Nicht-Historiker interessante Schriften zu nennen:

M. Cantor, Mathematische Beiträge zum Culturleben der Völker. Halle 1863.

M. Cantor, Euklid und sein Jahrhundert. Mathematisch-historische Skizze. Leipzig 1867.

P. Tannery, Pour l'histoire de la science hellène. De Thalès à Empédocle. Paris 1887. 396 S.

P. Tannery, La géométrie grecque. Comment son histoire nous est parvenue et ce que nous en savons. I. Histoire générale de la géométrie élémentaire. Paris 1887. 188 S.

G. J. Allman, Greek Geometry from Thales to Euclid. 2. ed. Dublin, London. 1889. 237 S.

J. Gow, A short history of greek mathematics. Cambridge, 1884. 323 S.

G. Loria, Le scienze esatte nell' antica Grecia. I—V. Modena 1893—1902. (Auch Mem. Acc. Modena (2) **10**, 3—168; **11**, 3—237.)

L. Am. Sédillot, Matériaux pour servir à l'histoire comparée des sciences mathématiques chez les Grecs et les Orientaux. 2 vol. 8⁰. Paris 1845—50.

G. H. F. Nesselmann, Die Algebra der Griechen. Der I. (einzige) Teil eines nach den Quellen bearbeiteten Versuches einer kritischen Geschichte der Algebra. Berlin 1842. XVI u. 498 S. 8⁰.

Ein für die Geschichte der Mathematik im Mittelalter höchst bedeutendes Werk ist:

G. Libri, Histoire des sciences mathématiques en Italie, depuis la renaissance des lettres jusqu'à la fin du dix-septième siècle. 4 v. 8⁰. Paris 1837—41; 2de éd. Halle 1865.

Als XVII. Band der von der Königl. Akademie der Wissenschaften



zu München herausgegebenen „Geschichte der Wissenschaften in Deutschland. Neuere Zeit“ erschien:

C. J. Gerhardt, Geschichte der Mathematik in Deutschland. München 1877. XII u. 307 S. 8⁰. I. Buch. Bis zur Mitte des siebzehnten Jahrhunderts. II. Buch. Von der Mitte des siebzehnten Jahrhunderts bis zum Ende des achtzehnten Jahrhunderts. III. Buch. Vom Anfang bis zur Mitte des neunzehnten Jahrhunderts.

Die Geschichte der Mathematik in Dänemark und Norwegen im 18. Jahrhundert behandelt

S. A. Christensen, Matematikens Udvikling i Danmark og Norge i det 18. Aarhundrede. Odense. 1895. III u. 265 S. 8⁰.

Die Entwicklung der Mathematik in der französischen Schweiz stellt dar:

L. Isely, Histoire des sciences mathématiques dans la Suisse Française. Neuchâtel. 215 S. 8⁰. 1901.

Für die Geschichte der Mathematik in den Niederlanden sind zu nennen:

A. J. Quetelet, Histoire des sciences mathématiques et physiques chez les Belges. Bruxelles 1864; 2de éd. 1871, 484 S.;

A. J. Quetelet, Sciences mathématiques et physiques chez les Belges au commencement du XIXe siècle. Bruxelles 1867. 760 S. 8⁰;

M. de Tilly, Rapport séculaire sur les travaux mathématiques de l'académie Royale de Belgique (1772—1872). Bruxelles 1872.

Für die neueste Geschichte der Mathematik in Frankreich:

Jules Drach, Histoire des sciences mathématiques en France. Leipzig 1904. 320 S. (Abh. z. Gesch. d. math. Wiss.; im Erscheinen begriffen.)

R. d'Adhémar, L'oeuvre mathématique du XIXe siècle. Rev. quest. scient. Soc. sc. Bruxelles (2) **20**, 177—218, 1901;

S. Günther, Geschichte der anorganischen Naturwissenschaften im neunzehnten Jahrhundert. Berlin 1901. XIX u. 984 S. 8⁰.

Wer sich ein klares Bild von dem Entwicklungsgange der Mathematik in der neueren Zeit verschaffen will, der lese die geistvolle Antrittsvorlesung von

H. Hankel, Die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten. Tübingen 1869, 36 S. 8⁰; 2. Aufl. 1885.

Einen Versuch, die Mathematiker des Altertums in graphischer Weise übersichtlich darzustellen, machte

A. Favaro, Saggio di cronografia dei matematici dell' antichità (a. 600 a. C. — a. 400 d. C.). Padova 1875. Referat von P. Mansion, Bull. bibl. **8**, 185—220, 1875.

Eine chronologische Übersicht über die Geschichte der Mathematik, Physik und Astronomie für Altertum und Mittelalter gibt:

Felix Müller, Zeittafeln zur Geschichte der Mathematik, Physik und Astronomie bis zum Jahre 1500, mit Hinweis auf die Quellenliteratur. Leipzig 1892. IV u. 102 S. 8⁰.

§ 6. **Zeitschriften für Geschichte der Mathematik.** Wir werden im Abschnitt IV ausführlicher von den mathematischen Zeitschriften zu reden haben; hier führen wir einige neuere Zeitschriften an, welche hauptsächlich der Geschichte und Bibliographie der Mathematik gewidmet sind:



Bulletin des sciences mathématiques, astronomiques, physiques et chimiques, rédigé par le Baron de Férussac. Paris 1—6, 1824—31.

Gleichsam eine Fortsetzung dieses Journals war das

Bulletin de bibliographie, d'histoire et de biographie mathématique, publ. p. O. Terquem. Paris 1—8, 1855—62. Anhang zu den Nouvelles Annales.

Die „Literaturzeitung" der Zeitschrift für Mathematik und Physik von O. Schlömilch wurde mit dem 20. Jahrgang dieser Zeitschrift erweitert zu einer Historisch-literarischen Abteilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik, **20—45**, 1875—1900.

Als Supplement zu dieser Zeitschrift erschienen die zehn ersten Hefte, als selbständige Zeitschrift seit 1901 die folgenden Hefte der

Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. In zwanglosen Heften. Leipzig. **1**, 1877 — **20**, 1906 u. flg.

Die bedeutendste historisch-mathematische Zeitschrift war das

Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche. Pubblicato da B. Boncompagni. Roma. **1—20**, 1868—87.

Anfänglich (1884—1886) eine Anzeige von neuen Erscheinungen mit kurzen Notizen, unter dem Titel „Bibliotheca mathematica" (1. Serie), später als selbständige „Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften" erschien die

Bibliotheca mathematica, herausgegeben von Gustav Eneström. Stockholm. (2) **1—13**, 1887—94; (3) **1**, 1900 u. flg.

Fisiko-matematitcheskaia naouki etc. Die physisch-mathematischen Wissenschaften im Gange ihrer Entwicklung. Zeitschrift, herausgegeben von V. V. Bobynin. Moskau. **1—10**, 1885—91; (2) **1—5**, 1900—1904.

Bolletino di bibliografia e storia delle scienze matematiche. Pubblicato per cura di Gino Loria. Torino. **1**, 1898 u. flg. als Fortsetzung des Bullettino gedacht.

Die referierenden mathematischen Zeitschriften, welche keine historischen Artikel bringen, werden wir im IV. Abschnitt anführen.

Es wäre nun unsere Aufgabe, von denjenigen Schriften zu reden, welche die Geschichte einzelner mathematischer Disziplinen behandeln. Da aber diese Schriften zugleich die betreffende Literatur des Gegenstandes bringen, so wird es zweckmäßiger sein, wenn wir sie später an der Stelle bringen, wo wir die spezielle Disziplin zu behandeln haben. Wir wenden uns deshalb sofort zu dem biographischen Teil.

Abschnitt II. Biographisches.

§ 1. **Einleitung.** Im folgenden wollen wir den Studierenden mit denjenigen Schriften bekannt machen, in welchen er über die Lebensumstände hervorragender Mathematiker Auskunft erhält. Zunächst ist zu erwähnen, daß in den meisten der oben genannten Geschichtswerke, besonders in den umfassenderen, auch mehr oder weniger ausführliche Lebensbeschreibungen bedeutender Mathematiker gegeben werden. Auch sind in

diesen Werken die Quellen genannt, aus denen weitere biographische Notizen geschöpft werden können.

§ 2. **Gelehrten-Lexika.** Es wird daher für unsere Zwecke genügen, wenn wir auf einige größere Gelehrten-Lexika hinweisen:

Ch. G. Jöcher, Allgemeines Gelehrten-Lexikon. 4 Bde. 4°. Leipzig 1750—51. Fortsetzung und Ergänzungen dazu von F. C. Adelung, 2 Bde. 4°. 1784—87, und von H. W. Rotermund. 4 Bde. Delmenhorst 1810—19.

J. Michaud, Biographie universelle, ancienne et moderne, rédigée par une Société de gens de lettres. Nouv. éd. Paris. 43 v. 1843 u. flg.

R. v. Liliencron u. a., Allgemeine Deutsche Biographie. Leipzig. 1, 1875 u. flg.

J. G. Meusel, Lexikon der von 1750 bis 1800 verstorbenen deutschen Schriftsteller. 15 Bde. 8°. Leipzig 1802—16.

J. G. Meusel, Das gelehrte Teutschland, oder Lexikon der jetzt lebenden teutschen Schriftsteller, fortgesetzt von J. W. S. Lindener. 23 Bde. Lemgo 1796—1834.

J. M. Quérard, La France littéraire. 12 v. 8°. Paris 1827—39. Corrections, additions etc. 1 v. 1854—57.

A. Chalmers, The general biographical dictionary. New ed. 32 v. 8°. London 1812—17.

F. Höfer, Nouvelle biographie générale. 8°. Paris 1862—66.

Auf diese und zahlreiche andere Quellenschriften, die hier nicht alle aufgezählt werden können, wird übrigens hingewiesen in dem für das Gebiet der exakten Wissenschaften unübertroffenen historisch-literarischen Werke von

J. C. Poggendorff, Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften, enthaltend Nachweisungen über Lebensverhältnisse und Leistungen von Mathematikern, Astronomen, Physikern, Chemikern, Mineralogen, Geologen usw. aller Völker und Zeiten. **1.** Bd. (A—L). **2.** Bd. (M—Z) Leipzig 1863. **3.** Bd. (1858 bis 1883), hrsg. von B. W. Feddersen und A. J. v. Öttingen. 1898. **4.** Bd. (die Jahre 1883 bis zur Gegenwart umfassend), hrsg. von A. v. Öttingen. 1902—1905.

Für die orientalischen Mathematiker ist von Wichtigkeit:

J. Lippert, Ibn Al Qifti, Ta'rib Al-Huhama. Leipzig. XXII u. 496 S. gr. 8. 1903. (Lebensbeschreibungen von ca. 400 arabischen Ärzten, Mathematikern, Astronomen usw. nebst Verzeichnis ihrer literarischen Tätigkeit.) Nach Vorarbeiten von A. Müller.

§ 3. **Einzel-Biographien und Nekrologe.** Ausführlichere Biographien hervorragender Mathematiker finden sich in zahlreichen mathematischen Zeitschriften, ferner in den Berichten der größeren Akademien und gelehrten Gesellschaften und in den Ausgaben der gesammelten Werke von Mathematikern. Berühmt sind ja die Éloges, die von den Mitgliedern der Pariser Akademie (Fontenelle, Mairan, Grandjean de Fouchy, Condorcet, Delambre, Arago, Fourier, Flourens, Bertrand, J. A. Serret, Hermite u. a.) geschrieben sind. Sammlungen solcher Nekrologe sind:

B. de Fontenelle, Éloges des académiciens. 3 vol. 12°. Paris 1719.

N. C. de Condorcet, Éloges des académiciens de l'Académie Royale morts depuis 1666 jusqu'en 1699. Paris. 5 v. 12°. 1773 et 1799.

F. Arago, Notices biographiques. (Oeuvres complètes, publ. par M. J. Barral,

I [638 S.], II [703 S.] 1854, III [628 S.] 1855.) Paris. Deutsch von W. Hankel. 3 Bde. 8°. Leipzig 1856.

Es muß jedem Studierenden der Mathematik ein großer Genuß sein, Arago's elegant geschriebene Histoire de ma jeunesse und seine größeren Biographien von Fresnel, Th. Young, Fourier, L. N. M. Carnot, Ampère, de Condorcet, Monge, Poisson u. a. zu lesen.

Ferner ist hier zu nennen:

J. Bertrand, Éloges académiques. Nouvelle série: Poirsot, Cosson, Chasles, Cordier, Paris, Cauchy, Tisserand, Viète, Galilée, D. Papin, Clairaut, Euler, d'Alembert et Lagrange, Abel, Galois, Faraday, Pasteur. Avec un éloge historique de Joseph Bertrand par G. Darboux. Paris 1902. LI u. 411 S. 16°.

Auch in

R. Wolf, Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz. Zürich 1858—1862. 4 Bde. 8°.

finden sich interessante Biographien von Mathematikern, wie Jac. I. Bernoulli, Joh. I. Bernoulli, G. Cramer, L. Euler, Lambert, Lhuilier, C. F. Sturm u. a.

Die bis 1892 erschienenen Quellen für die Lebensgeschichte der Mathematiker vor 1500 sind in unsern „Zeittafeln" (s. S. 6) leicht zu finden. Ein Verzeichnis von Nekrologen für ca. 260 Mathematiker mit Angabe des Geburts- und Todesjahres enthält:

G. Eneström, Bio-bibliographie der 1881—1900 verstorbenen Mathematiker. Biblioth. math. (3) **2**, 326—350, 1901.

In den folgenden Heften der Bibliotheca math. wird die Literatur der Nekrologe fortgesetzt. Wir erinnern auch daran, daß das „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik" regelmäßig (seit 1868) eine Übersicht über die Nekrologe gibt. Auf diese Quellen mag der Leser zurückgreifen, wenn ihn das folgende Verzeichnis im Stiche läßt, das einige größere Lebensbeschreibungen anführt, die zugleich für die Geschichte der Mathematik im allgemeinen von Wichtigkeit sind.

A. Görland, Aristoteles und die Mathematik. Marburg. VIII u. 211 S. 8°. 1899.

Bunte, Über Archimedes, mit besonderer Berücksichtigung der Lebens- und Zeitverhältnisse, sowie zweier von demselben herrührender Kunstwerke. Progr. Leer 1877.

H. Martin, Recherches sur la vie et les ouvrages d'Héron. Mém. prés. Ac. inscr. IV. Paris 1854. (Jetzt allerdings veraltet.)

F. Predari, Della vita e delle opere di Bonaventura Cavalieri. Milano 1843.

Ad. Müller, Nicolaus Copernicus, der Altmeister der neueren Astronomie. Ein Lebens- und Kulturbild. Freiburg i. Br. VII u. 159 S. 8°. 1898.

L. Prowe, Nicolaus Coppernicus. Berlin I, 1883.

L. R. Birkenmaier, Nicolas Copernic. Ire Partie. Études sur les travaux du célèbre astronome et Matériaux pour servir à sa biographie. Cracovie XIII u. 709. 4°. 1900 (Polnisch).

Millet, Histoire de Descartes. 2 v. Paris I, 1867. II, 1870.

G. Cl. de Nelli, Vita e commercio letterario di Galileo Galilei. Losanna 1793, 2 v. 4°.

Ph. Chasles, Galileo Galilei, sa vie, son procès et ses contemporains. Paris 1862. 8°.

Parchappe, Galilée, sa vie, ses découvertes et ses travaux. Paris 1866. 8°

Th. H. Martin, Galilée, les droits de la science et la méthode des sciences physiques. Paris 1866. 8°. (Jetzt veraltet.)
S. Günther, Biographien Keplers und Galileis. Berlin. VII u. 233 S. 8°. 1897. (Geisteshelden, hrsg. von A. Bettelheim. Bd. 22.)
J. J. Fahie, Galileo: his life and works. London. XVI u. 365 S. 8°. 1903.
F. Fischer, Johannes Keplers Leben und Entdeckungen. Progr. Leipzig 1884.
Ad. Müller, Johann Kepler, der Gesetzgeber der neueren Astronomie. Ein Lebensbild. Freiburg i. Br. 1903. 186 S. 8°.
A. Allégret, Éloge de Viète. Poitiers 1867.
F. Ritter, Viète. Notice sur sa vie et ses oeuvres. Paris 1895. 102 S.
P. Harting, Christian Huygens in zijn leven en werken. Groningen 1868.
M. Napier, Memoirs of John Napier of Merchiston, his lineage, life and times, with a history of the invention of logarithms. London 1834.
D. Brewster, The life of Sir Isaac Newton. London 1831; 2[d] ed. 2 v. 8°. 1860; deutsch von Goldberg, Leipzig 1833; franz. von Peyrot, Paris 1836. 16°.
Ferd. Rosenberger, Isaac Newton und seine physikalischen Principien. Ein Hauptstück aus der Entwicklungsgeschichte der modernen Physik. Leipzig VI u. 636 S. 8°. 1895.
Guhrauer, Gottfried Wilhelm von Leibniz. 2 Bde. Breslau 1842, nebst Nachtrag 1846.
Luisa Anzoletti, Maria Gaetana Agnesi. Milano 1900. 495 S. 8°.
P. Merian, Die Mathematiker Bernoulli. Basel 1860. 4°.
F. Giesel, Jacob I Bernoulli. Progr. Leer 1869.
Nic. Fuß, Éloge de M. Léonard Euler. St. Petersburg 1783. 124 S. Deutsch Basel 1786. 8°.
G. B. Biadego, Intorno alla vita ed agli scritti di Gianfrancesco Malfatti, matematico del secolo XVIII. Bull. bibl. stor. Boncompagni **9**, 361—480. 1876. (Darin Briefe von Malfatti und eine Bibliographie des Malfatti'schen Problems.)
F. Lefort, Documents relatifs à la vie et aux travaux scientifiques ou littéraires de Jean Baptiste Biot. Bull. bibliogr. Terquem **8**, 57—80, 1862.
Fr. Schmidt, Aus dem Leben zweier ungarischer Mathematiker Johann und Wolfgang Bolyai von Bolya. Arch. f. Math. u. Phys. (1) **48**, 217—228. 1868. Französ. Mém. Soc. Sc. phys. Bordeaux **5**, 191—204, und in Jean Bolyai, La science absolue de l'espace. Paris 1868.
L. Schlesinger, Johann Bolyai. Festrede. Stzgsber. Dtsch. Math. Ver. **12**, 165—194, 1903.
Sartorius von Waltershausen, Gauß zum Gedächtnis. Leipzig 1856.
F. A. T. Winnecke, Gauß. Ein Umriß seines Lebens und Wirkens. Braunschweig. 1877.
Th. Wittstein, Carl Friedrich Gauß. Hannover 1877. 8°.
A. Forti, Intorno alla vita ed alle opere di Luigi Lagrange. Pistoja 1868, 2. ed. Roma 1869. 8°.
J. B. J. Delambre, Éloge historique de M. de Lalande. Mém. Inst. **8**, 30—57. 1807. Paris 1807—08.
D. Huber, J. H. Lambert, nach seinem Leben und Wirken. Basel 1829. 8°.
Elie de Beaumont, Adrien Marie Legendre. Éloge historique. Mém. Ac. sc. Inst. Paris **32**, XXXVII—XCIV, 1864.
Ch. S. Dupin, Essai historique sur les services et les travaux scientifiques de Gaspard Monge. Paris 1819.
I. Didion, Notice sur la vie et les ouvrages du général Jean Victor Poncelet. Paris 1869.
C. A. Bjerknes, Niels-Henrik Abel, sa vie et son action scientifique. Mém. Ac. Bordeaux (3) 1, 1—365. 1885; auch Paris 1885, 368 S.
Ch. Lucas de Pesloüan, N. H. Abel. Sa vie et son oeuvre. Paris 1906. XIII u. 169. 8°.

Niels Henrik Abel, Mémorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance. Kristiania, Paris, Leipzig 1902. XII u. 438 S.
J. F. Encke, Gedächtnisrede auf Friedrich Wilhelm Bessel. Abh. Ak. Berlin 1846.
J. F. W. Herschel, A brief notice of the life, researches and discoveries of F. W. Bessel. London 1847. 8⁰.
S. Dickstein, Hoene Wronski. Sein Leben und seine Werke. Krakau. IV u. 368 S. 1895 (Polnisch).
C. A. Valson, La vie et les travaux du baron Cauchy. Paris 1868. 2 v. 8⁰.
A. De la Rive, Notice sur Michel Faraday, sa vie et ses travaux. Genève 1867.
J. Tyndall, Faraday as a discoverer. London 1868. Deutsch von Helmholtz. Braunschweig 1870.
S. P. Thompson. Michel Faraday. His life and work. New York. IX u. 308. 12⁰. 1898.
C. Bruhns, Johann Franz Encke, sein Leben und Wirken. Leipzig 1869.
E. S. Holden, Sir William Herschel, his life and works. New York 1881. 8⁰.
P. Lejeune Dirichlet, Gedächtnisrede auf C. G. J. Jacobi. Abh. Ak. Berl. 1852; J. f. Math. **52**, 193—218, 1856, J. math. p. appl. Liouville (2) **2**, 1857; Arch. Math. Phys. **22**, 158—182, 1854.
L. Königsberger, Carl Gustav Jacob Jacobi. Festschrift. Leipzig, XVIII u. 554 S. 1904.
P. Dupuy, La vie d'Évariste Galois. Ann. Éc. Norm. (3) **13**, 197—266, 1895.
E. Kummer, P. Lejeune Dirichlet. Gedächtnisrede. Abh. Ak. Berlin 1860, J. f. Math. **57**. 1860.
C. W. Borchardt, Otto Hesse. J. f. Math. **79**, 345—347. 1875.
Felix Klein, Otto Hesse. Bericht Polyt. Schule München 1874/5, 46—50.
M. Nöther, Otto Hesse. Z. f. Math. Phys. Ill. Abt. **20**, 77—88. 1875.
A. Gretschel, August Ferdinand Möbius. Arch. Math. Phys. **49**, 1869.
A. Clebsch, Zum Gedächtnis an Julius Plücker. Abh. Ges. Gött. 1871; franz. von P. Mansion, Bull. bibl. stor. Boncompagni **5**, 183—212. 1872 (mit einem Verzeichnis der Arbeiten).
A. Dronke, Julius Plücker. Bonn 1871.
v. Martins, C. G. Chr. von Staudt. Nekrolog. Arch. Math. Phys. **49**, 1869.
O. Hesse, Jacob Steiner. J. f. Math. **62**. 1863.
C. F. Geiser, Zur Erinnerung an Jacob Steiner. Zürich 1874.
J. H. Graf, Der Mathematiker Jacob Steiner von Utzendorf. Ein Lebensbild und zugleich eine Würdigung seiner Leistungen. Bern. 54 S. 1897.
P. Volkmann, Franz Neumann (11. Sept. 1798 bis 23. Mai 1895). Leipzig. VII u. 68, 1896.
Luise Neumann, Franz Neumann. Erinnerungsblätter. Tübingen und Leipzig. XII u. 463 S. gr. 8⁰.
A. Wangerin, Franz Neumann. Braunschweig 1907. X u. 185 S. 8⁰.
K. Lasswitz, Gustav Theodor Fechner. Stuttgart. VIII u. 207 S. 1897; 2. verm. Aufl. VIII u. 205. 1902.
W. Wundt, Gustav Theodor Fechner. Leipzig VI u. 92 S. gr. 8⁰. 1901.
A. Wassilief, Pafnutii Lvooitch Tchébichef et son oeuvre scientifique. Turin 56 S. 1898. Deutsche Ausgabe. Leipzig 1900.
Friedr. Engel, Sophus Lie. Rede. Ber. Sächs. Ges. Leipzig. **51**, XI—LXI, 1899; Verz. d. Schriften Lie's Bibl. math. (3) **1**, 166—204. 1900.
M. Nöther, Sophus Lie. Math. Ann. **53**, 1—41, 1900.
H. Poincaré, L'oeuvre mathématique de Weierstraß. Acta math. **22**, 1—18, 1898.
E. Picard, L'oeuvre scientifique de Charles Hermite. Ann. Éc. Norm. (2) **18**, 9—34, 1901.
M. Nöther, Charles Hermite. Math. Ann. **55**, 337—385. 1901.
G. Loria, Eugenio Beltrami e le sue opere matematiche. Bibl. math. (3) **2**, 392—440, 1901.

L. Königsberger, Hermann von Helmholtz. Braunschweig. 3 Bde. I, XII u. 375, 1902; II, XVI u. 383, 1903; III, x u. 142 S., 1903.
J. Reiner, Hermann von Helmholtz. Leipzig 1905. 204 S. 8°.
G. Loria, L'oeuvre mathématique d'Ernest de Jonquières. Bibl. math. (3) **34**, 276—322, 1902; Pubblicaz. mat. di Jonquières. Bullet. bibl. sc. mat. (3) **5**, 71—82, 1902.
P. Duhem, Notice sur la vie et les travaux de George Brunel (1856—1900). Mém. Soc. Bordeaux (6) **2**, I—LXXXIX. 1903.
G. Loria, Luigi Cremona. Bibl. math. (3) **5**, 125—195. 1904.
G. Darboux, Joseph Louis François Bertrand. Mém. Ac. sc. Paris **47**, 321—386. 1904.
Felix Müller, Karl Schellbach. Rückblick auf sein wissenschaftliches Leben. Nebst zwei Schriften aus seinem Nachlaß und Briefen von Jacobi, Joachimsthal und Weierstraß. 86 S. Leipzig 1905 (Abh. Gesch. d. math. Wiss. XX. Heft St. 1).
Al. Macfarlane, Peter Guthry Tait, his life and works. Bibl. math. (3) 4, 185—200. 1903.
Ludw. Boltzmann, Gustav Robert Kirchhoff. Festrede. Leipzig 1887. 32 S.
Eduard Riecke, Rudolf Clausius. Rede. Göttingen 1888. 39 S. 4°.

Abschnitt III. Gesammelte Werke. Klassikerausgaben.

§ 1. **Einleitung.** Das Studium von Originalarbeiten ist für den Studierenden der Mathematik unumgänglich notwendig. Beim Aufsuchen der Quellenschriften wäre der Studierende häufig genötigt, seltene Einzelwerke sich zu verschaffen oder schwer zugängliche Zeitschriften einzusehen, wenn nicht die Werke hervorragender Mathematiker gesammelt herausgegeben wären. Leider vermissen wir noch immer eine Gesamtausgabe der Werke mehrerer großer Mathematiker, wie Dan. Bernoulli, Euler, Clairaut, Lambert, Kästner, Delambre, Lalande, Legendre, Monge, van Swinden, Kummer, J. A. Serret, Clebsch, Genocchi, Gilbert, Sophus Lie, Jean Plana, Le Besgue u. a.

Bis heute sind die Gesammelten Werke von ungefähr 300 Mathematikern veröffentlicht worden. Aus dieser Zahl ergibt sich, daß ein vollständiges Verzeichnis dieser Gesammelten Werke hier nicht gegeben werden kann. Wir begnügen uns, einige derselben anzuführen, von deren Existenz jeder Studierende der Mathematik Kenntnis haben sollte.

§ 2. **Altertum.** Aus dem Altertum sind besonders die Werke eines Euklid, Archimedes, Apollonius, Aristoteles, Pappus, Diophant, Ptolemäus, Heron, Serenus und die Scriptores metrologici zu nennen. Die Ausgaben Euclids sind sehr zahlreich. Die beiden ersten Ausgaben der Elemente druckte zu Venedig 1482 Erhardus Ratdolt: Praeclarissimum Opus elementorum Euclidis Megarensis una cum commentis Campani. Die neueste Ausgabe ist die auf 12 Bände veranschlagte:
Euclidis Opera omnia. Ediderunt et latine interpretati sunt J. L. Heiberg et H. Menge. Leipzig 1883 u. flg. Sie enthält: V. I, libb. 1—4, x u. 333 S. 1883; II, libb. 5—9, XXII u. 437 S. 1884; III, lib. 10, VI u. 417 S. 1886; IV, libb. 11—13, VI u. 423 S. 1885; V. Elementorum qui feruntur libb. 14—15 et

scholia in elementa cum prolegomenis criticis et appendicibus. CXIII u. 738 S. 1896; VI. Data cum commentariis Marini et scholiis antiquis ed. Menge. LXII u. 336 S. 1896; VII. Optica, opticorum recensio Theonis, Cat. optrica, cum scholiis antiquis ed. Heiberg. LV u. 362 S. 1895.

Noch nicht erschienen sind die Phaenomena, die beiden musikalischen Schriften, die Fragmente der verlorenen Schriften, die Scholien. Als Supplement erschien:

Anaritii Elementorum Euclidis commentarii, ed. M. Curtze. XXIX u. 390 S. 1899.

Eine frühere sehr wertvolle Ausgabe Euclids ist:

Les Oeuvres d'**Euclide,** en grec, en latin et en français par Fr. Peyrard. 3 v. 4°. Paris 1814—18.

Eine ältere sehr geschätzte Ausgabe muß hier noch erwähnt werden:

Εὐκλείδου τὰ σωζόμενα, Euclidis quae supersunt omnia (gr. et lat.), ex recensione Dav. Gregorii. Oxoniae 8 Bl. u. 686 S. fol. 1703.

Eine gute deutsche Übersetzung der Elemente ist folgende:

Euclid's Elemente. 15 Bücher. Aus dem Griechischen übersetzt von J. Fr. Lorenz. Halle 1781. 366 S. 8°. Auch 1798, und 6. Ausg. 1840 von Dippe.

Zahlreich sind auch die Ausgaben der Werke des Archimedes. Die neuesten Ausgaben sind:

Archimedis Opera omnia cum commentariis Eutocii. E codice Florentino recensuit, latine vertit notisque illustravit J. L. Heiberg. 3 voll. Leipzig 1880—81. 8°. I, XII u. 499 S.; II, VIII u. 468 S.; III, XCII u. 525 S.

The works of **Archimedes.** Edited in modern notation, with introductory chapter, by T. L. Heath. Cambridge. CLXXXVI u. 326 S. 1897.

Die beste deutsche Übersetzung ist:

Archimedes von Syrakus Vorhandene Werke. Aus dem Griechischen übersetzt und mit erläuternden und kritischen Anmerkungen begleitet von Ernst Nizze. Stralsund 4°. 1827.

Eine französische Übersetzung:

Oeuvres d'**Archimède,** traduites littéralement avec un commentaire par F. Peyrard. Paris. 2 v. 4°. 1807; 2^d^ éd. 1808.

Die beste ältere Ausgabe des Textes und der Kommentare ist:

Archimedis Opera, quae supersunt omnia, cum Eutocii Ascalonitae commentariis, graece et latine, ex recensione Jos. Torelli. Oxoniae fol. 1792.

Die beste ältere Ausgabe der Kegelschnitte des Apollonius gab Edmund Halley, Oxford 1710. Die neueste Ausgabe der Opera ist:

Apollonii Pergaei quae Graece exstant cum commentariis antiquis. Edidit et latine interpretatus est J. L. Heiberg. Leipzig. 2 v. 8°. I, XII u. 541 S., 1890; II, LXXXV u. 361 S., 1893.

Die mathematischen Schriften des Aristoteles sammelte Giuseppe Biancani in der Ausgabe:

Aristotelis loca mathematica, ex universis ipsius operibus collecta et explicata a Jos. Blancano. Bononiae 1615. 4°.

J. L. Heiberg, Mathematisches zu Aristoteles. Abh. z. Gesch. d. math. Wiss. **18**, 1—49, 1904.

Die große Ausgabe der sämtlichen Werke des Aristoteles durch die Berliner Akademie erschien in 5 Bänden 1831, 1836 und 1870. Im letzten ist der berühmte Index Aristotelicus von Bonitz. Eine neuere Ausgabe ist:

Aristotelis Opera omnia recc. W. Christ, B. Langkavel, C. Prantl, alii. Leipzig 1868—1895. Die Physica erschien 1879, Metaphysica 1895, Mechanica, de libris insecabilibus etc. 1886.

Die *Μαθηματικαὶ συναγωγαί* des Pappos, deren 6 letzte Bücher F. Commandino Pesaro 1588 lateinisch herausgab, erfuhren eine ausgezeichnete Ausgabe durch Hultsch:

Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt e libris manu scriptis edidit, latina interpretatione et commentariis instruxit Fridericus Hultsch. Berlin. I, 1876; II, 1877; III, 1878. 1488 S.

Nachdem G. Wertheim die Arithmetik und die Schrift über Polygonalzahlen des Diophantus von Alexandria übersetzt und mit Anmerkungen begleitet, Leipzig 1890, herausgegeben hatte, erschien die Gesamtausgabe:

Diophanti Alexandrini Opera omnia cum graecis commentariis. Edidit et latine interpretatus est P. Tannery. Leipzig. 2 v. 8°. I, Diophanti quae exstant omnia continens 1893, IX u. 481 S. II, Continens pseudepigrapha, testimonia veterum, Pachymerae paraphrasin, Planudis commentarium, scholia vetera. 1895. XLVII u. 298 S.

Von Claudius Ptolemäus Werken war schon 1551 zu Basel eine Gesamtausgabe, mit Ausnahme der Geographie, erschienen. Neuere Ausgaben sind:

Claudii Ptolemaei Opera quae exstant omnia. Vol. I. Syntaxis mathematica, ed. J. L. Heiberg. 2 partes. Pars I, libr. 1—6 continens. Leipzig 1898. VI u. 546 S. 8°. Pars II, libr. 7—13 continens. 1903. IV u. 608 S.

Cl. Ptolemaeus, Graece et latine. Rec., indicibus, tabulis instruxit C. Müller. Vol. I, 2 partes. Paris 1883—1901.

Die Expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium des Theon von Smyrna gab Ed. Hiller heraus (Leipzig 1878, VIII u. 216 S.). Als Gesamtausgabe der Werke Theons erschien später:

Théon de Smyrne, Oeuvres, traduites pour la première fois du grec en français, avec le texte en regard, par J. Dupuis. Ajouté un Mémoire sur le nombre géométrique de Platon. Paris. 1893. XXVII u. 404 S. gr. 8°.

Endlich seien genannt:

Sereni Antinoensis Opuscula. Edidit et latine interpretatus est J. L. Heiberg. XIX u. 303 S. 8°. Leipzig 1896.

Werke griechischer und römischer Metrologici sind enthalten in:

Scriptorum metrologicorum reliquiae. Collegit, recensuit, partim nunc primum edidit Fridericus Hultsch. 2 v. 8°. Leipzig. I, quo scriptores Graeci continentur. XXIV u. 355 S. 1864; II, quo scriptores Romani continentur. XXXII u. 264 S. 1866.

§ 3. **Neuere Zeit.** Wir übergehen die Ausgaben der gesammelten Werke von Mathematikern im früheren und späteren Mittelalter, da ihre Kenntnis meist nur für spezielle mathematisch-historische Studien von Bedeutung ist. Für das 16. und 17. Jahrhundert kommen hier in Betracht die folgenden: Galilei, Kepler, Wallis, Pascal, Fermat, Descartes, Huygens, Leibniz und Newton.

Le Opere di **Galileo Galilei.** Edizione nazionale sotto gli auspicii di Sua Maestà il Re d'Italia. Pubbl. da A. Favaro. Firenze I—XVIII, 1890—1906. 4°.



Ioannis Kepleri Astronomi Opera omnia. Edidit Chr. Frisch. 8 v. 8⁰. Francof. et Erlang. 1858—71. Ergänzung: Ungedruckte wissenschaftliche Korrespondenz zwischen Johann Kepler und Herwart von Hohenburg. Hrsg. von C. Anschütz. Stzgsb. Böhm. Ges. Prag 1886. 118 S.

John Wallis, Opera mathematica. 3 vol. fol. Oxoniae 1695—99.

Blaise Pascal, Oeuvres mathématiques et philosophiques, publ. par Bossut. 5 v. 8⁰. La Haye et Paris 1779; 2^d éd. par Lefèvre. 6 v. 8⁰. Paris 1819.

Oeuvres de **P. de Fermat,** publiées par les soins de Paul Tannery et Charles Henry sous les auspices du ministère de l'instruction publique. Paris 4⁰. 3 v. I. Oeuvres mathématiques diverses. Observations sur Diophante. xxxvii u. 440 S. 1891. II. Correspondance. xii u. 514 S. 1894. III. Traductions par P. Tannery. 1. Des écrits et fragments latins de Fermat. 2. De l'Inventum novum de Jacques de Billy. 3. Du Commercium epistolicum de Wallis. xvi u. 611 S. 1896.

Oeuvres de **Descartes,** publiées par Charles Adam et Paul Tannery, sous les auspices du Ministère de l'instruction publique. Paris. I. Correspondance (Avril 1622 — Févr. 1638) cv u. 589 S. 4⁰. 1897. II. Correspondance (Mars 1638 — Déc. 1639) xxiii u. 653 S. 1898. III. Correspondance (Janv. 1640 — Juin 1643) iv u. 722 S. 1899. IV. Correspondance (Juillet 1643 — Avril 1647) vi u. 708 S. 1901. V. Correspondance (Mai 1647 — Févr. 1650) 669 S. 1903. VI. Discours de la méthode et Essais. xiv u. 727 S. 1903. VII. Meditationes de prima philosophia. xvi u. 612. 1904. VIII. Principia philosophiae. 1906. IX. Méditations et principes. Trad. fr. x u. 244, xx u. 358. 1904.

Da diese Ausgabe noch nicht vollständig ist, so erwähnen wir auch eine frühere:

Renati Descartes Opera omnia. Amstel. 1692—1701. 9 v. 4⁰: I. Principia philosophiae, dissertatio de methodo; dioptrice et meteora. II. Meditationes de prima philosophia; Passiones animae. III. Tractatus de homine. IV. V. Geometriae 2 vol. VI. VII. VIII. Epistolae. IX. Opera posthuma.

Oeuvres complètes de **Christian Huygens,** publiées par la Société hollandaise des sciences. La Haye 4. Correspondance: I (1638—56) xiv u. 621 S. 1888. II (1657—59) 638 S. 1889. III (1660—61) 591 S. 1890. IV (1662—63) 520 S. 1891. V (1664—65) 625 S. 1893. VI (1666—69) 1895. VII (1670—75) 624 S. 1897. VIII (1676—84) 631 S. 1899. IX (1685—90) 662 S. 1901. (1691—95) 1905. Wird fortgesetzt.

Chr. Hugenii Opera varia, mathematica, geometrica et astronomica cum posthumis, cura Guil. Jac. s'Gravesande. 4 t. 4⁰. Lugd. Bat. 1724. (Cont.: Horologium oscillatorium; Brevis institutio de usu horologiorum ad inveniendas longitudines; Theoremata de quadratura hyperbolae, ellipsis et circuli, ex dato portionum gravitatis centro; De circuli magnitudine inventa, accedunt problematum quorundam illustrium constructiones; De Saturni luna observatio nova; De ratiociniis in ludo aleae, etc.)

Leibnizens Gesammelte Werke, aus den Handschriften der Königlichen Bibliothek zu Hannover, herausgegeben von Georg Heinrich Pertz. 3. Folge. Mathematik. Auch unter dem Titel:

Leibnizens Mathematische Schriften, herausg. von Carl Imm. Gerhardt. I. Abt. Bd. I—IV, Berlin 1849 u. 1850 (Briefwechsel), III—IV, Halle 1855 bis 1859 (Briefwechsel). II. Abt. I. Halle 1858 (Dissertatio de arte combinatoria. De Quadratura arithmetica circuli, ellipseos et hyperbolae. Caracteristia geometrica. Analysis geometrica propria. Calculus situs. Analysis infinitorum. Beilagen). II. Halle 1860 (Dynamica). III. Halle 1863 (Initia mathematica. Mathesis universalis. Arithmetica. Algebraica. Geometria. Leibniz an den Freiherrn von Bodenhausen).

Der Briefwechsel von **Gottfried Wilhelm Leibniz** mit Mathematikern, hersg. von C. J. Gerhardt. Neue Auflage. I. Berlin 1898. xxviii u. 766 S. gr. 8⁰.



Die philosophischen Schriften von **G. W. Leibniz,** hersg. von C. J. Gerhardt. Halle 1875—82. 7 Bde.

Leibnizens Nachgelassene Schriften physikalischen und technischen Inhalts. Hrsg. von E. Gerland. Leipzig 1906. 256 S. (Abh. z. Gesch. d. math. Wiss. Heft XXI).

Isaac Newton, Opera quae exstant omnia, commentariis illustravit Sam. Horsley. 5 v. 4⁰. London. I. (Arithmetica universalis. Tractatus de rationibus primis ultimisque. Analysis per aequationes numero terminorum infinitas. Excerpta quaedam ex epistolis ad series fluxionesque pertinentia. Tractatus de quadratura curvarum. Geometria analytica sive specimina artis analyticae. Methodus differentialis. Enumeratio linearum tertii ordinis) 1779. II. (Philosophiae naturalis principia mathematica. Lib. 1, 2. De motu corporum). 1779. III. (Principia l. 3. De systemate mundi. De mundi systemate. Theoria lunae. Lectiones opticae). 1782 IV. (Opticks. Letters on various subjects in natural philosophy. Letter to Mr Boyle on the cause of gravitation. Tabulae duae, Calorum altera, altera refractionum. De Problematibus Bernoullianis. Propositions for determining the motion of a body urged by two central forces. Four lettres to Dr Bentley. Commercium epistolicum de varia re mathematica. Additamenta commercii epistolici ad historiam fluxionum Raphsoni) 1782. V. (Meist Theologisches) 1785.

Da hier seine Briefe aus dem Commercium epistolicum fehlen, so verweisen wir auf die vollständige Ausgabe:

Commercium epistolicum **J. Collins** et aliorum de analysi promota. Par J. B. Biot et F. Lefort, Paris 1856. xv u. 293 S. 4⁰. (Briefe von J. Gregory. Is. Barrow, Oldenburg, Alf. Borelli, Collins, Sluze, Wallis, Dav. Gregory, Tschirnhaus, Leibniz, Keill, Newton, Sloane).

§ 4. **XVIII. Jahrhundert.** Was das 18. Jahrhundert betrifft, so haben wir oben (S. 12) schon erwähnt, daß eine Gesamtausgabe der Werke Leonh. Eulers noch fehlt. Eine solche würde, nach R. Wolfs Angabe, nicht weniger als 16000 Quartseiten füllen. Erschienen sind:

L. Euler, Opuscula varii argumenti. 3 t. 4⁰. Berol. 1746—51. (Im ganzen 13 Abhandlungen.) Ferner:

L. Euler, Opuscula analytica. 2 t. 4⁰. Petrop. 1783—85. Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII. siècle. Par P. H. Fuß. 2 v. 8⁰. Pétersb. 1843. (Eine wichtige Sammlung, in der auch Briefe von Euler); andere Briefe von Euler Bibl. math. (3) **4—7**, 1903—1906.

L. Euler, Opera minora collecta. Commentationes arithmeticae collectae, ed. P. H. et Nic. Fuß. 2 v. 4⁰. Petrop. 1849. (War auf 8 Bände veranschlagt).

L. Euler, Opera posthuma mathematica et physica, anno 1844 detecta. Ed. P. H. et Nic. Fuß. 2 v. 4⁰. Petrop. 1862.

Auch nicht vollständig sind die Ausgaben der Werke

d'Alemberts, Oeuvres philosophiques, historiques et littéraires de d'Alembert. Publ. par J. F. Bastien. 18 v. 8⁰. Paris 1805.

d'Alembert, Opuscules mathématiques. 8 v. 8⁰. Paris 1761—80.

d'Alembert, Correspondance inédite (avec Cramer, Lesage, Clairaut, Turgot et a.). Publ. par Ch. Henry. Bullett. bibl. soc. **18**, 507—570, 605—660. 1887.

Dagegen haben wir vorzügliche Ausgaben der Werke von Johann I. Bernoulli, Jacob I. Bernoulli, Laplace, Lagrange und Fourier.

Johannes Bernoulli, Opera omnia, tam antea sparsim edita, quam hactenus inedita. Lausannae et Genevae 1742. 4 v. 4⁰ (Ed. G. Cramer, 189 Aufsätze).

Virorum celeberrimorum **God. Gul. Leibnitii** et **Joh. Bernoulli** Commercium

philosophicum et mathematicum ab a. 1694—1716. 2 v. 4° Lausannae et Genevae 1745 (275 Briefe).

Jac. Bernoulli, Opera omnia mathematica. 2 v. 4°. Genevae 1744.

Oeuvres complètes de **Laplace,** publiées sous les auspices de l'Académie des sciences. Par Puiseux, Tissérand, J. Houël. 13 v. 4°. Paris. I—V (Traité de mécanique céleste) 1878—82, VI (Exposition du système du monde) 1884, VII (Théorie des probabilités) 1886, VIII—XIII (Mémoires divers) 1887 bis 1904.

Oeuvres de **Lagrange,** publ. par les soins de J. A. Serret et G. Darboux, sous les auspices du Ministre de l'Instruction publique. Paris 14 v. 4°. I. Série. I—VII (Mémoires imprimés dans les Recueils des Académie de Turin, de Berlin et de Paris; Pièces diverses publiées séparément) 1867—77; IV. Série. 1879—92. VIII—XIV. (Les Ouvrages didactiques, la Correspondance et les Mémoires inédits). VIII (Résolution des équations numériques) 1879; IX (Théorie des fonctions analytiques) 1881; X (Leçons sur le calcul des fonctions) 1884. XI (Mécanique analytique I. Statique) 1888; XII (Mécanique analytique II. Dynamique) 1889; XIII (Correspondance inédite de Lagrange et d'Alembert, p. p. Lud. Lalanne) 1882; XIV (Correspondance de Lagrange avec Condorcet, Laplace, Euler et divers savants) 1892.

Oeuvres de **Fourier** publ. par les soins de Gaston Darboux, sous les auspices du Ministre de l'Instruction publique. Paris. 4°. I (Théorie analytique de la chaleur) XXVIII u. 563 S. 1888; II (Mémoires publiés dans divers recueils). XVI u. 636 S. 1890.

§ 5. **XIX. Jahrhundert.** Die bei weitem größte Zahl von Mathematikern, von deren gesammelten Werken ein durchgebildeter Mathematiker Kenntnis haben sollte, gibt es im 19. Jahrhundert. Zu den gesammelten Werken und dem Briefwechsel kommen hier noch die veröffentlichten Vorlesungsreihen. Um das Auffinden zu erleichtern, folgen wir der alphabetischen Anordnung: Abel, Arago, Beltrami, Bessel, Borchardt, Brioschi, Cauchy, Cayley, Dirichlet, Encke, L. Fuchs, Galois, Gauß, Graßmann, Helmholtz, Hermite, Hertz, Jacobi, Kirchhoff, Kronecker, E. Laguerre, L. Lorenz, Möbius, Franz Neumann, Plücker, Riemann, Steiner, G. G. Stokes, Sylvester, Tschebyscheff, Wilh. Weber, Weierstraß.

Niels Henric Abel, Oeuvres complètes. Nouv. éd. publ. aux frais de l'État Norvégien par MM. L. Sylow et S. Lie. 2 v. 4°. Kristiania, Leipzig I, VIII u. 621 S. II, IV u. 340 S. 1881. (Den Briefwechsel Abels siehe in dem oben (S. 11) erwähnten Mémorial.)

Oeuvres complètes de **François Arago,** publ. par J. B. Barral. 17 v. 8°. Paris 1854—62. Astronomie populaire, 4 v. Notices biographiques, 3 v. Notices scientifiques, 5 v. Voyages scientifiques, 1 v. Mémoires scientifiques, 1 v. Mélanges, 1 v. Tables analytiques, 1 v. 900 S.

F. Arago, Sämtliche Werke. Dtsch. Ausg. von W. G. Hankel. 16 Bde. Leipzig 1854—60.

E. Beltrami, Opere matematiche. Publicate per cura della Facolta di Scienze della R. Universita di Roma. Milano. 4°. I. 1902. 459 S. II. 1904. 468 S.

Fr. W. Bessel, Abhandlungen. Hrsg. von R. Engelmann. 3 Bde. 4°. Leipzig. I. Bewegung der Körper im Sonnensystem. Sphärische Astronomie. 345 S. 1875. II. Theorie der Instrumente. Stellarastronomie. Mathematik. 404 S. 1876. III. Geodäsie. Physik. Verschiedenes. 540 S. 1876.

Briefwechsel zwischen **Gauß** und **Bessel.** Hrsg. auf Veranlassung der Berliner Akademie. 1880. 598 S. 4°. — Zwischen **Olbers** und **Bessel.** Hrsg. von



A. Erman. 2 Bde. Leipzig 1852. 8°. 935 S. — Ergänzung: Zwölf Briefe von **Bessel** an **Olbers.** Stzgb. Ak. Berlin 1900, 745—762.

C. W. Borchardt, Gesammelte Werke. Auf Veranlassung der K. Preuß. Akademie d. Wiss. hrsg. von G. Hettner. Berlin. x u. 511 S. 4°. 1888.

Opere matematiche di **Francesco Brioschi.** Milano. 3 v. 4°. 1901—1904.

Oeuvres complètes d'**Augustin Cauchy.** Publ. sous la direction scientifique de l'Académie d. sc. Paris 27 v. 4°, I^me^ Série. Mémoires, notes et articles extraits de Recueils de l'Académie des sciences. 12 v. 1882—1900. IIme Série. Mémoires extraits de divers Recueils, Ouvrages classiques, Mémoires publiés en corps d'ouvrage, Mémoires publiés séparément. 15 v. 1887—59.

G. Lejeune Dirichlet, Gesammelte Werke. Hrsg. auf Veranlassung der K. Preuß. Akademie d. Wiss. von L. Kronecker, fortgesetzt von L. Fuchs I, x u. 644 S. 4°. 1889. II. x u. 422 S. 1897.

Briefwechsel zwischen **G. Lejeune-Dirichlet** und **H. Leopold Kronecker.** Nachr. Ges. Göttingen 1885, 361—382.

J. F. Encke, Gesammelte mathematische und astronomische Abhandlungen. Berlin. 3 v. 8°. 1888—89. I. Allgemeines betr. Rechnungsmethoden. II. Methode der kleinsten Quadrate, Fehlertheoretische Untersuchungen. III. Astronomische und optische Abhandlungen.

L. Fuchs, Gesammelte mathematische Werke. Hrsg. von R. Fuchs und L. Schlesinger. I. Abhandlungen (1858—75). II (1875—87) Berlin 1904 —06. VIII u. 476, x u. 487 S. 4°.

Évariste Galois, Oeuvres mathématiques, Publ. sous les auspices de la Société mathématique de France, avec une Introduction par M. Émile Picard. Paris. x u. 63. 8°. 1897.

Carl Friedrich Gauß, Werke. Hrsg. von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 10 Bde. gr. 4°. Leipzig 1870—1906. I. Disquisitiones arithmeticae. 2. Abdruck 478 S. 1876. II. Höhere Arithmetik. 2. Abdr. 528 S. und Nachtrag zum 1. Abdr. des 2. Bandes. 33 S. 1876. III. Analysis. 2. Abdr. 499 S. 1876. IV. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Geometrie. 2. Abdr. 492 S. 1880. V. Mathematische Physik. 2. Abdr. 642 S. 1877. VI. Astronomische Abhandlungen. 2. Abdr. 664 S. 1874. VII. Theoria motus corporum coelestium. Astronomischer Nachlaß. 1906. 650 S. VIII. Ergänzungen zu I—III u. IV. (Nachträge zur Arithmetik, Analysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Geometrie; Grundlagen der Geometrie). 458 S. 1900, IX. Geodätische Nachträge zu Bd. IV; insbes. Hannoverische Gradmessung. 528 S. 1903. X. Biographisches. Briefwechsel. (In Vorbereitung.)

Briefwechsel zwischen **C. Fr. Gauß** und **Wolfg. Bolyai.** Mit Unterstützung der ungarischen Akademie hrsg. von Franz Schmidt und Paul Stäckel. Leipzig. XIV u. 208 S. 4°. 1899.

Briefwechsel zwischen **Olbers** und **Gauß.** Hrsg. von C. Schilling, Berlin 1900 (Leben und Werke Olbers. II, 1. 380 Briefe).

H. Graßmann, Gesammelte mathematische und physikalische Werke. Auf Veranlassung der mathematisch-physikalischen Klasse der Königl. Sächs. Ges. d. Wiss. hrsg. von Fr. Engel. 3 Bde. gr. 8°. Leipzig. I. 1. T. Die Ausdehnungslehre von 1844 und die geometrische Analyse. XVI u. 435 S. 1894. I. 2 T. Die Ausdehnungslehre von 1862. VIII u. 511 S. 1896. II. 1. T. Die Abhandlungen zur Geometrie und Analysis. x u. 452 S. 1904. II. 2. T. Die Abhandlungen zur Mechanik und zur mathematischen Physik. 256 S. 1902. III. (In Vorbereitung.)

H. v. Helmholtz, Wissenschaftliche Abhandlungen. Leipzig. 3 Bde. 1882, 1883, 1895.

H. v. Helmholtz, Vorlesungen über theoretische Physik. Leipzig 8°. 6 Bde. I. 1. Abt. Einleitung zu den Vorlesungen über theoretische Physik. Hrsg. von A. König und C. Runge. VIII u. 50 S. 1903. I. 2. Abt. Vorlesungen über die Dynamik diskreter Massenpunkte. Hrsg. von O. Krigar-Menzel.

x u. 380. 1898. II. Dynamik kontinuierlich verbreiteter Massen, hrsg. von O. Krigar-Menzel. VIII u. 248. 1898. III. Mathematische Prinzipien der Akustik. Hrsg. von A. König und Carl Runge. XIV u. 256. 1898. IV. Elektrodynamik und Theorie des Magnetismus. Hrsg. von O. Krigar-Menzel und Max Laue. 1907. V. Elektromagnetische Theorie des Lichtes. Hrsg. von A. König und C. Runge. XII u. 370. 1897. VI. Theorie der Wärme. Hrsg. von Franz Richarz. XII. u. 418. 1903.

H. v. Helmholtz, Populäre wissenschaftliche Vorträge. Braunschweig. 2 v. 8⁰. 1865—71. Engl. von Tyndall. London 1873—81. 2 v. 8⁰.

Oeuvres de **Charles Hermite,** publ. sous les auspices de l'Académie d. sc., par Emile Picard. 3 v. gr. 8⁰. Paris I 1905, II et III (en prépar).

Correspondance d'**Hermite** et de **Stieltjes,** publ. par les soins de B. Baillaud et H. Bourget, avec une préface de E. Picard, 2 v. Paris 1905. I, XX u. 477; II, VI u. 457 S.

H. Hertz, Gesammelte Werke. 3 Bde. 8⁰. Leipzig. I. Schriften vermischten Inhalts. Hrsg. von Ph. Lenard. XXIX u. 368. 1895. Engl. by D. E. Jones and G. A. Schott. London XVI u. 340. 8. 1896. II. Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft. 2. Aufl. Leipzig IX u. 296 S. 1895. III. Die Prinzipien der Mechanik, in einem neuen Zusammenhange dargestellt. Hrsg. von Ph. Lenard. XXIX u. 312 S. 1894.

H. Hertz, Gesammelte Abhandlungen. Hrsg. von F. v. d. Leyen. Leipzig 1905.

C. G. J. Jacobi, Gesammelte Werke. Hrsg. auf Veranlassung der Königl. Preuß. Akademie d. Wiss., von C. Borchardt und C. Weierstraß. 7 Bde. u. Suppl. 1881—1891. Berlin 4⁰. Suppl. Vorlesungen über Dynamik. Hrsg. von E. Lottner. 1884.

Correspondance mathématique entre **Legendre** et **Jacobi.** Publ. par C. Borchardt. J. f. Math. **80**, 205—279. 1875

Briefwechsel zwischen **C. G. J. Jacobi** und **M. H. Jacobi.** Hrsg. von W. Ahrens. Leipzig 1907. XX u. 282.

G. Kirchhoff, Gesammelte Abhandlungen. Leipz. 641 S. 8⁰. 1882. Nachtrag, hrsg. von L. Boltzmann. Leipz. VII u. 137 S. 8⁰. 1891.

G. Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik, 1883—94. I. Mechanik, hrsg. von W. Wien. 4. Aufl. 1897. II. Optik, hrsg. v. K. Hensel. 1891. III. Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, hrsg. von M. Planck. 1891. IV. Theorie der Wärme, hrsg. von M. Planck. 1894. Leipzig.

Leopold Kronecker, Werke. Hrsg. auf Veranlassung der Königl. Preuß. Akademie d. Wiss. von K. Hensel. 4 Bde. gr. 4⁰. Leipzig. 1895—99.

Leopold Kronecker, Vorlesungen über Mathematik. Leipzig. gr. 8⁰. 5 Bde. I. Vorlesungen über die Theorie der einfachen und vielfachen Integrale, hrsg. von E. Netto, x u. 346 S. 1894. II. Vorlesungen über Arithmetik. Bearb. von K. Hensel. 2. Abschn. Vorlesungen über die Theorie der Determinanten. 1. (1—21. Vorl.) XII u. 390. 1903. III. Vorlesungen über Zahlentheorie. 1. XVI u. 509, 1901. IV. u. V. Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Gleichungen. (In Vorbereitung.)

Edm. Laguerre, Oeuvres. Publ. par Ch. Kermite, H. Poincaré et E. Rouché. I. Algèbre. Calcul intégral. XV u. 471 S. 1897. II. Géométrie. 715 S. 1905. Paris.

L. Lorenz, Oeuvres scientifiques. Revues et annotées par H. Valentiner. Publiées aux frais de la fondation Carlsberg. Copenhague. 2 v. gr. 8⁰. I. (Arbeiten aus der Theorie des Lichtes.) 529 S. 1896—98. II, 1 (Die übrigen Arbeiten aus der mathematischen Physik), IV u. 315 S. 1899; II, 2 (Mathematische Abhandlungen), S. 317—583. 1904.

A. F. Möbius, Gesammelte Werke. Hrsg. auf Veranlassung der Königl. Sächs. Ges. d. Wiss. von R. Baltzer, F. Klein und W. Scheibner. 4 Bde. 1885—87.

Franz Neumann, Gesammelte Werke Hrsg. von Carl Neumann u. a. 3 Bde. gr. 4⁰. Leipzig. (In Vorbereitung; bis jetzt Bd. II erschienen 1906. XVI u. 620.)

Franz Neumann, Vorlesungen über mathematische Physik, gehalten an der

Universität Königsberg. Hrsg. von seinen Schülern in zwanglosen Heften. Leipzig. 8 Bde. gr. 8. I. Vorlesungen über die Theorie des Magnetismus, namentlich über die Theorie der magnetischen Induktion. VIII u. 116. 1881. II. Einleitung in die theoretische Physik. Hrsg. von C. Pape. x u. 291. 1883. III. Vorlesungen über elektrische Ströme. Hrsg. von K. von der Mühll. x u. 310. 1884. IV. Vorlesungen über theoretische Optik. Hrsg. von E. Dorn. VIII u. 310. 1885. V. Vorlesungen über die Theorie der Elastizität der festen Körper und des Lichtäthers. Hrsg. von Oskar Emil Meyer. XIV. u. 374. 1885. VI. Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen. Hrsg. von C. Neumann. XVI u. 364. 1887. VII. Vorlesungen über die Theorie der Kapillarität. Hrsg. von A. Wangerin. x. u. 234. 1894. VIII. Vorlesungen über die Wärme. Hrsg. von J. Pernet. (In Vorbereitung.)

Julius Plücker, Gesammelte wissenschaftliche Abhandlungen. Im Auftrage der Königl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen hrsg. von A. Schönflies und Fr. Pockels. 2 Bde. Leipzig. gr. 8⁰. I. Mathematische Abhandlungen. XXXV u. 620. 1895. II. Physikalische Abhandlungen. XVIII u. 834. 1896.

Bernhard Riemann, Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlaß. 2. Aufl. hrsg. von H. Weber. Leipzig x u. 558 S. gr. 8⁰. 1892. Nachträge. Hrsg. von M. Nöther und W. Wirtinger. VIII u. 116 S. 1902.

Oeuvres mathématiques de **Bernhard Riemann.** Traduit par L. Laugel. Paris XXXV u. 453. gr. 8⁰. 1898.

Henry John Stephan Smith, Collected mathematical papers. Ed. by J. W. L. Glaisher. Oxford 2 v. 4⁰. 1894. I. XIV u. 603. II VII u. 719.

Jacob Steiner, Gesammelte Werke. Auf Veranlassung der Königl. Preuß. Ak. d. Wiss. hrsg. von K. Weierstraß. 2 Bde. 1275 S. Berlin. I. 1881. II. 1882. 8⁰.

Briefwechsel zwischen **J. Steiner** und **L. Schläfli.** Hrsg. von H. Graf. 208 S. Mitt. Naturf.-Ges. Bern. 1896.

J. S. Sylvester, The Collected mathematical papers. P. by H. F. Baker. 2 v. 8⁰. Cambridge. I (a. 1837—53) 1904. XII u. 650 S. II (In Press.).

Wilhelm Webers Werke. Hrsg. von der Königl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. Berlin. 6 Bde. 8⁰. 1892. 94. I. Akustik, Mechanik, Optik und Wärmelehre. Besorgt durch Wold. Voigt. VII u. 600. 1892. II. Magnetismus. Bes. durch Ed. Riecke. VIII u. 380. 1892. III. u. IV. Galvanismus und Elektrodynamik. Bes. durch H. Weber. XII u. 676 1893; XIV u. 638, 1894. V. Wellenlehre. Bes. durch Ed. Riecke. XXXII u. 433. 1893. VI. Mechanik der menschlichen Gehwerkzeuge. Bes. durch Fr. Merkel und O. Fischer. XXIV u. 326. 1894.

K. Weierstraß, Mathematische Werke. Hrsg. unter Mitwirkung einer von der Königl. Preuß. Ak. d. Wiss. eingesetzten Kommission. I. Abhandlungen, 1. Hälfte. VIII u. 356. Berlin 1894. II. Abhandlungen. 2. Hälfte. VI u. 363. 1895. IV. Vorlesungen über die Theorie der Abel'schen Funktionen. Bearb. von G. Hettner und J. Knoblauch. XIV u. 631. 1902. (Wird fortgesetzt.)

G. G. Stokes, Mathematical and physical papers. Reprinted from the original journals and transactions, with brief historical notes and references. Cambridge. 5 v. 8⁰. 1880—1905.

§ 6. **Klassiker der exakten Wissenschaften.** Durch den Hinweis auf die Gesamtwerke der bedeutendsten Mathematiker bezweckten wir, für den Studierenden der Mathematik das Studium der Quellen zu erleichtern. Wir müssen hier noch auf eine Sammlung von Quellenschriften aufmerksam machen, welche sowohl als Unterrichtsmittel wie als Forschungsmittel von großer Bedeutung ist. Unter dem Titel: „Klassiker der exakten

Wissenschaften“ erscheinen bei W. Engelmann in Leipzig seit dem Jahre 1889 unter der allgemeinen Redaktion von W. Ostwald und herausgegeben von hervorragenden Vertretern der Wissenschaften, zu billigen Preisen Abhandlungen aus den Gebieten der Mathematik, Astronomie, Physik, Chemie (einschließlich Krystallkunde) und Physiologie. Die Leitung der mathematischen Abteilung hat A. Wangerin, die der physikalischen Arth. von Öttingen, die der astronomischen H. Bruns übernommen. Die Studierenden der Mathematik, denen früher die Quellen ihrer Wissenschaft so wenig zugänglich waren, daß sie nur zu leicht darauf verzichteten, aus diesen Quellen zu lernen, sollten mit Freuden dieses Hilfsmittel begrüßen. Auf die einzelnen in dieser Sammlung erschienenen Abhandlungen werden wir bei der Literatur der betr. Disziplinen zurückkommen.

Abschnitt IV. Zeitschriften mathematischen Inhalts.

§ 1. **Einleitung.** Eine literarische Hodogetik für Studierende der Mathematik würde sehr unvollkommen sein, wenn sie, wie die älteren Bibliographien von J. Rogg, L. A. Sohncke u. a., nur die mathematischen Einzelwerke anführen wollte. Sie muß vor allem die mathematische Journalliteratur berücksichtigen, da die Originalarbeiten, auf deren Studium hingewiesen werden muß, größtenteils in periodischen Schriften zu suchen sind. Von der Bedeutung der Zeitschriften für die mathematische Literatur überzeugen uns einige Zahlen, die Herr G. Valentin in einem Bericht über die von ihm bearbeitete mathematische Bibliographie mitgeteilt hat. Herr Valentin schätzt die Anzahl der separat erschienenen Schriften auf ca. 35000 (ein Buch mit allen Auflagen und Übersetzungen als Einheit gerechnet), die Anzahl der Journalaufsätze aber auf 90000 bis 95000. Die letzteren hat er aus 4000 Publikationen mit mehr als 120000 Bänden exzerpiert.

Die Kenntnis der Zeitschriften, in denen zahlreiche mathematische Abhandlungen veröffentlicht wurden, ist insbesondere für denjenigen notwendig, der sich mit mathematisch-historischen Studien beschäftigt. Die historisch-kritischen Darstellungen, welche die Deutsche Mathematiker-Vereinigung veröffentlicht, sowie die Monographien der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften weisen auf mehrere Hunderte von Zeitschriften hin. Natürlich müssen bei häufigen Zitaten die Titel dieser Zeitschriften abgekürzt werden. Die Willkür, mit der man früher bei dieser Abkürzung verfuhr, erschwerte das Auffinden einer literarischen Quelle außerordentlich. Früher nannte man häufig eine Zeitschrift nach dem Herausgeber (Crelle's J., Darboux Bull., Poggendorff Ann.). Das hatte den Übelstand, daß dieselbe Zeitschrift beim Wechsel der Redaktion auch nach dem neuen Herausgeber genannt wurde (z. B. Wiedemann Ann.). Publikationen der Akademien wurden häufig nach dem Sitz der Akademie



zitiert (Paris Mém., Wien Ber.). Auch das gab zu Verwechslungen Anlaß. Jetzt hat man sich größtenteils dahin geeinigt, die Abkürzung des Titels mit dem Stichwort zu beginnen (Abh., Acta, Nova Acta, Ann., Arch., Atti, Ber., Bull., Mém., Nouv. Mém., Proc., Verh., Ztschr. usw.) und solche sachlichen und lokalen Beiworte hinzuzufügen, die eine Verwechslung mit anderen Journalen ausschließen. Auf Veranlassung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung wurde ein alphabetisches Verzeichnis von ca. 1200 Zeitschriften veröffentlicht von Felix Müller, Abgekürzte Titel von Zeitschriften mathematischen Inhalts, mit Erläuterungen und historischen Notizen. Leipzig, Teubner 1903. Für geschichtliche Studien ist dieses Verzeichnis dadurch noch nutzbarer gemacht, daß den Titeln die Anfangsjahre der Zeitschriften beigefügt und bei solchen, die bereits wieder eingegangen sind, das letzte Jahr des Erscheinens.

§ 2. **Anfänge. Einteilung.** Das Jahr 1665 ist in der Geschichte der mathematischen Literatur bemerkenswert durch das Erscheinen der beiden ersten großen wissenschaftlichen Zeitschriften, des Journal des Sçavans, das anfänglich Organ der Pariser Akademie des Sciences war, und der Philosophical Transactions der Royal Society of London. Beide Journale erscheinen noch heute, das Journal des Sçavans mit einer Unterbrechung in den Jahren 1792—1816, die Phil. Trans. regelmäßig.

Außer diesen beiden Zeitschriften erschienen in der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts noch 15, welche für die Geschichte der Mathematik in Betracht kommen könnten. Im achtzehnten Jahrhundert wuchs diese Zahl auf mehr als 250, und seit Beginn des 19. Jahrhunderts sogar auf mehr als 1000. Wir können alle diese Zeitschriften, in denen mathematische Aufsätze veröffentlicht werden, in 6 Gruppen teilen, um die Übersicht über dieselben zu erleichtern. Wir wollen zuerst von den Zeitschriften reden, welche rein mathematischen oder doch vorwiegend mathematischen Inhalts sind. In zweiter Linie interessieren uns die astronomischen Zeitschriften, die dritte Gruppe bilden die vorwiegend physikalischen, die vierte die technischen und militärischen, die fünfte die allgemeinwissenschaftlichen. Zuletzt werden wir die uns interessierenden Schriften der Akademien und Gelehrten Gesellschaften anführen.

§ 3. **Vorwiegend mathematische Zeitschriften.** Schon im Beginn des 18. Jahrhunderts entstand eine Reihe englischer Zeitschriften mathematischen Inhalts, welche zur Erweckung des Interesses für die Mathematik in England sehr viel beitrugen.

Im Jahre 1704 erschien:

The Ladies Diary or the Womans Almanach. London 1704—1840.

Zuerst ein Almanach zur Unterhaltung mehr als zur Förderung der Wissenschaft, brachte es Rebus-, Rätsel-, Scherz- und andere Aufgaben, wurde aber später interessanter und wissenschaftlicher und enthielt hübsche Aufgaben aus der elementaren Mathematik. In 137 Nummern erschien

es bis zum Jahre 1840 und ward dann unter dem Titel „Lady's and Gentlemans Diary", London 1841—71, 31 nos., vereinigt mit:

The Gentleman's Diary, or the mathematical Repository, London, 100 nos., 1741—1840,

das unter der Redaktion von Olinthus Gregory, Thomas Leybourn u. a. schon wissenschaftlicher war und etwas schwierigere Aufgaben aus der Elementar-Mathematik brachte. Seit 1835 und nach der Verschmelzung enthielten diese Journale auch mathematische Abhandlungen, bis 1865.

S. Urban's The Gentleman's Magazine or monthly intelligencer (später: and historical chronicle), London, 1731—1816, 1818—33, (2) 1834—65, (3) 1866—80 (Index London 1889), umfaßt mehr als 200 Bände. Es brachte sogar mathematisch-historische Notizen.

Für den Historiker sind besonders interessant die Serien des

Mathematical Repository, by T. Leybourn u. a. London 1748—53, 1795 bis 1804, 1806—35. 8°.

Außer den erwähnten Zeitschriften erschienen bis in den Anfang des 19. Jahrhunderts mehr als 20 in englischer Sprache. Man ist erst in neuerer Zeit auf die Bedeutung dieser englischen Zeitschriften für die Geschichte der Elementarmathematik aufmerksam geworden und hat die Entdeckung gemacht, daß zahlreiche Sätze der sogenannten modernen Dreiecksgeometrie, welche fälschlich nach ihren modernen Wiederentdeckern genannt werden, bereits in diesen älteren Zeitschriften sich finden.

Eine Zeitschrift für Elementar-Mathematik erschien 1754 in Holland:

Maandelykse Mathematische Liefhebbery, 17 v., Purmerende 1754—1769. 12°.

Ihm folgte in Deutschland, unter ähnlich klingendem Titel:

Der mathematische Liebhaber, Wochenschrift von Johann Reimers. Hamburg 1767—69, 4 T. 8°.

Der Leipziger Professor Karl Friedrich Hindenburg, der Vater der kombinatorischen Analysis, begründete die drei folgenden mathematischen Journale:

Leipziger Magazin für Naturkunde, Mathematik und Ökonomie, von C. Bd. Funck, N. Gf. Leske und K. Fr. Hindenburg. Leipzig. 5 Bde. 8°. 1781—1785.

Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik. Hrsg. von Joh. Bernoulli und K. F. Hindenburg. 4 Hefte 8°. Leipzig 1786—88. (Es enthält Aufsätze von Lambert, Kästner, Joh. III. Bernoulli, Hindenburg, Tetens, Olbers, J. F. Pfaff, Nic. Fuß, Klügel u. a.)

Archiv der reinen und angewandten Mathematik. Hrsg. von K. F. Hindenburg. Leipzig. 11 Hefte 8°. 1795—1800. (Dieselben Mitarbeiter.)

Bald nach der Gründung der Polytechnischen Schule zu Paris 1794 entstand das

Journal de l'École Polytechnique, publié par le Conseil d'Instruction de cet établissement, die erste mathematische Zeitschrift in Frankreich. Es erscheint noch heute. Die erste Serie umfaßt 64 Bände oder 28 cahiers, 1794—1894; die zweite Serie beginnt 1895. (Lagrange, Laplace, Monge, Biot, Legendre, Lamé, Poisson, Cauchy, Fourier, Liouville, Mannheim, Bertrand, J. A. Serret, Resal und viele andere berühmte Mathematiker Frankreichs gehören zu seinen Mitarbeitern.)

Alle mathematischen Journale, welche seit dem Beginn des 19. Jahrhunderts entstanden sind, zu nennen, verbietet uns der Raum. Wir begnügen uns damit, die wichtigsten derselben anzuführen, von deren Existenz



jeder Studierende der Mathematik gehört haben sollte. In chronologischer Reihenfolge sind es diese:

Annales de mathématiques pures et appliquées, recueil périodique, rédigé par J. D. Gergonne et J. E. Thomas Lavernède. Nismes et Paris. 4⁰. 22 v. 1810—31. (Lhuilier, Poncelet, Plücker, Schumacher, Libri gehören zu den Mitarbeitern.)

Correspondance sur l'École polytechnique, à l'usage des élèves de cet école. Par Hachette. Paris 8⁰. I (1804—8) 1813, II (1309—13) 1814, III (1814—16) 1816.

Bulletin des Sciences mathématiques, astronomiques, physiques et chimiques, rédigé par le Baron de Férussac. Paris 8⁰. 1—16, 1824—31. (Darin sind Arbeiten von Cauchy, Poisson, Poncelet, J. K. F. Sturm, Galois u. a.)

Correspondance mathématique et physique, publ. par A. Quetelet et J. G. Garnier. Gand et Bruxelles. 8⁰. 11 v. 1825—39. (Außer den Herausgebern seien Plateau, Chasles, Verhulst als Mitarbeiter genannt.)

Journal für die reine und angewandte Mathematik, hrsg. von A. L. Crelle (1825—55), fortgesetzt von Borchardt, Weierstraß, Kronecker, Fuchs, Hensel u. a.

(Dieses berühmteste deutsche mathematische Journal umfaßt bis jetzt Bd. **1—130**, Berlin 4⁰, 1826—1906. Inhalt und Namenverzeichnis der Bände **1—100** (1826—87), Berlin 1887, 252 S. 4⁰. In den ersten hundert Bänden sind von 427 Verfassern 2265 Aufsätze veröffentlicht, von Jacobi allein 113, von Cayley 59, Steiner 56, Stern 50, Crelle und Clebsch 47, Hesse 44, Gudermann 38, Eisenstein, Hermite und Raabe 37, Clausen 36, Heine 35, Kummer 32, Minding 31, Dirichlet 30.)

Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé en 1836 et publié jusqu'en 1874 par Joseph Liouville. Séries (3)—(5) publ. par Resal, C. Jordan et a. Paris. 4⁰. (1) 20 v. 1836—55; (2) 20 v. 1856—74; (3) 10 v. 1875—84; (4) 10 v. 1885—94; (5) 10 v. 1895—1904; etc. (Alle hervorragenden Mathematiker Frankreichs haben Beiträge für dieses wichtigste französische mathematische Journal geliefert.)

Cambridge Mathematical Journal. Ed. by D. F. Gregory and R. Leslie Ellis. Cambridge. 8⁰. I—IV, 1839—45. Fortgesetzt als: Cambridge and Dublin Mathematical Journal. Ed. by W. Thomson and N. M. Ferrers. Cambridge and Dublin. 8⁰. (2) I—IX (resp. V—XIII), 1846—54. Vorläufer des

The Quarterly Journal of pure and applied mathematics. Ed. by J. J. Sylvester, N. M. Ferrers, J. W. L. Glaisher a. o. London 8⁰. **1—35**, 1855—1903, u. flg. Register zu **1—16**, in Bd. **16**, 1879.

(Das bedeutendste in England erscheinende mathematische Journal, Außer von den Herausgebern enthält es Beiträge von Cayley, Boole, Booth, Brioschi, de Morgan, Spottiswoode, Stokes, Cockle. Maxwell, Walker und vielen anderen.)

Archiv der Mathematik und Physik, mit besonderer Rüchsicht auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten. Gegründet im Jahre 1841 von J. A. Grunert; fortgesetzt seit dem Jahre 1873 bis 1900 von R. Hoppe, und in der 3. Serie von E. Lampe, Fr. Meyer und E. Jahnke. Greifswald u. Leipzig. Teil **1—70**, 1841—84. (2) **1—17**, 1884—1900; (3) **1**, 1900 u. flg.

(Dieses Archiv wurde nach dem Vorbild der Annales de math. p. et appl. Gergonnes gegründet und fortgeführt. Unter Grunert und Hoppe waren Mitarbeiter Seydewitz, Arndt, Schlömilch, Dienger, U. Graß-

mann, Imschenetzky, Clausen, Lindman, S. Spitzer, Dostor, Unferdinger, Durège, Hoüel, Gerhardt, M. Cantor u. a.)

Nouvelles Annales de Mathématiques. Journal des Candidats aux Écoles Polytechnique et Normale, fondé en 1842 par Gerono et Terquem, continué à partir de 1863 par Gerono, Prouhet, J. Bourget, Ch. Brisse, E. Rouché, C. A. Laisant etc. Paris 8⁰. **1—20**, 1842—61, (2) **1—29**, 1862—81, (3) **1—20**, 1882—1901; (4) **1**, 1902 u. flg.

Annali di scienze matematiche e fisiche, compilati da Barnaba Tortolini. Roma. 4⁰. **1—8**, 1850–57. Fortsetzung:

Annali di matematica pura ed applicata, pubbl. da B. Tortolini, e compilati da E. Betti, F. Brioschi, A. Genocchi, R. Tortolini. Roma 4⁰. **1—7**, 1858—66. Fortsetzung:

Annali di matematica pura ed applicata, già diretti da F. Briochi e continnati dai professori L. Bianchi, L. Cremona, U. Dini, G. Jung. Milano. 4⁰. (2) **1—26**, 1867—98; (3) **1**, 1898 u. flg. (Das bedeutendste italienische mathematische Journal.) Indici generali (1850—1897). Milano 1904.

Zeitschrift für Mathematik und Physik, begründet 1856 durch O. Schlömilch, zuerst herausgegeben von O. Schlömilch, B. Witzschel, M. Cantor und E. Kahl, seit 1898 von R. Mehmke und M. Cantor, und seit 1901 als Organ für angewandte Mathematik von R. Mehmke und C. Runge. Seit **1**, 1856 regelmäßige Jahrgänge, **43**, 1898, **46**, 1901 etc. Die historisch-literarische Abteilung unter Redaktion von M. Cantor. Supplement 1 erschien zum 12. Jahrgang, 2 zum 13.; die übrigen Supplemente auch unter dem Titel „Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften". Generalregister zu **1—25**, (1856—1880), 123 S. 8⁰. Leipzig 1880. Generalregister zu Bd. **1—50**, von E. Wölffing, Leipzig 1905. VIII u. 308.

The Oxford, Cambridge and Dublin Messenger of Mathematics. A journal supported by junior mathematical students of the three universities. Edited by William Alben Whitworth, John Casey, Henry William Challis, James Mc. Dowell, Charles Taylor and William Peverill Turnbull. London and Cambridge. 8⁰. **1—5**, 1862—71. Die 2. Serie:

The Messenger of Mathematics, ed. by M. Allen Whitworth, C. Taylor, M. Pendlebury, J. W. L. Glaisher. London and Cambridge. 8⁰. (2) **1**, 1872, reg. Jahrgänge.

Giornale di Matematiche, ad uso degli studenti delle università italiane, pubbl. per cura del prof. G. Battaglini. Proseguito dal prof. A. Capelli. Napoli. gr. 8⁰. **1**, 1863, reg. Jhrgge.

Vorwiegend, zuletzt ausschließlich mathematische Arbeiten enthalten die

Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, pbl. p. L. Pasteur etc. avec un Comité de Rédaction composé de MM. les maîtres de conférence de l'École. Paris 4⁰. **1—7**, 1864—70; (2) 1—12, 1872—83; (3) 1, 1884 u. flg.

Mathematische Annalen. Begründet 1868 durch A. Clebsch und C. Neumann. Unter Mitwirkung von P. Gordan, C. Neumann, M. Noether, A. Mayer, K. Von der Mühll, H. Weber hrsg. von F. Klein, D. Hilbert u. a. Leipzig. gr. 8⁰. **1—58**, 1869—1904, u. flg. Generalregister zu **1—50**, von A. Sommerfeld, Leipzig, x u. 202 S. 1898.

American Journal of mathematics (pure and applied). Ed. J. J. Sylvester, S. Newcomb, Fr. Morley a. o. Published under the Auspices of the Johns Hopkins University. Baltimore. 4⁰. **1**, 1878, reg. Jhrgge.

Acta mathematica. Zeitschrift, hrsg. von G. Mittag-Leffler. Stockholm 4⁰. **1**, 1882—27, 1903 u. flg.

Annales of Mathematics. Ed. Ormond Stone u. o. University of Virginia. New-York. 4⁰. **1—12**, 1884—98; (2) **1**, 1899 sq.

Monatshefte für Mathematik und Physik. Mit Unterstützung des hohen K. K. Ministeriums für Kultus und Unterricht hrsg. von G. v. Escherich, L. Gegenbauer, F. Mertens u. a. Wien. 8⁰. **1**, 1890, u. flg.



Mathesis. Recueil mathématique à l'usage des écol s spéciales et des établissements d'instruction moyenne. Publ. par P. Mansion et J. Neuberg. Gand. 8⁰. **1—10**, 1882—1890; (2) **1—10**, 1891—1900; (3) **1**, 1901 u. flg.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Begründet 1869 durch J. C. V. Hoffmann. Hrsg. von H. Schotten. Leipzig. gr. 8⁰. 1. Jahrgg. 1870, regelm. Jhrgge. Generalregister **1—25** (1870—94) in Arbeit. Sammlung des Aufgaben-Repertoriums der ersten 25 Bände, von Hoffmann, Leipzig, XII u. 399 S. Leipzig 1898.

Mathematical questions, with their solutions. From the „Educational Times". With many papers and solutions not published in the „Educational Times". Ed. by W. J. Miller a. o. London 8⁰. **1—75**, 1864—1901; (2) **1**, **2**. 1902 u. flg.

Periodico di matematica per l'insegnamento secondario, fondato da D. Besso, continuato da A. Lugli ed attualmente diretto dal Dott. G. Lazzeri. Organo dell' Associazione „Mathesis". Livorno 8⁰. **1—15** (1886—1899), (2) **1**, 1899, u. flg.

Prace matematyczno-fizyche. Hrsg. von S. Dickstein u. a. Warschau. Seit 1888.

L'Enseignement mathématique. Revue internationale paraissant tous les deux mois. Directeurs: C. A. Laisant, H. Fehr. Paris et Genève. 8⁰. **1**, 1899 u. flg.

Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften. Begründet von B. Schwalbe und H. Pietzker. Berlin 4⁰. **1**, 1897, u. flg.

L'Intermédiaire des mathématiciens, dirigé par C. A. Laisant, Émile Lemoine et a. Paris 8⁰. **1**, 1894, u. flg. (Ein internationales Organ, welches nur Fragen und Antworten enthält.)

Eine Reihe mathematischer Gesellschaften ist hier zu erwähnen, in deren Publikationen bemerkenswerte mathematische Aufsätze enthalten sind. Die älteste dieser Gesellschaften ist wohl die Mathematische Gesellschaft zu Hamburg, seit 1690. Die Geschichte der Gesellschaft von 1690—1890 erschien im 2. Bande der

Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg. Leipzig. I, 1899; II, Festschrift, 2 Teile, 1890; III (1891—1900), 1900; IV, 5 Hefte 1901—5, u. flg.

Im Jahre 1778 wurde die Wiskundig (d. i. mathematische) Genootschap zu Amsterdam gegründet. Sie gab heraus:

Kunst-Oeffeningen over verscheide nuttige onderweysen. Amsterdam. 1779, 1782—88.

Wiskundig. Verlustiging, Amsterdam 1793—95.

Wiskundig Mengelwerk, Amsterdam 1798—1811, 1816, 1827.

Wiskundig Oeffeningen, Amsterdam 1806—1809.

Verzameling d. wiskundige voorstellen (Recueil de questions Mathématiques), Amsterdam 1811—15, 1820—36, 1841—46, 1850—54.

Tijdskrift der bevordering der mathematische Wetenschappen. Purmerende 1823—28.

Tijdskrift voor Wiskunde. Deventer, 3 v., 1874—76.

Nieuw Archief voor Wiskunde, uitgegeven door het Wiskundig Genootschap te Amsterdam, onder Redactie van J. C. Kluyver, D. J. Korteweg en P. H. Schoute. Amsterdam 8⁰, **1—20**, 1875—93; (2) **1**, 1894, u. flg.

Die berühmte Società Italiana, detta dei XL, gab heraus:

Memorie di matematica e di fisica della Società Italiana delle Scienze, fondata da Antonio-Maria Lorgna. Firenze, Modena, Verona. 4⁰. **1—25**, 1782—55; (2) **1—2**, 1862—66; (3) **1**, 1867 u. flg.

Außer Lorgna sind Boscovich, Fontana, Malfatti, Paoli, G. Riccati, Cagnoli, Delanges, Ferroni, Giordano, Cossali, Plana, Ruffini, Bellavitis, Saladini, Brioschi und viele andere Mathematiker als Mitarbeiter zu nennen.

Die Société Philomatique zu Paris veröffentlichte folgende Reihe von Schriften:

Rapports généraux de la Société Philomatique. Paris I, 1788—92, II, 1792—98, III, 1798—99, mit Arbeiten von Laplace, van Swinden u. a. (2) Bulletin des sciences, **1—3**, 1792—1803. Nouveau Bulletin des sciences, **1—3**, 1807—13. (3) Bulletin de la Société Philomatique, **1—11**, 1814—24. (4) Nouveau Bulletin, **1—4**, 1825—33. (5) Extrait des Procès verbaux des séances, ann. 1836—52. (6) Bulletin de la Société Philomatique (2) **1—8**, 1864—71. (7) Bulletin (3) **1—10**, 1877—88. (8) **1—10**, 1889—98. (9) **1**, 1899 u. flg.

Die mathematische Gesellschaft zu London wurde i. J. 1865 begründet. Sie veröffentlicht

Proceeding of the London mathematical Society. London 8⁰. I (Jan. 1865 — Nov. 1866) 1866, II (Nov. 1866 — Nov. 1869) 1869, III (Nov. 1869 — Nov. 1871) 1871, IV (Nov. 1871 — Nov. 1873) 1873, dann reg. Jhrgg. bis XXXV, 1902; (2) **1**, 1903 u. flg. Die bedeutendsten Mathematiker Englands haben Beiträge geliefert.

Der Verein böhmischer Mathematiker in Prag gab heraus:

Zpravy zednoty Českých Mathematikii. Hrsg. von M. Naumann und A. Pánek. Prag 8⁰. (Böhmisch). Ann. I—III, 1870—72.

Časopis pro Pěstování Mathematiky a Fysiky (Zeitschrift zur Pflege der Mathematik und Physik). Redig. mit Rücksicht auf Studierende der Mittel- und Hochschulen, von F. J. Studnička u. a. Prag 8⁰ (Böhmisch). **1**, 1872 u. flg., regelm. Jhrgge.

Die mathematische Gesellschaft in Frankreich veröffentlicht ein

Bulletin de la Société Mathématique de France, publ. par les Secrétaires. Paris 8⁰. Seit **1**, 1873, jhrl. 1 Band.

Sehr viel Mathematisches enthält auch eine französische Wanderversammlung für exakte Wissenschaften:

Association Française pour l'avancement des sciences. Compte rendu des sessions. Paris 8⁰. **1** (a. 1872) 1873, u. flg.

Die Mathematische Gesellschaft in Moskau, gegründet 1866, gibt heraus, in russischer Sprache, eine

Mathematitscheskij Sbornik, Mathematische Sammlung, Moskau, **1—24**, 1876—1903, u. flg.

Auch die Mathematische Gesellschaft in Charkow gibt seit 1879 eine Sammlung ihrer Mitteilungen heraus unter dem Titel

Soobščenija Charkowskago matematičeskago obščestva. Charkow. **1—18**, 1879—86; (2) **1**, 1887 u. flg.

Ebenso die physiko-mathematische Gesellschaft an der Kaiserlichen Universität zu Kazan, unter dem Titel

Izvestija fisiko-matematičeskago obščestva pri Imperatorskom Kazanskom Universitétě. Kazan. **1—8**, 1883—90; (2) 1, 1891 u. flg.

Proceedings of the Edinburg Mathematical Society. Edinburg. 8⁰. **1**, 1883; regelm. Jhrgge.

Der am 2. März 1884 zu Palermo gegründete Circolo matematico bezweckt die Förderung und Verbreitung der mathematischen Wissenschaften in Italien. Diese wissenschaftliche Gesellschaft gibt heraus:

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. Direttore G. B. Guccia. Palermo 8⁰. **1—21**, 1887—1906, u. flg. (Ein Band Indici dei Tomi I—XX ist in Vorbereitung.) Ferner ein Annuario.



Im Auftrage des Mathematisch-naturwissenschaftlichen Vereins in Württemberg werden herausgegeben:

Mathematisch-naturwissenschaftliche Mitteilungen. Hrsg. O. Böklen, E. Wölffing u. a. Stuttgart. 8°. **1**—**10**, 1884—93; (2) **1**, 1899 u. flg.

Obwohl der Gedanke eines Zusammenschlusses der deutschen Mathematiker bereits 1867 von Clebsch angeregt und weiter verfolgt wurde, ist die Gründung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung erst auf das Jahr 1890 anzusetzen, und zwar besonders durch die Bemühungen von Georg Cantor. Sie gab die Anregung zu historisch-kritischen Berichten über größere mathematische Disziplinen, die wir weiter unten kennen lernen werden, und zur „Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften" (s. S. 45). Sie veröffentlicht einen:

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Hrsg. von G. Cantor, Dyck, E. Lampe und seit 1897 A. Gutzmer. Berlin u. Leipzig. **1**, 1892, u. flg.

Auch die Internationalen Mathematiker-Kongresse zu Zürich 1897, Paris 1900, Heidelberg 1904 sind von ihr ins Leben gerufen. Die Verhandlungen dieser Kongresse erschienen in Leipzig 1898, 1901 u. 1905.

Die im Jahre 1891 gegründete American Mathematical Society zu New-York gibt heraus:

Bulletin of the American Mathematical Society. A historical and critical review of mathematical science. Ed. by T. S. Fiske, A. Ziwet, F. Morley, F. N. Cole, E. A. Lovett, D. E. Smith, V. Snyder a. o. New-York. 8°. **1**—**3**, 1891/2—1893/4; (2) **1**, 1894/5, u. flg. General-Index (1891—1904) New-York 1905.

Transactions of the American Mathematical Society. Ed. by E. H. Moore, E. W. Brown, Th. F. Fiske. Lancaster, Pa. and New-York. gr. 8°. **1**, 1900, u. flg.

Die Associazione „Mathesis", eine Gesellschaft von Lehrern der Mathematik an italienischen Mittelschulen, die jährliche Versammlungen hält, gab zuerst heraus ein

Bollettino dell' Associazione „Mathesis" fra gli insegnanti di matematica delle scuole medie. Roma e Torino. 8°. **1**, 1896/7, **2**, 1897/8, **3**, 1898/9, das nun mit dem Periodico di matematica (s. oben S. 26) verschmolzen wurde.

Am 31. Oktober (dem Geburtstage C. Weierstraß') 1901 wurde die Berliner Mathematische Gesellschaft gegründet. Sie veröffentlicht:

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft. Leipzig 8°. **1**, 1902, u. flg.

Die hauptsächlich der Geschichte und Bibliographie der Mathematik gewidmeten Zeitschriften von Férussac, Terquem, M. Cantor, Boncompagni, Eneström, Bobynin und Loria haben wir schon im ersten Abschnitt dieses Teiles angeführt. Es bleibt uns noch übrig von drei rein mathematischen Zeitschriften zu sprechen, welche vorwiegend referierenden Inhaltes sind, also Berichte über mathematische Schriften bringen. Sie bieten neben den großen Bibliographien, von denen wir im folgenden Kapitel reden werden, dem Studierenden ein ausgezeichnetes Hilfsmittel, sich in der neueren mathematischen Literatur zu orientieren. Es sind diese ein deutsches, ein französisches und ein holländisches Journal, nämlich:

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Begründet 1869 von Carl Ohrtmann und Felix Müller. Hrsg. von C. Ohrtmann, Felix Müller,

Albert Wangerin, Max Henoch, Emil Lampe. Berlin gr. 8°. I (Jhrg. 1868) 1871—XXXIV (J. 1903) 1906 u. flg. In Bd. II u. XXV sind 2 Jahrgänge vereinigt. Referate über die systematisch geordnete Literatur eines jeden Jahres.

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques. Réd. par M. G. Darboux, J. Hoüel, J. Tannery, É. Picard etc. Seit (2) IX, 1885 heißt der Titel: Bulletin des sciences mathématiques. Paris 8°. I—XI, 1870—76 Indices XI; (2) I, 1877 u. flg. Seit 1877 sind getrennt: I. 1°. Comptes rendus de livres et analyses de mémoires, 2°. Mélanges scientifiques, traductions de mémoires importants et peu répandus et réimpression d'ouvrages rares. II. Revue des publications académiques et périodiques.

Revue semestrielle des Publications mathématiques, rédigée sous les auspices de la Société mathématique d'Amsterdam par P. H. Schoute (Groningen), D. J. Korteweg (Amsterdam), J. C. Kluyver (Leyden), W. Kapteyn (Utrecht), P. Zeeman (Delft) u. a. Amsterdam u. Leipzig. 8°. **1**, 1893 u. flg. Tables des matières des v. I—V, VI—X. Bringt Titel nebst ganz kurzen Referaten von Zeitschriften-Artikeln, mit Angabe des Kapitels, in welches der Artikel nach der Klassifikation des Congrès international de bibliographie des sciences mathématiques gehört. Eine Tabelle der Bezeichnungen dieser Klassifikation ist am Schlusse jedes Heftes enthalten.

§ 4. **Astronomische Zeitschriften.** Von astronomischen Zeitschriften, in denen wichtige mathematische Abhandlungen enthalten sind, nennen wir die alten berühmten Ephemeriden:

Connaissance des temps, ou des mouvements célestes, à l'usage des astronomes et des navigateurs. Paris 8°. Seit 1679. Ihre ersten Mitarbeiter waren J. Picard, Lalande, Arago, Biot, Delambre, Lagrange, Laplace u. a.

The Nautical Almanac and astronomical Ephemeris. Ed. by N. Maskelyne, J. Pond u. a. Seit 1766 (year 1767).

Astronomisches Jahrbuch, hrsg. von J. E. Bode, J. F. Encke, Wolfers, Förster u. a. Berlin. Seit 1828 Berliner astronomisches Jahrbuch. Seit 1773. Berlin. Registerband 1829.

Effemeridi astronomiche calcolate pel meridiano di Milano. Ed. Giov. Angelo Cesaris u. a. Milano 1775—1875. Vorläufer von G. Schiaparelli's Publicazioni del R. Osservatorio di Brera in Milano.

Annuaire. Publ. par le Bureau des Longitudes. Avec des Notices scientifiques. Paris 16°. Seit 1799.

Die wichtigste deutsche astronomische Zeitschrift sind:

Astronomische Nachrichten, begründet von H. C. Schumacher, fortges. von P. A. Hansen, A. C. Petersen u. a. Altona und Kiel. 4°. **1**, 1821. Generalregister zu I—XL, von G. A. Jahn, 2 Bde., Hamburg 1851 u. 1856.

Die im Jahre 1821 zu London gegründete Royal Astronomical Society gab heraus:

Memoirs of the Royal Astronomical Society. London 4°. Seit 1822, und Monthly Notices. Seit 1831.

Die Astronomische Gesellschaft zu Leipzig gibt heraus:

Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. Hrsg. von C. Ch. Bruhns, A. Auwers, A. Winnecke u. a. Leipzig 8°. Seit 1866.

Wer sich über die astronomischen Zeitschriften näher unterrichten will, den verweisen wir auf ein literarisches Unternehmen, das nach dem Vorbilde des Jahrbuches für die Fortschritte der Mathematik Berichte über die astronomische Literatur eines jeden Jahres in systematischer Anordnung bringt:



Astronomischer Jahresbericht. Mit Unterstützung der Astronomischen Gesellschaft hrsg. von W. F. Wislicenus. I (Jahrgang 1899) Berlin 1900. gr. 8⁰.

§ 5. **Physikalische Zeitschriften.** Der durchgebildete Mathematiker muß auch eine Reihe von physikalischen Zeitschriften kennen. Von denjenigen, welche mathematische Abhandlungen in größerer Zahl enthalten, seien hier folgende genannt:

Journal de Physique, de Chimie et de l'Histoire naturelle, par J. C. de Lamétherie et Ducrotay de Blainville. Paris 4⁰. **1—96**, 1794—1823. Es enthält Arbeiten von Jac. II Bernoulli, Biot, Lalande, Laplace, Prévost u. a.

Philosophical Magazine and Journal, by A. Tilloch and R. Taylor. London 4⁰. **1—68**, 1798—1826. The Philosophical Magazine or Annals of Chemistry, Mathematics, Astronomy, Natural History and General Science, by R. Taylor and R. Phillips. London. (2) **1—11**, 1827—32. The London and Edinburgh Philosophical Magazine and Journal of Science, ed. by Brewster, Taylor, Phillips a. o. London. (3) **1—16**, 1832—40. The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. Conducted by D. Brewster, R. Taylor, B. Kane, W. Francis a. o. (3) **17—37**, 1840—50; (4) **1—50**, 1851—75; (5) **1—50**, 1876—1900; (6) **1**, **2**, 1901, u. flg.

Bibliotheca fisica d'Europea, da L. G. Brugnatelli. Pavia. 4⁰. **1—20**, 1788—91. Vorläufer des Giornale fisico-medico, da L. G. Brugnatelli, Pavia, **1—20**, 1792—96, und des Giornale di fisica, chimica e storia naturale, da L. G. Brugnatelli, Brunacci u. a. Pavia. **1—10**, 1808—17; (2) **1—10**, 1818—27. (Aufsätze von Biot, Fourier, Bordoni, Carlini u. a.)

Das bedeutendste französische Journal der Physik sind die

Annales de chimie et de physique, par A. F. de Fourcroy, Arago, Gay-Lussac, Chevreuil, Dumas, Boussignault, Regnault, Wurtz, Berthelot u. a. Paris 8⁰. **1—96**, 1789—1815; (2) **1—75**, 1816—40; (3) **1—69**, 1841—63; (4) **1—30**, 1864—73; (5) **1—30**, 1874—83; (6) **1—30**, 1884—93; (7) **1—30**, 1894—1903; (8) **1**, 1904 u. flg.

In Deutschland entsprechen ihm die Annalen der Physik, mit ihren Vorläufern:

Journal der Physik, hrsg. von F. A. C. Gren, Leipzig. 8⁰. 1—8, 1790—94. Neues Journal der Physik, von Gren, ib. **1—4**, 1795—97. Annalen der Physik, hrsg. von L. W. Gilbert, Halle und (2) Leipzig. **1—30**, 1799—1808; (2) **1—45**, 1809—23. Annalen der Physik und Chemie, hrsg. von J. C. Poggendorff und (2) G. Wiedemann u. a. Leipzig. 8⁰. **1—60**, 1824—77, mit Supplementbänden. (2) **1**, 1877 u. flg. Dazu: Beiblätter zu den Annalen der Physik und Chemie. **1**, 1877 u. flg.

The American Journal of science and arts, founded by W. Silliman. Ed. B. Silliman, B. Silliman jun., J. D. Dana, Edw. L. Dana a. o. New Haven, Conn. 8⁰. **1—49** (Gen. index **50**), 1818—45; (2) **1—50**, 1846—70; (3) **1—50**, 1871—95; (4) **1**, 1896 u. flg.

Bibliothèque universelle des sciences, belles lettres et arts. Partie des Sciences: Revue Suisse. Genève 8⁰. **1—60**, 1816—35; (2) **1—60**, 1836—45. Ein Vorläufer des Journals:

Archives des sciences physiques et naturelles. Supplément à la Bibliothèque universelle et Revue Suisse. Publ. p De la Rive, Marignac, F. J. Pictet, A. de Candolle, etc. etc. Genève. 8⁰. **1—36**, 1846—57; (2) **1—64**, 1858—78; (3) **1—32**, 1879—94; (4) **1**, 1895 u. flg. Jährlich 2 Bände.

Magazin for Naturvidenskaberne. Udgivet af G. F. Lundt etc. (3) Udgivet af den physiographiske Forening i Christiania. 8⁰. **1—9**, 1823—28; (2) **1—2**, 1832—36. War ein Vorläufer des

Nyt Magazin for Naturvidenskaberne. Udgivet af den physiographiske Forening i Christiania ved C. Langberg, G. O. Sars og Th. Kjerulf. Christiania 8⁰. **1—21**, 1838—75. Es enthält mathematische Aufsätze von Broch, A. S. Guldberg, Sexe, Hoppe u. a.

Ein Vorläufer der „Fortschritte der Physik" (s. unten) war das

Repertorium der Physik. Enthaltend eine vollständige Zusammenstellung der neueren Fortschritte dieser Wissenschaft. Unter Mitwirkung von Lejeune-Dirichlet, Jacobi, F. Neumann, Rieß, Strehlke hrsg. von H. W. Dove und L. Moser. Berlin 8⁰. 8 Hefte. 1837—49.

Journal de physique théorique et appliquée. Fondé par J. Ch. d'Almeida. Publ. par E. Bouty, A. Cornu, E. Mascart, A. Potier etc. Paris 8⁰. **1—10**, 1872—81; (2) **1—10**, 1882—91; (3) **1—10**, 1892—1901; (4) **1**, 1902 u. flg.

Il Cimento, rivista di scienze, lettere ed arti. Torino 8⁰. 1—4, 1844—46; (2) **1—6**, 1852—55. Vorläufer von:

Il Nuovo Cimento. Giornale fondato per la fisica e la chimica da C. Matteucci e R. Piria, continuato per la fisica esperimentale e matematica da E. Betti e R. Felice. Pisa 8⁰. **1—28**, 1855—69; (2) **1—15**, 1869—76; (3) **1—32**, 1877—92; (4) **1—12**, 1895—1900; (5) **1**, **2**, 1901, u. flg.

Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht. Unter der besonderen Mitwirkung von E. Mach und B. Schwalbe hrsg. von F. Poske. Berlin 8⁰. **1**, 1888, reg. Jhrgge.

Die berühmte British Association in London hält jährlich seit 1831 ihre Wanderversammlungen ab und berichtet darüber im

Report of the ... meeting of the British Association for the advancement of science. London 8⁰. 1 (meeting held 1831) 1833, u. flg.

Die im Jahre 1845 zu Berlin gegründete Physikalische Gesellschaft gibt das für physikalische Quellenforschung unentbehrliche, über alle im Laufe eines Jahres erschienenen Arbeiten aus den Gebieten der physikalischen Wissenschaften referierende Journal heraus, nach dessen Muster unser Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik (s. S. 28) begründet wurde, nämlich

Die Fortschritte der Physik. Dargestellt von der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin. Redig. von G. Karsten, W. Beetz, A. K. Krönig etc. etc. Berlin, später Braunschweig. 8⁰. **1** (Jhrg. 1845) 1847, u. flg.

Seit 1883 gibt sie heraus:

Verhandlungen der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin. Red. von F. Neesen, König u. a. Berlin, **1—17**, 1883—98; darauf: Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft. Leipzig, 1899, u. flg.

Die Société des sciences physiques et naturelles zu Bordeaux gibt heraus:

Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Bordeaux 8⁰. **1—1[illegible]**, 1855—75; (2) **1—5**, 1875—84; (3) **1—5**, 1885—89; (4) **1—5**, 1890—94; (5) **1—5**, 1895—99; (6) **1**, 1900 u. flg. (Aufsätze von Darboux, Hoüel, Le Besque, Resal, Mansion, Em. Weyr u. a.) Ferner Procès verbaux des Séances de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Bordeaux, Paris. 8. **1**, 1894/5, u. flg.

Die physikalisch-ökonomische Gesellschaft zu Königsberg gibt ihre Schriften seit dem Jahre 1861 heraus.

Die Naturforschende Gesellschaft in Zürich ließ auf ihre „Mitteilungen", Heft 1—10, 1847—56, folgen die

Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Red. von Rud. Wolf, F. Rudio u. a. Zürich. 8⁰. **1**, 1856, u. flg., jährlich 1 Bd. (Hier finden sich Arbeiten von F. E. Neumann, Raabe, H. A. Schwarz, R. Wolf, H. Weber, Fiedler u. a.)

Die Holländische Gesellschaft der Wissenschaften zu Haarlem gibt heraus:

Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles. Publ. par la Société Hollandaise des sciences à Haarlem. Haarlem, La Haye 8⁰. **1—30**, 1865/6—1897; (2) **1**, 1898 u. flg.,

und die Teylor's Genootschap in Haarlem veröffentlicht ein:

Archive du Musée Teylor. Haarlem. 4⁰. **1**, 1866, u. flg. (2) **1**, 1898/9, u. flg.

§ 6. **Technisch-militärische Zeitschriften.** Aus der vierten Gruppe der Zeitschriften, der technisch-militärischen, seien hier nur folgende Journale angeführt:

Journal des Mines, ou Recueil des Mémoires sur l'exploitation des Mines. Paris 8⁰. **1—38**, 1794—1815, mit ihrer Fortsetzung: Annales des Mines, ou Recueil des Mémoires sur l'exploitation des Mines et sur les sciences et les arts, qui s'y rapportent. Paris 8⁰. **1—13**, 1816—26; (2) **1—10**, 1827—31; (3) **1—20**, 1832—41; (4) **1—20**, 1842—51, u. s. f. in je 10 Jahren eine neue Serie mit 20 Bänden. (Aufsätze von Borda, Prony, Biot, Laplace, Poncelet, Lamé, Combes, Bertrand, Phillips, Resal u. a.)

Mémorial de l'Officier du Génie, ou Recueil de Mémoires, Expériences, Observations et Procédés généraux, propres à perfectionner la fortification et les constructions militaires, rédig. par les soins du Comité des fortifications. Paris 8⁰. **1—15**, 1803—48; (2) **1** (= **16**), 1854 u. flg. (Dieses vom General Marescot gegründete Journal enthält bedeutende technische Abhandlungen.)

Polytechnisches Journal. Hrsg. von J. G. Dingler, E. M. Dingler, J. Zemann, F. Fischer u. a. Augsburg. 8⁰. **1**, 1820, u. flg. Bis 1825 jährlich 3, von da an jährlich 4 Bände.

Annales des Ponts et Chaussées. Mémoires et documents relatifs à l'art de construction et au service de l'ingénieur. Paris 8⁰. **1—20**, 1831—40; (2) **1—20**, 1841—50, u. s. f. in je 10 Jahren eine Serie mit 20 Bänden. (Arbeiten von Coriolis, Moutier, Navier, Prony, Rankine u. a.)

Der Ingenieur. Zeitschrift für das gesamte Ingenieurwesen. Hrsg. von Bornemann. Freiberg 4⁰. **1—2**, 1848—50. Mit seiner Fortsetzung: Der Civilingenieur. Zeitschrift für das Ingenieurwesen. Hrsg. von G. Zeuner u. a. Freiburg u. Leipzig. 4⁰. **1**, 1854 u. flg., jährl. Bände. Generalregister **1—20**, 1875.

Il Politecnico. Giornale dell' Ingegnere, Architetto civile ed industriale. Dir. da F. Brioschi, G. Colombo, A. Cottrau etc. Milano 8⁰. Anno **1**, 1853 u. flg.

Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure. Red. von Grashof, Weber, Ziebarth u. a. Berlin 4⁰. **1**, 1857. u. flg. reg. Jhrgge.

Annales du Génie civil. Recueil de Mémoires sur les mathématiques pures et appliquées, l'astronomie, la chimie, la physique, etc. Paris **1—10**, 1862—71; (2) **1**, 1872 flg. mit der Fortsetzung: Le Génie civil. Revue générale des industries françaises et étrangères. Paris. **1**, 1880 u. flg.

The Quarterly Journal of science. London. 8⁰. **1—7**, 1864—70; mit den Fortsetzungen: The Quarterly Journal of science and Annals of Mining, Metallurgy, Engineering, Industrial Arts, Manufactures and Technology. Cond. by Sir W. Fairbairn, W. Crookes, Robert Hunt, H. Woodward a. o. London 8⁰. (2) **1—9** (= **8—16**), 1871—78; und The Monthly Journal of science, and Annals of biology, astronomy, geology, industrial arts, manufactures and technology. London 8⁰. (3) **1**, 1879 u. flg.



Cosmos. Les Mondes. Revue encyclopédique hebdomadaire des progrès des sciences et de leurs applications aux arts et à l'industrie. Fondé par B. R. de Monfort. Éd. par Moigno, Meunier etc. Paris 8°. **1—25**, 1852—64; (2) **1**, 1866 u. flg.;

Repertorium für Experimentalphysik, für physikalische Technik, mathematische und astronomische Instrumentenkunde. Hrsg. von P. Carl. München 8°. **1—18**, 1865—82. Fortsetzung: Repertorium der Physik. Hrsg. von F. Exner. München. **19**, 1883 u. flg.;

Zeitschrift für Vermessungswesen. Organ des Deutschen Geometervereins. Hrsg von Spielberger, W. Jordan, F. R. Helmert, F. Lindemann, Reinhertz u. a. München u. Stuttgart. 8°. **1**, 1872 u. flg., regelm. Jhrgge.

Auf ein bibliographisches Journal weisen wir noch hier hin:

Polytechnische Bibliothek. Monatliches Verzeichnis der neu erschienenen Werke aus den Fächern der Mathematik, Physik und Chemie. Leipzig. Jhrg. **1**, 1866, ff.

§ 7. **Allgemein-wissenschaftliche Zeitschriften.** Aus der fünften Gruppe von Zeitschriften mathematischen Inhalts, den allgemein-wissenschaftlichen, haben wir das älteste Journal, das Journal des Sçavans schon oben (S. 22) erwähnt. Eine italienische Übersetzung der diesem Journal entnommenen Artikel, vermehrt durch Notizen über italienische, dort nicht erwähnte Schriften, ließ der Abbate Francesco Nazari in seinem Giornale de' Letterati, Roma 1668—81, erscheinen. Ihm folgten andere italienische Journale, unter denen das bedeutendste das

Giornale de' Letterati d'Italia, hrsg. von Apostolo Zeno, Venedig, 40 v., 1710—30, mit den Fortsetzungen:

Osservazioni letterarie des Scipione Maffei, 7 v., Venezia 1737—40,

Minerva, ossia Nuovo Giornale de' Letterati d' Italia, Venezia 1762—66.

Hier finden sich Aufsätze von Conte Jacopo Riccati, Giulio Conte di Fagnano, Bernardino Baldi, Jakob Hermann, Gabriello Manfredi, Bernardino Zendrini, Nic. I. Bernoulli, u. a.

Diesen Journalen schließt sich an die

Raccolta di Opuscoli scientifici e filologici von P. Angelo Calogerà, 51 v., Venezia 1728—87, in der Arbeiten der Gebrüder Fagnano und der Gebrüder Riccati zu finden sind.

Von großer Wichtigkeit für die Geschichte der Mathematik sind die

Acta Eruditorum, nach dem Muster des Journal des Sçavans und der Philos. Transactions (S. 22) begründet von Otto Mencke, Leipzig 1682, fortgesetzt seit 1707 von seinem Sohne Joh. Burckhardt Mencke, **1—50**, Lipsiae 1682—1731, Suppl. **1—10**, 1692—1734. Seit 1732 fortgesetzt als Nova Acta Eruditorum, Lipsiae **1—43**, 1732—76, Suppl. **1—8**, 1735—57. Indices **1—6** (ab ann. 1682—1741). 1692—1745.

Diese 117 Bände umfassende Zeitschrift hat viele berühmte Mathematiker zu Mitarbeitern, wie Leibniz, Tschirnhausen, Jac. I. Bernoulli, Varignon, Joh. I. Bernoulli, Huygens, de l'Hôpital, Nic. I. Bernoulli, Chr. Wolff, Daniel I. Bernoulli, Jacopo Riccati, Lalande, Kästner, Lambert, Tetens.

Ein nach gleichem Muster von dem Philosophen Pierre Bayle gegründetes Journal sind die

Nouvelles de la République des lettres, 1684—98, 1715—20, 56 Bde. Paris.

Ebenso die

Mémoires de Trévoux, pour servir à l'histoire des sciences et des beaux arts. Trévoux 12°. **1—265**, 1701—67.

Im 19. Jahrhundert entstanden das

Giornale Arcadico di scienze, lettere ed arti. Roma 8°. **1—145**, 1819—56; (2) **1—60**, 1857—71. Es enthält Aufsätze von Jacobi, Steiner, Tortolini, Chelini, Secchi, B. Boncompagni u. a.;

L'Institut. Journal universel des sciences et des sociétés savantes en France et à l'étranger. Ire Série. Sciences mathématiques, physiques et naturelles. Paris 4°. **1**, 1833 u. flg.;

Revue scientifique et industrielle. Réd. p. Quesneville. Paris **1—39**, 1840—52;

Le Moniteur scientifique. Réd. p. Quesneville. Paris. **1—5**, 1857—63; (2) **1—7**, 1864—70; (3) (Comptes rendus des académies) **1**, 1871 ff.;

The Scientific American. A weekly Journal of practical information, arts, science, mechanics, chemistry and manufactures. New-York. **1**, 1846 ff., jährl. 2 Bde.;

L'Année scientifique et industrielle, ou Exposé mensuel des travaux scientifiques. Réd. p. Figuier. Paris. **1** (a. 1856) 1857 u. flg.;

La Revue des cours scientifiques de la France et de l'étranger. Réd. p. Young. Paris **1—7**, 1863—71; (2) Revue scientifique de la France et de l'étranger. (2) **1—19**, 1871—80; (3) **1—20**, 1881—91; (4) **1**, **2**, 1892 ff.;

Nature. A weekly illustrated journal of science. London 4°. **1**, 1869, **2**, 1870 ff., jetzt jährlich 2 Bde.;

Revue générale des sciences pures et appliquées. Dir. Louis Olivier. Paris. **1**, 1890 u. flg.

§ 8. **Akademie-Schriften.** Wir kommen nun zu den Publikationen der Akademien und anderer gelehrten Gesellschaften. Jeder Studierende sollte die wichtigsten dieser Zeitschriften kennen. Die oft recht ähnlich klingenden Titel werden leider häufig bei Quellenangaben nicht sorgfältig unterschieden, was ärgerliche und zeitraubende Verwechslungen zur Folge hat. Die Zahl der Serien, welche einzelne Akademien veröffentlicht haben, ist, wie wir sehen werden, recht groß, so daß man genau auf die Titel achten muß. Bei den wichtigsten Serien der Academica wollen wir die Jahre beifügen, verweisen im übrigen auf das oben (S. 21) erwähnte Verzeichnis der abgekürzten Titel, das manchem beim Aufsuchen einer Quelle gute Dienste leisten wird.

Wir beginnen mit den großen Akademien. Aus einer i. J. 1645 zu Oxford gegründeten und 1658 nach London verlegten Privatgesellschaft entstand i. J. 1662 die berühmte Royal Society of London. Von ihren Publikationen wurden oben (S. 22) schon erwähnt die

Philosophical Transactions, I (for the year 1665/6) London 1666 etc., bis jetzt über 200 Bände.

Einen Auszug enthalten:

The Philosophical Transactions of the R. Soc. of London from 1665—1800, abridged, with notes and biographic illustrations, by Ch. Hutton, G. Shaw and R. Pearson. I—XVIII, London 1809. 4°.

Eine zweite Serie sind die

Procedings of the R. Soc. of London, zuerst α) Abstracts of the Papers printed in the Phil. Trans., from 1800—1854, I—VI, London 1832—54; dann β) Proceedings of the R. Soc. London, 1854 u. flg.

Am 1. Januar 1652 fand die erste Sitzung der vom Stadtphysikus und Bürgermeister Johann Lorenz Bausch in der freien Stadt Schweinfurt gegründeten Academia Naturae Curiosorum statt, die später den Namen „Kaiserlich Deutsche Leopoldinisch-Carolinische Akademie" erhielt. Sie veröffentlichte 1670 Miscellanea Ac. Nat. Cur. medico-physicorum. Norimb.; dann 1712—1722 Ephemeridis med.-phys. Germanicae; hierauf Acta physico-medica, Norimb. I—X, 1727—54; Nova Acta Ac. Caes. Leop. Carol. seit 1756; seit 1818 Verhandlungen, auch Abhandlungen der Leop.-Carol. Ak., und seit 1859 Leopoldina, Halle, jährlich 1 Heft in 12 Nrn.

Die Pariser Akademie, entstanden aus der von Richelieu 1635 gegründeten Académie des lettres, zu der 1648 von Mazarin die Académie des beaux arts hinzukam, die von Colbert 1663 gegründete Académie des inscriptions et belles-lettres und 1666 die Académie des sciences, eröffnet im 18. Jahrhundert die Reihe der für die Mathematik wichtigen Zeitschriften. Die Publikationen der Académie und des Institut sind folgende:

Histoires de l'Académie des Sciences I (depuis 1666 jusqu'à 1686) Paris 1733, II (1686—1699) Paris 1733;
Mémoires de l'Académie des Sciences. III—XI, Paris 1729—33.
Histoires de l'Ac. d. Sc. avec les Mémoires de Mathématiques et de Physique, ann. 1699—1790, Paris 1702—1797;
Mémoires de Mathématiques et de Physique présentés par divers Savants étrangers à l'Ac. d. cc. Paris I—XI, 1750—1786;
Recueil des Pièces qui ont remporté le prix. I—XI (a. 1720—72) Paris 1752—77;
Mémoires de l'Institut. Sciences math. et phys. I—XIV (an IV—1815) Paris 1798—1818;
Mémoires de l'Ac. d. sc. de l'Institut de France. (2) I, (a. 1816) Paris 1818 etc.;
Mémoires présentés par divers savants à l'Ac. d. sc. de l'Inst. de France. I, 1806, II, 1811, (2) I, 1830 etc.;
Comptes Rendus hebdomadaires des Séances de l'Ac. d. sc. Seit 3. Aug. 1835 regelm. jährl. 2 Bände;
Histoires de l'Ac. R. d. inscriptions et belles lettres. Avec les Mémoires de littérature Paris. Seit 1717;
Machines approuvées par l'Académie des sciences I—VII. Paris 1735—1777.

Alle diese 11 Publikationen der Pariser Akademie enthalten wichtige mathematische und mathematisch-historische Abhandlungen.

Im Jahre 1700 beschloß König Friedrich I. von Preußen nach Vorschlägen von Leibniz und der Königin Sophie Charlotte die Gründung der Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 1711 wurde sie als „Sozietät der Wissenschaften" eröffnet und 1744 von Friedrich d. Großen zur Königlichen Akademie der Wissenschaften erhoben. Ihre für die Mathematik wichtigen Publikationen sind folgende:

Miscellanea Berolinensia ad incrementum scientiarum ex scriptis Societatis Regiae scientiarum exhibitis edita. I—VII, Berol. 1710—44;
Histoire de l'Ac. R. d. sc. et belles-lettres de Berlin, avec les Mémoires. I—XXV, ann. 1745—69, Berl. 1746—71;
Nouveaux Mémoires de l'Ac. R. de Berlin. I—XXX, ann. 1770—1804, Berl. 1772—1807;
Sammlung der Deutschen Abhandlungen, welche in der Ak. d. Wiss. vorgelesen wurden in den Jahren 1788—1803. I—VI, Berl. 1793—1806;
Abhandlungen der K. Ak. d. Wiss. zu Berlin. I (f. 1804—11) Berlin 1815, II—VII (f. 1812—24), 1816—24; seit 1824 jhrl. 1 Bd.;

Berichte d. K. Preuß. Ak. d. Wiss. zu Berlin 1836—55;
Monatsberichte d. K. Preuß Ak. d. Wiss. zu Berlin 1856—81;
Sitzungsberichte d. K. Preuß. Ak. d. Wiss. zu Berlin I (= XXVII) 1882 u. flg. Besonders erschienen daraus: Mathematisch-naturwissenschaftliche Mitteilungen, Berlin 1883—95;
Sammlung astronomischer Abhandlungen, Beobachtungen und Nachrichten. Hrsg. von d. K. Ak. d. Wiss. zu Berlin. I—IV, 1793—1808.

Von der alten Akademie zu Bologna, gegründet 1690, wurden herausgegeben:
Commentarii de Bononiensi scientiarum et artium Instituto atque Academia, 11 Bde., a. I—VII, Bon. 1731—91.

Die durch Leo XII. erneuerte Akademie veröffentlichte:
Novi Commentarii Academiae Bononiensis I—X, 1834—49;
Memorie dell' Accademia delle scienze dell Istituto di Bologna I—XII, 1850—61; (2) I—X, 1862—70; (3) I, 1871 etc. (6) I, 1903/4 etc.;
Rendiconto delle sessioni, ab a. 1829, 1833 u. flg. reg. Jhrgge.

Die i. J. 1710 zu Upsala gegründete Societät gab heraus:
Acta litteraria Sueciae, Upsaliae publicata, I—II, 1720—29;
Acta litterarum et scientiarum Sueciae, Upsaliae publicata, III—IV, 1730—39;
Acta Societatis Regiae scientiarum Upsaliensis. I—V (ab ac. 1740—50) 1744—51;
Nova Acta Regiae Societatis scientiarum Upsaliensis (2) I—XIV, 1773—1850, (3) I—XVIII, 1854—1900; (4) I, 1905 etc.

Die i. J. 1724 nach Plänen Peters des Großen von der Kaiserin Katharina I. gegründete Kaiserliche Akademie zu Petersburg hat die meisten Serien unter verschiedenen Titeln aufzuweisen:
Commentarii Academiae Imperialis scientiarum Petropolitanae. I—XIV (ab ann. 1726—46) 1728—51;
Novi Commentarii I—XX (a. 1747—75) 1750—76;
Acta Academiae scientiarum Petropolitanae I—VI, je P. I, II (a. 1777—82) 1778—86;
Nova Acta Ac. Petrop. I—XV (a. 1783—1802) 1787—1806;
Mémoires de l'Académie Impériale des sciences de St. Pétersbourg. I—X (a. 1803—22) 1809—1830, u. XI, 1830;
Mémoires des sciences mathématiques et physiques de l'Ac. de St. Pétersbourg, I, 1859 u. flg.;
Mémoires des savans étrangers. Mémoires présentés à l'Ac. de St. Pétersbourg, I—IX, 1831—59;
Recueil des actes des séances publiques. I—XXI (a. 1826—48) 1827—49;
Comptes rendus I—VIII (a. 1849—57) 1850—58; diese erscheinen seit 1859 in russischer Sprache;
Bulletin scientifique I—X (a. 1836—42) 1837—42;
Bulletin de la Classe physico-mathématique I—XVII (a. 1842—59) 1843—59;
Bulletin de l'Ac. Imp. I (a. 1859) 1860 u. flg.;
Mélanges mathématiques et astronomiques, tirés du Bulletin de l'Ac. Imp. I, 1850 u. flg..

Ferner Abhandlungen d. Kais. Akademie der Wissenschaften zu Petersburg, in russischer Sprache.

Von der 1731 zu Edinburgh gegründeten Society haben wir:
Essays and Observations, physical and literary, read before a Society in Edinburgh. Edinburgh, I—III, 1754—71;
Transactions of the Royal Society of Edinburgh. I, 1788 etc.;
Proceedings of the R. Soc. of Edinburgh. I, 1845 etc.

Die Schwedische Akademie zu Stockholm gab heraus:

Kongliga Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar, I—XI (a. 1739—79) Stockholm 1743—79; Nya Handlingar I—XXXIII, 1780—1812; Handlingar 1813—56, (2) I, 1858 u. flg.;

Bihang till Kongliga Svenska Vetenskaps Akademiens Handlingar I—XXVII, 1872—1901/2; fortgesetzt durch das Archiv for mat., astr. och fysik I, 1903/4 u. flg.

Öfversigt af K. Sv. Vet.-Ak. Förhandlingar. Stockholm, I, 1844, regelm. Jhrgge.

Die Gesellschaft der Wissenschaften zu Kopenhagen publizierte:

Kjöbenhavnske Videnskabers Selskabs Skrifter, I—XII, 1745—79;

Nye Samling af det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter (2) I—V, Kjöbenhavn 1781—99;

Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter, (3) I—VI, Kjöbenhavn 1801—18;

Afhandlinger. Naturvidenskabelig og mathematisk Afdeling. (4) I—XII, 1824—46, (5) I, 1849 etc.;

Oversigt over det Kongelige Danske Vid.-Selsk. Forhandlinger. Kjöbenhavn 4°, 1806—43; 8°, 1844 u. flg.

In der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts beginnen die Publikationen folgender Akademien. Von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen:

Commentarii Societatis Regiae scientiarum Gottingensis, I—IV (ab a. 1751—54) 1752—55;

Novi Commentarii Soc. Gott. I—VIII (a. 1769—77) 1771—78;

Deutsche Schriften, von d. Köngl. Societät d. Wiss. zu Göttingen herausgegeben. 1 Bd. 1771;

Commentationes Societatis Regiae scientiarum Gottingensis, I—XVII (ab a. 1778—1807), 1779—1810;

Commentationes recentiores Soc. R. sc. Gott. I—III (ab a. 1808—15), 1811—16, IV—VIII (ab a. 1816—37), 1818—41;

Abhandlungen der Königl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, I (f. d. J. 1838—41) 1843 u. flg.;

Göttingische Gelehrte Anzeigen. Seit 1739;

Nachrichten von der Königl. Ges. d. Wiss. u. d. Georg-August-Universität zu Göttingen. Seit 1845 regelm. Jhrgge.

Von der Akademie nützlicher Wissenschaften zu Erfurt gibt es:

Acta Academiae Electoralis Moguntiacae scientiarum utilium quae Erfordiae est, I—II, 1757—61; (2) (ad a. 1776—95), 1777—96;

Nova Acta Moguntiaca, oder Abhandlungen der Kurfürstlich Mainzer Akademie nützlicher Wissenschaften. I—V (ad a. 1796—1806) Erf. 1799—1817;

Abhandlungen der Akademie gemeinnütziger Wissenschaften zu Erfurt, I, 1828 u. flg.

Die Reale Accademia delle scienze zu Turin entstand aus einer Privatgesellschaft, welche herausgab die:

Miscellanea philosophico-mathematica Societatis privatae Taurinensia I, 1759. Vom 2. Bande ab heißen sie:

Mélanges de philosophie et de mathématique de la Société R. de Turin. II—V, 1760/1—1766. Es folgen:

Mémoires de l'Académie R. des sc. de Turin, I—XXI, 1784—1815;

Memorie della Reale Accademia delle scienze di Torino. Scienze fisiche e matematiche. XXII—XL, 1816—38, (2) I, 1839 u. flg.;

Atti della R. Acc. d. sc. di Torino, seit 1865.

Zu Siena besteht eine Akademie, welche herausgibt:

Atti della Reale Accademia delle scienze di Siena, detta de' Fisiocritici, I—X (ab a. 1760) 1761—1841, (2) I, 1867, (3) I, 1878, (4) I, 1880 etc., und Rivista scientifica I, 1869 etc.

Die im Jahre 1759 gegründete Akademie zu München veröffentlichte folgende Serien von Schriften:

Abhandlungen der Churfürstlich Baierischen Akademie der Wissenschaften. I—X, München 1763—76;
Neue philosophische Abhandlungen der Churfürstlich Baierischen Akademie der Wissenschaften. I—VII, 1778—97;
Physikalische Abhandlungen der Baierischen Akademie. I—II, 1803—1806;
Denkschriften der Königl. Baierischen Akademie d. Wiss. I—IX (f. d. J. 1808—24) 1809—25;
Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe der K. Bayer. Ak. d. Wiss. I (= Denkschr. X) (f. d. J. 1829) 1832 u. flg.;
Berichte über die Arbeiten der math.-phys. Cl. d. K. Ak. d. Wiss. I—V, 1808—12;
Gelehrte Anzeigen d. K. Bayer. Ak. d. Wiss. I—L, 1835—60;
Sitzungsberichte d. K. Bayer. Ak. d. Wiss f. 1860—1870;
Sitzungsberichte der math.-phys. Cl. d. K. Bayer. Ak. d. Wiss. Jhrg. 1871 u, flg.

Aus einer seit 1754 bestehenden Privatgesellschaft in Böhmen, zur Aufnahme der Mathematik, der vaterländischen Geschichte und der Naturgeschichte ward 1769 die Königlich Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag. Es erschienen:

Abhandlungen einer Privatgesellschaft in Böhmen. I—VI, Prag 1775—84;
Abhandlungen der (Königl.) Böhmischen Ges. d. Wiss. Math.-naturwiss. Klasse. I—IV, 1785—89; Neuere Abhandlungen (2) I—III (V—VII) 1791—98; Abhandlungen der K. Böhm. Ges. (3) I—VIII (1802—24) 1804—24, (4) I—V, 1827—37, (5) I—XIV (1837—66) 1841—67, (6) I (1867) 1868 u. flg.;
Sitzungsberichte der K. Böhm. Ges. d. Wiss. Prag. Seit 1859 regelm. Jhrgge.

Die American Philosophical Society zu Philadelphia hat:

Transactions of the American Philos. Soc. I—V, 1771—1809; (2) I, 1818 u. flg.;
Proceedings of the Amer. Philos. Soc. Seit 1840.

Von Bedeutung für die mathematische Literatur sind auch folgende im 18. Jahrhundert entstandene Akademieschriften:

Verhandlingen uitgegeven door de Hollandische Maatschappije der Wetenschappen te Haarlem. I—XXX, 1754—93; und Natuurkundige Verhandelingen van de (Bataafsche) Hollandsche Maatschappije. 4° Haarlem I, 1799 u. flg.

Die Zeitschrift Archives Néerlandaises derselben Gesellschaft ist schon oben (S. 32) genannt.

Die Académie R. des sciences, des lettres et des beaux arts de Belgique veröffentlichte folgende wohl zu unterscheidende Serien:

a) Mémoires couronnés, Bruxelles, p. les ann. 1773—82, 7 v. 4°;
b) Mémoires I—IV, 1777—88; Nouv. Mém. I—XIX, 1820—45; Mémoires XX etc., 1847 u. flg.;
c) Mémoires couronnés et Mémoires des savans étrangers. 4°. I—V (Mém. sur les questions prop.) 1818—25, VI—XV (Mém. cour.) 1827—43, XVI etc. (Mém. cour. et Mém. d. sav. étr.) 1844 u. flg.;
d) Mémoires couronnés et autres Mémoires. 8°. I, 1840 u. flg.;
e) Bulletin de l'Académie etc. 8°. I—XXIII (a. 1832 etc.) 1835—56, (2) I, 1857 u. flg. (3) I, 1881 u. flg.;
f) Annuaire de l'Académie etc. 12°. Seit 1835.

Zahlreiche Serien, zuletzt von 10 zu 10 Jahren, haben die
Mémoires de l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse. 8°. I (a. 1781) 1782, ... (10) I, 1899 u. flg.

Die American Academy of Arts and Sciences zu Boston hat ihre
Memoirs I—IV, 1783—1821; (2) I, 1833 u. flg. unregelmäßig;
Proceedings I, 1848 u. flg. Seit IX = (2) I, 1874 jährlich.

Die Literary and Philosophical Society of Manchester:
Memoirs seit 1875, mehrere Serien, unregelmäßig, und
Proceedings I, 1857 u. flg.

Von der Royal Irish Academy zu Dublin gibt es:
Transactions I (year 1786) 1787 u. flg., unregelmäßig;
Proceedings I, 1841 etc., mehrere Serien;
Journal, seit 1856.

Die Academia Real das Sciencias de Lisboa veröffentlicht:
Memorias. Classe de sc. math., phys. e naturaes, seit 1797;
Jornal de sc. math., phys. e nat. Seit 1868.

Die Accademia di scienze, lettere ed arti in Padova hat:
a) Saggi scientifici e letterarie, 4°, I—IV, 1786—94;
b) Nuovi Saggi 4°, I—VII, 1817—63;
c) Rivista periodica dei lavori, I, 1851 u. flg.;
d) Atti e Memorie, seit 1883.

In Neapel gab es schon 1698 eine Accademia Palatina, welche 1732 Reale Accademia delle scienze, 1778 R. Acc. delle scienze e belle lettere wurde. Sie gab heraus:
Atti dell' Accademia Borbonica I—VI, Napoli 1819—51;
Memorie della Reale Accademia. I (1852/4) Napoli 1856, II (1855/7) 1857;
Rendiconto delle adunanzi e de' lavori, (1842—61) 1850—61;
Atti della R. Acc. delle scienze fisiche e matematiche (Classe d. Soc. R. di Napoli) I—IX, 1863—82, (2) I—XI, 1888—1902, etc. Rendiconto 4° I—XXV, 1862—86, (2) 4° I—VIII, 1887—94, (3) 8° I—IX, 1895—1903, etc.

Im 19. Jahrhundert ist zuerst zu nennen das Istituto Lombardo zu Milano. Von ihm gibt es folgende Serien:
a) Memorie dell Istituto Nazionale Italiano-Bologna. 4°. I—VI, 1806—13;
b) Memorie dell (J. R.) Istituto del Regno Lombardo-Veneto. Milano 4°. I (ab a. 1812) — V, 1819—38;
c) Annali delle scienze. Milano I—IX, 1831—39;
d) Memorie. Cl. di sc. mat. e nat. Seit 1843;
e) Atti. I—III, 1857—63;
f) Rendiconti. I—IV, 1864—67, (2) I, 1868 u. flg.

Die Société Impériale des Naturalistes de Moscou hat:
a) Mémoires I—VI, 1811—23; b) Nouveaux Mémoires, seit 1829; c) Bulletin I—IX, 1829—37; (2) I, 1837 u. flg.

Die Koninglijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam veröffentlichte:
a) Verhandelingen I—VII, 1812—25; (2) (Nieuwe Verh.) I—XIII, 1827—48; (3) (Verh.) I—V, 1849—52; (4) I, 1854 etc. Seit 1893 Erste Sectie I, u. flg.;
b) Verslagen en Mededeelingen. Seit 1853;
c) Verslag van de gewone Vergaderingen der Wis- en Natuurkundige Afdeeling d. K. Ak. I, 1892/3, etc.;
d) Jaarboek, seit 1847.

In polnischer Sprache sind die Veröffentlichungen der Akademie der Wissenschaften zu Krakau:
a) Roczniki (Jahrbücher) seit 1817;
b) Pamiętnik (Bulletin) seit 1874; Rozprawy (Sitzungsberichte d. math.-naturw. Sektion) seit 1874; Denkschriften, seit 1874.

Wichtiger sind die Publikationen der Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux:
a) Sciences publiques, 1819—37;
b) Recueil des Actes, I—XIX, 1839—51, (2) I—III (XXI—XXIII). 1856—60;
c) Mémoires I—X, 1854—75, (2) I—V, 1876—83, etc. Serien zu je 5 Bänden.

Von der Cambridge Philosophical Society haben wir
a) Transactions, seit 1821; b) Proceedings, seit 1865.

Die Reale Accademia di scienze, lettere ed arti di Modena hat:
Memorie I—XX, 1833—82, (2) I, 1883 u. flg.

Das Ateneo di Venezia gab heraus:
a) Sessioni (a. 1812—16), 1814—17;
b) Exercitazioni scientifiche e letterarie, I—V, 1827—46;
c) Atti (2) I—XIV, 1864—77, (3) I, 1878 etc.

Die Accademia Gioenia de Scienze Naturali in Catania seit 1824. Atti. (4) 18, anno LXXXII, 1905.

Die Gesellschaft der Wissenschaften zu Helsingfors:
a) Acta Societatis Scientiarum Fennicae, seit 1842, und
b) Öfversigt af Finska Vetenskaps Societetens Förhandlingar. Seit 1858 jährlich ein Band.

Von der Société des Sciences de Liége (Lüttich) erscheinen:
Mémoires I (a. 1842) — XX, 1843—66; (2) I, 1866 u. flg.

Als Vorläufer der Publikationen der K. Ges. d. Wiss. zu Leipzig könnten angeführt werden:
a) Miscellanea Lipsiensia, I—XII, 1703—23;
b) Miscellanea Lipsiensia nova, I—X, 1742—58.

Fast 1 Jahrhundert später beginnen die
Abhandlungen der Math.-phys. Classe der K. Sächs. Ges. d. Wiss. Leipzig 4°. I, 1852 u. flg. und
Berichte Math.-phys. Cl. I (1846/7) 1848 und regelmäßige Jahrgänge.

In Rom gründete unter Paul V. (1605—21) der 18jährige Fürst Federigo Cesi am 18. August 1603 die Accademia dei Lincei, nach dem Luchs, dem durch Scharfblick bekannten Tiere, benannt. Die als Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei erneuerte Akademie gibt seit 1847 Atti heraus. Im Jahre 1870 wurde von der Päpstlichen Akademie die Reale Accademia dei Lincei zu Rom getrennt. Ihre Atti (XXIV—XXVI), 1871—73, (2) I—III, 1873—76 teilten sich in Transunti, I—VIII, 1877—84, seitdem die Rendiconti und Memorie delle Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali I, 1877 etc.

Die i. J. 1846 zu Wien gegründete Kaiserl. Akademie der Wissenschaften gibt für ihre II. (math.-naturw.) Classe seit 1848 Sitzungsberichte, seit 1850 Denkschriften und seit 1864 Anzeigen heraus.

Die Gesellschaft der Wissenschaften in Christiania veröffentlicht außer den Forhandlingar i Videnskabs-Selskabet i Christiania, 1858 u. flg. regelm. Jhrgge, seit 1889 Skrifter.

Abschnitt V. Mathematische Bibliographien.

Eine vollständige mathematische Bibliographie, welche alle mathematischen Schriften seit Erfindung der Buchdruckerkunst bis in die neueste Zeit enthält, gibt es bis jetzt noch nicht; doch hat Herr G. Valentin eine solche allgemeine mathematische Bibliographie, alphabetisch nach den Namen der Verfasser geordnet, seit mehreren Jahren in Arbeit. Die neuere mathematische Literatur findet man in den oben genannten Zeitschriften mathematischen Inhalts, besonders in denen, die der Geschichte und Bibliographie der Mathematik gewidmet sind. Die wichtigere ältere mathematische Literatur suche man in den oben angeführten Werken über Geschichte der Mathematik. Auch enthalten die in dem folgenden Abschnitt zu nennenden Enzyklopädien, Wörterbücher und Gesamttraktate viele literarische Notizen.

Von älteren Versuchen mathematischer Bibliographien müssen wir einige nennen, die häufig beim Aufsuchen älterer Werke gute Dienste leisten, obwohl es ihnen meist an einer geschickten systematischen Anordnung fehlt und es schwer ist, die Spreu vom Weizen zu unterscheiden.

Cornel. a Beughem, Bibliographia mathematica. Amstel. 1688. 526 S. Enthält viele seltene Schriften.

Fr. W. A. Murhard, Literatur der mathematischen Wissenschaften. Bibliotheca mathematica. 5 Bde. Leipzig 1797—1805. Bei vielen Werken werden die Journalbände angeführt, in denen Besprechungen und Rezensionen enthalten sind. Reine Mathematik I u. II. 256 u. 436 S. 8°.

Joh. Ephr. Scheibel, Einleitung zur mathematischen Bücherkenntnis. 3 Bde. Breslau 1769—89. Erster Band (Stück 1—6) in neuer Auflage 1781, II (St. 7—12) 1775—1781. Der 3. Band (Stück 13—20) 1785—1798, enthält die Astronomie.

Während hier nur Einzelwerke aufgezählt werden, bringt

J. D. Reuß, Repertorium Commentationum a Societatibus litterariis editarum, 7 Bde. Göttingen 1802—08

ein systematisch geordnetes Verzeichnis der in Akademieberichten bis 1800 veröffentlichten Abhandlungen. Band VII enthält die Mathematik.

J. W. Müller, Auserlesene mathematische Bibliothek. Nürnberg 1820. XXII u. 266 S. 8°.

J. S. Ersch, Literatur der Mathematik, Natur- und Gewerbskunde, seit der Mitte des 18. Jahrhunderts bis auf die neueste Zeit. Amsterdam u. Leipzig 1803. I. Abschn. Mathematik, 1—58.

J. Rogg, Handbuch der mathematischen Literatur vom Anfange der Buchdruckerkunst bis zum Schluß des Jahres 1830. I. Abteilung, welche die arithmetischen und geometrischen Wissenschaften enthält. Tübingen 1830. 578 S. 8°.

L. A. Sohncke, Bibliotheca mathematica. Leipzig 1854. 388 S. 8°. Fortsetzung des Rogg, vom Jahre 1830 bis Mitte des Jahres 1854.

A. Erlecke, Bibliotheca mathematica. I (einz.) die enzyklopädisch-mathematische Literatur umfassend. Halle a. S. 1873. 307 S. (Generalregister deutscher Zeitschriften.)

Eine alle exakten Wissenschaften umfassende Bibliographie seit dem Jahre 1800 bis 1883 enthält der



Catalogue of scientific papers. Edited by the Royal Society of London. 12 Bde. London 1867—1902. Fortsetzung bis 1900 in Arbeit.

Gleichsam eine Fortsetzung dieses Katalogs für die Literatur der exakten Wissenschaften seit 1900 soll sein der:

International Catalogue of scientific literature. Published by the R. Society of London. Seit 1902. A. Mathematics, B. Mechanics etc. Anfänglich sehr unvollständig.

Ein systematisches Verzeichnis von Einzelwerken mathematischen Inhalts, die im 19. Jahrhundert erschienen sind, gibt:

E. Wölffing, Mathematischer Bücherschatz. I. T. Reine Mathematik. Abh. z. Gsch. d. Math. **16**, 1. Leipzig 1903. xxxvi u. 416 S. Die Einleitung bringt eine kritische Übersicht über die bibliographischen Hilfsmittel der Mathematik. S. i—xxxii.

Für die Astronomie ist unentbehrlich das Werk von:

J. C. Houzeau et **A. Lancaster,** Bibliographie générale de l'astronomie. I. P. cxx u. vii u. 1623 p. 1887—89. II. P. lxxxix p. u. 2218 Spalten. 1623. 1882 Bruxelles.

Für die in Italien erschienenen Werke ist zu nennen:

P. Riccardi, Biblioteca matematica italiana dalla origine della stampa ai primi anni del secolo XIX. Ripubblicata a cura della Società tipografica modanese, con due nuove serie di aggiunte. 2 v. Torino 1894. 4°.

Auf die Bibliographien einzelner mathematischer Disziplinen oder Probleme werden wir bei der Literatur der betreffenden Disziplinen hinweisen.

Abschnitt VI. Enzyklopädien und Gesamtkompendien.

§ 1. **Enzyklopädien**. Über die Enzyklopädien des Altertums und Mittelalters, die nur noch historisches Interesse haben, unterrichtet uns M. Cantor in seinen Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Wir verweisen deshalb auf dieses Werk und beginnen mit dem 16. Jahrhundert.

Ein sehr beliebter Lehrbegriff des Quadriviums war:

Mich. Psellus, Liber de quatuor mathematicis scientiis: arithmetica, musica, geometria et astronomia. Gr. et lat. Guil. Xylandro interprete. Basil. et Wittemb. 1556 und spätere Auflagen.

Ihm folgte der Gesamttraktat des

Petrus Ramus, Scholarum mathematicarum libri XXXI. Frankf. a. M. 1569 (320 S.) und 1599 (444 S.).

In seine berühmte Enzyklopädie aller Wissenschaften vom Jahre 1611 und später nahm Joh. Heinr. Alsted sein Elementale mathematicum, in quo continentur arithmetica, geometrica, geodaesia, astronomia, geographia, musica, optica, Frankf. 4° 1588, in neuer Bearbeitung auf.

Weit umfangreicher war der Gesamttraktat des

Pierre Hérigone (Petrus Herigonius), Cursus mathematicus, nova, brevi et clara methodo demonstratus. 6 vol. Paris 1634—1642.

Außer dem Inhalt der 13 Bücher Euklids und einiger Schriften des Apollonius enthält er eine Arithmetik, Algebra, Trigonometrie, praktische

Geometrie, Fortifikation, Astronomie, Geographie, Nautik, Optik, Katoptrik, Dioptrik, Perspektive, Gnomonik und Akustik. Neben ihm nennen wir noch:

Claude Franç. Milliet Dechales, Cursus seu mundus mathematicus. 3 v. fol. Lugd. 1674; 4 v. ib. 1690, und

Kaspar Schott, Cursus mathematicus seu absoluta omnium mathematicarum disciplinarum encyclopaedia in libros XXVIII digesta. fol. Herbipoli 1661, Frankf. 1674 (660 S.), Bamberg 1677.

Nach der Ordnung der Disziplinen gesammelte und erklärte mathematische Kunstausdrücke enthält:

Jacques Ozanam, Dictionnaire mathématique ou Idée générale des mathématiques. 4°. Paris 1690. Brauchbarer ist mit alphabetischer Anordnung der Terme

Christian v. Wolff, Mathematisches Lexikon. 8°. Leipzig 1716; 2. Aufl. 1732; auch

A. Savérien, Dictionnaire universel de mathématiques et de physique. 2 v. 4°. Paris 1752.

Die wichtigsten mathematischen Beiträge von d'Alembert, Bossut, Condorcet und Lalande zu d'Alemberts und Diderots berühmter Encyclopédie ou Dictionnaire raisonnée des sciences, des arts et des métiers, 33 v. fol. Paris 1751—81, erschienen als

Encyclopédie méthodique. Mathématiques. I—III. Paris 1784—89. ca. 3500 S.

Einzelne recht gute Artikel und viele historische Daten enthält:

Ch. Hutton, A mathematical and philosophical dictionary. 2 v. 4°. London 1795—96; new ed. 1815.

A. S. de Montferrier, Dictionnaire des sciences pures et appliquées. 2 vol. 4°. Bruxelles 1838.

Wenig benutzt, obwohl eine Fundgrube hübscher Sätze, wird heute

Georg Simon Klügel, Mathematisches Wörterbuch. Fortgesetzt von Mollweide und Grunert. 5 Bde. u. 4 Supplementbände Leipzig 1803—47. Für angewandte Mathematik fortges. von Jahn, 2 Bde. 1855.

Wichtiger für die angewandte Mathematik als für die reine ist:

L. Hoffmann u. **L. Natani,** Mathematisches Wörterbuch. 7 Bde. Leipzig. 1857—1867.

Die ausgezeichneten Artikel von L. Natani sind unter dem Titel: „Die höhere Analysis mit Berücksichtigung der Theorie der complexen Größen", Berlin 1866, besonders erschienen.

Für die angewandte Mathematik ist zu nennen:

H. Sonnet, Dictionnaire des mathématiques appliquées. Paris 1868; 2d éd. 1895. iv u. 1478 S. 8°.

§ 2. **Gesamtkompendien.** Das älteste Kompendium für Studierende in deutscher Sprache ist:

Leonh. Chr. Sturm, Kurtzer Begriff der gesamten Mathesis. Nürnberg 1707; 2. Aufl. 1710. Inhalt: Universal-Mathesis; Wissenschaft der Zahlen, der Größe, des Maßes, der Schwere, der Bewegung; Algebra; Rechenkunst; Meßkunst, Militairbaukunst, Civilbaukunst, Artollerie, Mechanica, Astronomie, Geographie, Chronologie, Sonnenuhren, Optik, Perspective, Akustik, Tabellen.

Ein für seine Zeit sehr bedeutendes Lehrbuch der gesamten Mathematik war das von



Christian von Wolf, Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften. 4 Bde. 8°, Halle 1710, und später wiederholt aufgelegt; 10. Aufl. 1775; 11. Aufl. 1800. Ebenso seine Elementa matheseos universae. Halae. 2 v. 4°. 1713; 5 vol. Verona 1713—41, 1730—52, 1743—69, mit wiederholten Auflagen und Auszügen. Der IV. Band der deutschen Ausgabe, ebenso wie der V. der Elementa, enthält einen bibliographischen Anhang: Kurzer Unterricht von den vornehmsten mathematischen Schriften. Neue Aufl. Wien 1763.

Ein viel benutztes Kompendium der gesamten Mathematik für Studierende war:

A. G. Kästner, Anfangsgründe der Mathematik. 4 Teile, Göttingen 1758—66.

Wir führen den Inhalt der einzelnen Teile an, da er charakteristisch für die damaligen und folgenden mathematischen Gesamttraktate. I, 1. Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie und Perspektive. 1758; 6. Aufl. 1800 (512 S.) I, 2. Weitere Ausführung der Rechenkunst in Anwendung auf mancherlei Geschäfte. 1781; 3. Aufl. 1801. I, 3 u. 4. Sammlung geometrischer Abhandlungen und Anwendungen der ebenen Geometrie und Trigonometrie. 1790—91. II, 1 u. 2. Anfangsgründe der angewandten Mathematik. Mechanik und optische Wissenschaften, Astronomie, Geographie, Chronologie und Gnomonik, Artillerie, Fortifikation und bürgerliche Baukunst. 1759; 4. Aufl. 1792. III, 1. Anfangsgründe der Analysis endlicher Größen. 1760; 3. Aufl. 1794 (579 S.). III, 2. Anfangsgründe des Unendlichen. 1760; 3. Aufl. 1799. IV, 1. Höhere Mechanik. 1765; 2. Aufl. 1793. IV, 2. Hydrodynamik. 1766; 2. Aufl. 1797.

W. J. G. Karsten, Lehrbegriff der gesamten Mathematik. 8 Teile. Rostock und Greifswald 1767—77; neue Aufl. 1786—95.

J. A. v. Segner, Cursus mathematici, sen elementa arithmeticae, geometriae et calculi geometrici, analyseos finitorum etc. 5 v. Halle 1757—68. Viele Auflagen und Übersetzungen.

Aus der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts sei angeführt:

M. Ohm, Versuch eines vollkommen konsequenten Systems der Mathematik. 3 Bde., 8 Teile. Berlin 1822; 2. Aufl. 1828—51. I. Niedere Analysis: Arithmetik und Algebra. 1828. II. Algebra und Analysis des Endlichen. 1829. III. Lehrbuch der höheren Analysis: Differential- und Integralrechnung (4 Teile) 1829—32; die Lehre von den endlichen Differenzen und Summen und der reellen Faktoriellen und Fakultäten, sowie die Theorie der bestimmten Integrale. 1851.

In Frankreich waren sehr beliebt 2 Kompendien der reinen Mathematik:

N. L. de la Caille, Leçons élémentaires de mathématiques. Seit 1741 bis 1811 in zahlreichen Auflagen; und

M. J. Lemoine, Traité élémentaire des mathématiques, ou principes d'arithmétique, de géométrie et d'algèbre, avec les sections coniques, plusieurs autres courbes anciennes et modernes, le calcul différentiel et le calcul intégral, l'histoire des mathématiques pures et des géomètres les plus célèbres. Paris 1789; 3. éd. 1793.

Ét. Bezont, Cours complet de mathématiques. 4 v. Paris 1770—72; 2. éd. 1795—99; augm. par Garnier. 6 v. 1806; nouv. ed. par Reynaud et de Rossel. 6 v. 1814 u. 1825.

Ein älteres Kompendium der Mathematik in italienischer Sprache sei noch erwähnt, weil es nach Lagrange's Urteil damals das vollständigste Werk über Mathematik war:

Od. Gherli, Gli elementi teorico-pratici delle matematiche pure. Publ. da D. Pollera. 7 vol. fol. Modena 1770—1777.

Im 19. Jahrhundert wird die Zahl der brauchbaren Lehrbücher, welche alle Gebiete der Mathematik darstellen, immer geringer; desto größer die Zahl der Lehrbücher für einzelne Disziplinen. Zu erwähnen ist:

O. Schlömilch, Handbuch der Mathematik. Encyklopädie der Naturwissenschaften I. Abteilung. 2 Bde. Breslau 1879—81. 2. Aufl. Hrsg. von R. Henke und R. Heger. Leipzig 1904. I. Band. Elementarmathematik (Arithmetik und Algebra, Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie). xii u. 611 S. II. Band. Höhere Mathematik. I. Teil (1. Buch: Darstellende Geometrie. 2. Buch: Analytische Geometrie der Ebene. 3. Buch: Analytische Geometrie des Raumes). 4. Buch: Differentialrechnung. viii u. 765 S. III. Band. Höhere Mathematik. II. Teil (Integralrechnung, Abriß der Ausgleichungsrechnung, mathematische Grundlage der Lebens- und Invalidenversicherung, mathematische Kartenentwurfslehre). viii u. 622 S.

Auf diese werden wir in den folgenden Büchern zu sprechen kommen.

In Frankreich erschien ein ausgezeichnetes Werk für die Kandidaten der École polytechnique, der École normal und der École centrale des arts et manufacture, von

Ch. de Comberousse, Cours de mathématiques. 4 vol. Paris. I. Arithmétique et algèbre élémentaire. 3. éd. 1884. II. Géométrie élémentaire, plane et dans l'espace; Trigonométrie rectiligne et sphérique. 3. éd. 1893. III. Algèbre supérieure. 1. Partie. Compléments d'algèbre élémentaire; Combinaisons; Séries; Études des fonctions; Dérivées et différentielles. Premiers principes du calcul intégral. 2. éd. xxi u. 767. 1887. IV. Algèbre supérieure. 2. Partie. Étude des imaginaires. Théorie générale des équations. 2. éd. xxxiv u. 831. 1890.

Zur vorläufigen Orientierung in den Resultaten der höheren Mathematik und in der betreffenden Literatur ist recht geeignet:

E. Pascal, Repertorio di matematiche superiori (Definizioni, formole, teoremi, cenni bibliografici). Milano. I. Analisi 1898. xv u. 642. II. Geometria 1900. xxviii u. 928. Deutsch von A. Schepp: Repertorium der höheren Mathematik. Leipzig. I. Analysis 1900. 638 S. 8°. II. Die Geometrie. 1902. 712 S.

Schließlich haben wir einiger Enzyklopädien zu gedenken, die im Entstehen begriffen sind.

Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, mit Einschluß ihrer Anwendungen. Hrsg. im Auftrage der Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien. 7 Bde. Leipzig. I. Arithmetik und Algebra, red. von W. Fr. Meyer. II. Analysis, red. von H. Burkhardt und W. Wirtinger. III. Geometrie, red. von W. Fr. Meyer. IV. Mechanik, red. von F. Klein und C. H. Müller. V. Physik, red. von A. Sommerfeld. VI, 1. Geodäsie und Geophysik, red. von Ph. Furtwängler und E. Wiechert. VI, 2. Astronomie, red. von K. Schwarzschild. VII. Historisches, Philosophisches, Didaktisches, red. von F. Klein und C. H. Müller.

Erst Band I ist vollständig erschienen (1904); von den übrigen Teilen bis jetzt nur einzelne Hefte, die wir bei den einzelnen Disziplinen erwähnen werden. Eine französische Bearbeitung dieser großen Enzyklopädie



erscheint unter dem Titel Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées. Sous la direction de Jules Molk. Leipzig und Paris.

J. G. Hagen, Synopsis der höheren Mathematik. Berlin gr. 4°. I. Arithmetische und algebraische Analyse. 1891. viii u. 398. II. Geometrie der algebraischen Gebilde. 1894. viii u. 416. III. Differential- und Integralrechnung. 1906. 471 S. Mehrere Bände sollen folgen.

§ 3. Formelsammlungen. Modelle.

W. Laska, Sammlung von Formeln aus der reinen und angewandten Mathematik. Braunschweig 1888—1894. xvi u. 1071. (Nicht frei von Fehlern.)

„Hütte", Des Ingenieurs Taschenbuch, hrsg. v. Akad. Verein „Hütte". 19. Aufl. Berlin 1905. 2. Abt. 1334 u. 926 S. kl. 8°.

G. S. Carr, Synopsis of elementary results in pure mathematics containing propositions, formulae and methods of analysis, with abridged demonstrations. London 1886, xxxvi u. 936 u. 20 Taf. gr. 8°. Enthält Sätze und Formeln, mit Quellenangabe.

O. Th. Bürklen, Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik. 2. Aufl. Leipzig, Göschen. 1898. 229 S. 8°.

C. E. O. Neumann, Formelbuch, enthaltend die hauptsächlichsten Formeln, Sätze und Regeln der Elementar-Mathematik. 6. Aufl. Dresden. iv u. 168. 1899.

J. Weisbach, Ingenieur. Sammlung von Tafeln, Formeln und Regeln der Arithmetik, der theoretischen und praktischen Geometrie, sowie der Mechanik und des Ingenieurwesens. 7. Aufl. von F. Reuleaux. Braunschweig 1896. xx u. 1058 S. 8°.

R. Wolf, Taschenbuch für Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie. 6. Aufl., von A. Wolfer vollendet. Zürich 1895. xxiv u. 388 S. 12°.

W. Ligowski, Taschenbuch der Mathematik. Tafeln und Formeln zum Gebrauche für den Unterricht an höheren Lehranstalten und zur Anwendung bei Berechnungen. Berlin. 3. Aufl. 1893. xiii u. 219. 12°.

G. Peano, Formulaire mathématique. Turin 1901—3. (Eine Sammlung von Formeln in der Sprache der mathematischen Logik.)

Martin Schilling, Katalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht. 6. Aufl. Halle a. S. 1903. xiii u. 130 S.

§ 4. Neuere Kompendien der Elementar-Mathematik. Aus der Flut der neueren Lehrbücher der gesamten Elementar-Mathematik können wir hier nur einige wenige hervorheben. Ihr Inhalt ist meist durch die Prüfungs-Reglements und Pensenbestimmungen für Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen bestimmt, und ändert sich häufig mit diesen Bestimmungen. Diese Lehrbücher enthalten meist die sieben elementaren algebraischen Operationen, die Theorie der Gleichungen bis zu denen 3. Grades, arithmetische und geometrische Reihen, die elementare Geometrie bis zur Kreisberechnung, die ebene und sphärische Trigonometrie, die Elemente der Stereometrie und die Elemente der analytischen Geometrie, in letzter Zeit auch eine Einführung in die Differentialrechnung.

F. G. Mehler, Hauptsätze der Elementar-Mathematik zum Gebrauche an Gymnasien und Realgymnasien. Mit einem Vorwort von K. Schellbach. Berlin. 22. Aufl. 1901.

Haller von Hallerstein, Lehrbuch der Elementar-Mathematik. 1. T. Arithmetik. 2. T. Geometrie. Berlin 1846. 11. Aufl. Hrsg. von B. Hülsen. I, 1902. vi u. 412 S. gr. 8°; II, 1906. viii u. 552 S.

L. Kambly, Die Elementar-Mathematik für den Schulgebrauch. 1. T. Arithmetik und Algebra. 34. Aufl. von H. Langguth. Breslau 1892. 168 S. 2. T. Planimetrie mit Anhang: Trigonometrische und stereometrische Lehraufgabe. 123. Aufl. von H. Röder. 1900.

R. Baltzer, Die Elemente der Mathematik. Berlin. 2. T. 7. Aufl. 1885.

G. Holzmüller, Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik. Leipzig. Allgemeine Ausgabe A. I. T. bis zur Abschlußprüfung. 3. Aufl. viii u. 239. 1898. 4. Aufl. 1904. xii u. 319 S. II. für die 3 Oberklassen. 2. Aufl. viii u. 292 S. 1897. III. Lehr- und Übungsbuch für die Oberklassen. 2. Aufl. xiv u. 370 S. 1903. Ausgabe B für Gymnasien. I. viii u. 228 S. 1896. II. viii u. 280 S. 1896.

Heinrich Müller, Die Mathematik auf den Gymnasien und Realschulen. Leipzig. Ausgabe A. Für Gymnasien und Progymnasien. I. T. Unterstufe. viii u. 137 S. 2. Aufl. 1902. II. T. Oberstufe. xii u. 311 S. 2. Aufl. 1902. Ausgabe B. Für reale Anstalten und Reformschulen. I. T. Unterstufe. 3. Aufl. viii u. 199. S. 1904. II. T. Oberstufe. 2. Aufl. 1902. Abt. 1. Planimetrie, Algebra, Trigonometrie und Stereometrie. viii u. 223 S. Abt. 2. Synthetische und analytische Geometrie der Kegelschnitte. Grundlehren der darstellenden Geometrie. viii u. 178 S.

Mehr ein Leitfaden für Lehrer, als eine Enzyklopädie ist

H. Weber und **J. Wellstein,** Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. I. Elementare Algebra und Analysis. 2. Aufl. xviii u. 539. Leipzig 1906. II. Elementare Geometrie. xiv u. 600. 1905. III. Anwendungen der Elementar-Mathematik, bearb. von K. Weber, H. R. Weber und J. Wellstein. xiii u. 658. 1907.

Auf einzelne Teile anderer Elemente der Mathematik werden wir bei der Literatur der speziellen Disziplinen zurückkommen.

Zweiter Teil.

Philosophie. Pädagogik. Algebra. Arithmetik. Analysis.

Abschnitt I. Philosophie der Mathematik.

§ 1. **Einleitung.** Es ist klar, daß der Studierende der Mathematik, um seine allgemeine Bildung zu fördern, Vorlesungen über Philosophie besucht und an philosophischen Übungen teilnimmt. Aus der Geschichte der Philosophie wird er die Stellung der Mathematik zu den älteren philosophischen Systemen kennen lernen. Von besonderem Interesse werden für den Studierenden der Mathematik die Philosophen Plato, Aristoteles, Spinoza, Baco von Verulam, Descartes, Leibniz, Kant und Herbart sein. Während die früheren Philosophen bis auf Kant ihr fertig ausgebildetes System auf die exakten Wissenschaften übertrugen, bemühen sich später die Vertreter der exakten Wissenschaften, diese philosophisch zu erfassen. Die philosophischen Grundlagen der Mathematik werden Gegenstand zahlreicher Schriften. Die Untersuchungen über das Wesen der Mathematik beruhen bei einigen Philosophen, wie bei Kant, auf logischen Betrachtungen, bei anderen, wie Herbart, auf psychologischen. In zahlreichen Werken über Logik werden die Erkenntnisprinzipien der Mathematik behandelt; desgleichen die mathematische Methodenlehre. Andere Schriften behandeln insbesondere den Zahlbegriff, den Begriff des Raumes, die Prinzipien der Mechanik und die der Physik. Nach diesen Kategorien werden wir die Orientierung in den Schriften philosophisch-mathematischen Inhalts anordnen. Von einer Aufzählung der Gesamtausgaben der Werke oben genannter Philosophen können wir abstehen.

Schließlich machen wir darauf aufmerksam, daß die philosophischen Grundlagen der einzelnen mathematischen Disziplinen meist in den sie behandelnden Lehrbüchern zu finden sind, von denen weiter unten die Rede sein wird.

§ 2. **Allgemeine Beziehungen zwischen Philosophie und Mathematik** finden sich in folgenden Werken:

Ed. Zeller, Die Philosophie der Griechen in ihrer geschichtlichen Entwickelung dargestellt. Leipzig. I. 4. Aufl. 1876; II. 3. Aufl. 1875—79; III. 3. Aufl. 1880—81. Neue Aufl. im Erscheinen.

Francisque Bouillier, Histoire de la philosophie Cartésienne. 3. éd. Paris 1868.

I. Kant, Kritik der reinen Vernunft. Königsberg 1781. Hrsg. von J. H. v. Kirch-

mann. 2. Aufl. Berlin 1870. 720 S. Hrsg. von Benno Erdmann. 4. Aufl. Hamburg 1889. Darin u. a. neue Anschauungen vom Raume.

I. Kant, Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik, die als Wissenschaft wird auftreten können. Hrsg. u. hist. erklärt von Benno Erdmann Hamburg 1878.

H. Wronski, Introduction à la philosophie des mathématiques. Paris 1811.

I. F. Herbart, Über die Möglichkeit und Notwendigkeit, Mathematik auf Psychologie anzuwenden. Königsberg 1823.

I. F. Herbart, Psychologie als Wissenschaft, gegründet auf Erfahrung, Metaphysik und Mathematik. Königsberg 1826.

I. F. Herbart, Psychologische Untersuchungen. 2 Hefte. Göttingen 1839 u. 1840.

Th. Wittstein, Neue Behandlung des mathematisch-psychologischen Problems. Hannover 1845.

M. W. Drobisch, Quaestionum mathematico-psychologicarum specimina. Fasc. 1—4. Leipzig 1836—39.

Th. Waitz, Lehrbuch der Psychologie als Naturwissenschaft. Braunschweig 1849. 685 S.

J. Plšail, Die wichtigsten Grundlagen der mathematischen Psychologie. Pr. Leitomyschl 1883. (Historisch: Leibniz, Wolff, Herbart, Drobisch, Fechner u. a.)

F. A. Lange, Grundlegung der mathematischen Psychologie. Ein Nachweis des fundamentalen Fehlers bei Herbart und Drobisch. 1865.

H. Scheffler, Wesen der Mathematik und Aufbau der Welterkenntnis auf mathematischer Grundlage. Braunschweig. I. VIII u. 409. 1895. II. VIII u. 462. 1896.

§ 3. **Logik und Methodenlehre.** Die Begründung einer wissenschaftlichen Methode in den exakten Wissenschaften verdanken wir

Fr. Baco von Verulam, De dignitate et augmentis scientiarum. London 1605.

Francis Baco, Neues Organon. Übersetzt und erläutert von J. H. v. Kirchmann. Berlin 1870.

Ihm folgte das berühmte Werk von

René Descartes, Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher les vérités dans les sciences; plus la Dioptrique, les Météores et la Géométrie. Leyden 1637; Geometria. lat. ed. Schooten Lugd. Bat. 1649.

G. Lamé, Examen des différentes méthodes pour les problèmes de géométrie. Paris 1818. Réimpr. Paris, A. Hermann. 1903. XII u. 124 S. 8°.

Joh. Heinr. Lambert, Neues Organon, oder Gedanken über die Erforschung und Bezeichnung des Wahren und dessen Unterscheidung vom Irrtum und Schein. 2 Bde. Leipzig 1764. 592 u. 436 S.

I. Kant, Logik. Ein Handbuch zu Vorlesungen. Hrsg. von G. B. Jäsche; erläutert von J. H. v. Kirchmann. 2. Aufl. Leipzig 1876. 164 S.

W. Hamilton, Lectures on logic. Dublin. 3. ed. 1860.

H. Lotze, Logik. Drei Bücher vom Denken, vom Unterscheiden und vom Erkennen. 2. Aufl. Leipzig 1880. 608 S.

M. W. Drobisch, Neue Darstellung der Logik nach ihren einfachsten Verhältnissen mit Rücksicht auf Mathematik und Naturwissenschaft. 5. Aufl. Hamburg 1887. 247 S.

J. Stuart Mill, System of logic, ratiocinative and inductive. London 1842 u. spätere Aufl. Deutsch: System der deduktiven und induktiven Logik. Übers. von J. Schiel. 4. Aufl. Braunschweig 1877. 2 Bde. 573 u. 586 S. Deutsch von Th. Gompertz. 3 Bde. Leipzig. 2. Aufl. 1884—86.

J. Schiel, Die Methode der induktiven Forschung; nach J. Stuart Mill. Braunschweig 1865.

A. Fouillée, La logique de Port-Royal. Éd. nouv., avec introduction et notes, suivie d'éclaircissements et d'extraits d'Aristote, Descartes, Male-



branche, Spinosa, Leibniz, Kant, Hamilton, Stuart Mill. Paris 1879. 456 p. Neue Ausgabe des Werkes von Arnaud et Nicole, La logique ou l'art de penser ou La logique de Port-Royal, 1662.

H. Burhenne, Die Mathematik als System betrachtet. Eine Skizze. Cassel 1838.

H. Schwarz, Versuch einer Philosophie der Mathematik verbunden mit einer Kritik der Aufstellungen Hegels über den Zweck und die Natur der höheren Analysis. Halle 1853.

Const. Frantz, Die Philosophie der Mathematik. Zugleich ein Beitrag zur Logik und Naturphilosophie. Leipzig 1842.

Fr. Harms, Logik. Aus dem Nachlasse des Verfassers hrsg. von Heinr. Wiese. Leipzig 1886. 308 S.

Fr. Überweg, System der Logik und Geschichte der logischen Lehren. 4. Aufl. Bonn 1874. 434 S.

J. M. C. Duhamel, Des méthodes dans les sciences de raisonnement. 5 Vol. Paris 1865—68. I. Des méthodes communes à toutes les sciences de raisonnement. 3. éd. 1885. II. Application des méthodes à la science des nombres et à la science de l'étendue. 2. éd. 1877. III. Application de la science des nombres à la science de l'étendue. 2. éd. 1882. IV. Application des méthodes générales à la science des forces. 2. éd. 1886. V. Essai d'une application des méthodes à la science de l'homme moral. 2. éd. 1879.

Fr. Alb. Lange, Logische Studien. Ein Beitrag zur Neubegründung der formalen Logik und der Erkenntnistheorie. Iserlohn 1877. 159 S.

W. Wundt, Logik, eine Untersuchung der Prinzipien der Erkenntnis und der Methoden wissenschaftlicher Forschung. I. Bd. Erkenntnislehre. Stuttgart 1880. 585 S. II. Bd. Methodenlehre. 1883. 620 S. 2. Aufl. 1894. XII u. 590 S. Der 2. Abschnitt (S. 74—219) handelt von der Logik der Mathematik.

Ch. Sigwart, Logik. I. Bd. Die Lehre vom Urteil, vom Begriff und vom Schluß. Tübingen 1873. 420 S. II. Bd. Die Methodenlehre. ib. 1878. 612 S.

F. Dauge, Cours de méthodologie mathématique. 2. éd. Gand, Paris. x u. 525. 1896.

H. Girard, La philosophie scientifique. Paris 1880. Enthält viel mathematisch Wichtiges; auch S. 372—402 eine Klassifikation der mathematischen Disziplinen.

J. Venn, The principles of empirical or inductive logic. London 1889. 594 S.

W. Stanley Jevons, The principles of science, a treatise on logic and scientific method. London. 3. ed. 1879. 786 S.

Z. G. de Galdeano, Estudios de crítica y pedagogía matemáticas. Zaragoza. 1900. 152 S. 8°.

H. Cohen, Logik der reinen Erkenntnis. Berlin 1902.

G. Gallucci, Saggio di una introduzione alla filosofia delle matematiche. Caltanissetta. 1902. 125 S. 8°.

J. Richard, Sur la philosophie des mathématiques. Paris 1903. 248 S. 12°. (Eine Sammlung von Aufsätzen.)

B. Russell, The principles of mathematics. Vol. I. Cambridge. XXIX u. 534 S. 1903.

G. F. Lipps, Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik. Wundt, Philos. Studien 9, 151—175, 354—383, 1893; 10, 169—202, 1894; 11, 254—306, 1895: 14, 157—242, 1898.

H. Poincaré, Sur la valeur objective de la science. Rev. métaph. **10**, 263—293, 1902. Dtsch.: Der Wert der Wissenschaft von E. Weber. Leipzig 1906. 252 S.

H. Poincaré, La science et l'hypothèse. Paris 1903. 284 S. 12°. Dtsch. von F. u. L. Lindemann. 2. Aufl. Leipzig 1906. XVI u. 346. 8°.

§ 4. **Der Zahlbegriff und das mathematische Unendliche.** Die verschiedenen modernen Ansichten über den Zahlbegriff stellt dar

R. Bettazzi, Sul concetto di numero. Period. mat. 2, 97—113, 129—145. 1887.

E. G. Husserl, Über den Begriff der Zahl, psychologische Analysen. Habil. Schr. Halle 1887. 64 S.

G. Cantor, Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen. Leipzig 1883. 47 S.
R. Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen? 2. Aufl. Braunschweig 1893. XIX u. 58.
G. Cantor, Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. Math. Ann. **46**, 481—512, 1895; **49**, 207—246, 1897.
Laz. Bendavid, Versuch einer logischen Auseinandersetzung des mathematischen Unendlichen. Berlin 1789, 148 S.; 2. Aufl. 1796.
C. Th. Michaelis, Über Kants Zahlbegriff. Pr. Berlin 1884.
V. Valeriani, L'infinito nelle scienze matematiche e naturali. Verona 1882.
G. Bammert, Über das mathematische Unendliche. Tübingen 1884.
G. Frege, Die Grundlagen der Arithmetik, eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl. Breslau 1884. 119 S.
G. Vivanti, Il concetto d'infinitesimo e la sua applicazione alla matematica. Saggio storico. Mantova 1894, 134 S.; 2. Aufl. Gior. di mat. **38**, 265—314, 1900; **39**, 317—365, 1901.
C. Cranz, Über den Unendlichkeitsbegriff in der Mathematik und Naturwissenschaft. Wundt, Philos. Stud. **11**, 1—40, 1895.
Ferd. Aug. Müller, Das Problem der Kontinuität in der Mathematik und Mechanik. Marburg 1886.
L. Schläfli, Theorie der vielfachen Kontinuität. Hrsg. von J. H. Graf. Zürich u. Basel. 1901. IV u. 239 S. gr. 4°.
P. Freyer, Studien zur Metaphysik der Differentialrechnung. Pr. Nordhausen 1884.
Hermann Cohen, Das Prinzip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte. Ein Kapitel zur Grundlegung der Erkenntnistheorie. Berlin 1883. 162 S.
C. de Freycinet, Essais sur la philosophie des sciences. Analyse. Mécanique. 2. éd. Paris 1900. XIII u. 336.
A. Schönflies, Mengenlehre. Encykl. d. math. Wiss. **1**, 184—207, 1898.
A. Schönflies, Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. Stzgsb. Dtch. Math. Ver. 8_2, 1—250, 1900.
G. Vivanti, Notice historique sur la théorie des ensembles. Bibl. Math. (2) **6**, 9—25, 1892. Lista bibliografica della teoria degli aggregati. ib. (3) **1**, 160 bis 165, 1900.
W. H. Young and **Grace Chisholm Young,** The theory of sets of points. Cambridge 1906. XII u. 316 S.

§ 5. Raumanschauung.

B. Riemann, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Gött. Abh. **13**, 1—20, 1868.
H. Helmholtz, Über die Tatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen. Gött. Nachr. 1868, 193—221.
F. C. Fresenius, Die psychologischen Grundlagen der Raumwissenschaft. Wiesbaden 1868.
J. J. Baumann, Die Lehren von Raum, Zeit und Mathematik in der neueren Philosophie nach ihrem ganzen Einfluß dargestellt und beurteilt. Berlin I, 1868; II, 1869. (Ein reichhaltiges historisch-kritisches Werk.)
R. Mauritius, Bemerkungen zur Psychologie der Raumvorstellungen und zum Fechnerschen Gesetze der logarithmischen Perception. Pr. Coburg 1870.
C. Stumpf, Über den psychologischen Ursprung der Raumvorstellung. Leipzig 1873.
J. C. Becker, Abhandlungen aus dem Grenzgebiete der Mathematik und Philosophie. Zürich 1870.
P. O. Schmidt, Ursprung und Bedeutung des Raum- und Zeitbegriffs im Lichte der modernen Physik. Diss. Halle 1887. 57 S.
B. Erdmann, Die Axiome der Geometrie. Eine philosophische Untersuchung der Riemann-Helmholtz'schen Raumtheorie. Leipzig 1877.



J. Rosanes, Über die neuesten Untersuchungen in Betreff unserer Anschauung vom Raume. Habil. Vortrag. Breslau 1871. 20 S.
A. Donath, Das mathematische Raumproblem und die geometrischen Axiome. Leipzig 1881.
A. v. Berger, Raumanschauung und formale Logik. Wien 1886.
O. Hölder, Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Maß. Ber. Ges. Wiss. Leipzig. **53**, 1—64, 1900.
Ch. de Freycinet, De l'expérience en Géométrie. Paris 1903. XIX u. 300.

§ 6. Prinzipien der Mechanik und Physik.

Is. Newton, Philosophiae naturalis principia mathematica. London 1687, Cambr. 1713. Viele späteren Auflagen.
P. van Geer, Philosophiae naturalis principia mathematica. Leiden 1883. (Über Newtons Hauptwerk und über die Methoden der Naturwissenschaften.)
K. Kroman, Unsere Naturerkenntnis. Beiträge zu einer Theorie der Mathematik und Physik. Gekrönte Preisschrift. Dtsch. von R. v. Fischer-Benzon. Kopenhagen 1883. 458 S.
H. Klein, Die Prinzipien der Mechanik, historisch und kritisch dargestellt. Leipzig 1872.
E. Dühring, Kritische Geschichte der allgemeinen Prinzipien der Mechanik. Berlin 1873. 3. Aufl. 1878. 513 S.
L. Lange, Die geschichtliche Entwickelung des Bewegungsbegriffes und ihr voraussichtliches Endergebnis. Ein Beitrag zur historischen Kritik der mechanischen Prinzipien. Leipzig 1886. 161 S.
H. v. Helmholtz, Über die Erhaltung der Kraft. (1847.) Ostw. Klass. d. exakt. Wiss. Nr. 1. Leipzig 1889. 60 S.
J. Weyrauch, Das Prinzip von der Erhaltung der Energie seit Robert Mayer. Zur Orientierung. Leipzig 1885. 48 S. (Historisch-kritische Untersuchung.)
M. Planck, Das Prinzip der Erhaltung der Energie. Von der Gött. Fak. gekrönte Preisschrift. Leipzig 1887. 247 S.
G. Helm, Die Lehre von der Energie, historisch-kritisch entwickelt. Leipzig 1888. 104 S.
H. Scheffler, Die Naturgesetze und ihr Zusammenhang mit den Prinzipien der abstrakten Wissenschaften. Leipzig. 3 T. 1876—1880. I. T. Die Theorie der Anschauung oder die mathematischen Gesetze.
E. Strötzel, Untersuchungen über den Begriff der Kraft. 2 Pr. Berlin 1877 u. 1884.
O. Schmitz-Dumont, Die Einheit der Naturkräfte. Berlin 1881.
I. I. Gilles, Über die Newtonsche Anziehungskraft. Pr. Essen 1881.
C. Neumann, Über die Prinzipien der Galilei-Newtonschen Theorie. Akad. Rede. Leipzig 1870. 32 S.
E. Dreher, Über den Begriff der Kraft mit Berücksichtigung des Gesetzes von der Erhaltung der Kraft. Berlin 1885.
J. B. Stallo, Die Begriffe und Theorien der modernen Physik. Aus d. Engl. von H. Kleinpeter. Mit einem Vorwort von E. Mach. Leipzig XX u. 332. 1901. (Eine kritische Prüfung des Atombegriffes.)
P. G. Tait, Die Eigenschaften der Materie. Deutsch von G. Siebert. Wien 1888. VI u. 332.
Cl. Bäumker, Das Problem der Materie in der griechischen Philosophie. Münster 1890.
Kurt Laßwitz, Geschichte der Atomistik vom Mittelalter bis Newton. Hamburg u. Leipzig. 2 Bde. 1890. 518 u. 609 S.
O. Caspari, Leibniz' Philosophie beleuchtet vom Gesichtspunkt der physikalischen Grundbegriffe von Kraft und Stoff. Leipzig 1870.

Abschnitt II. Mathematisch-Pädagogisches.

§ 1. **Einleitung.** Bereits im IV. Abschnitt des I. Buches nannten wir einige Zeitschriften, welche sich die Pflege des mathematischen Unterrichts angelegen sein lassen. In ihnen findet man auch Besprechungen von Werken mathematisch-pädagogischen Inhalts. In den großen Enzyklopädien des Erziehungs- und Unterrichtswesens wird meist die Mathematik recht stiefmütterlich behandelt. In Baumeisters Handbuch der Erziehungs- und Unterrichtslehre für höhere Schulen haben Max Simon und J. Kießling die Didaktik und Methodik des Rechen-, Mathematik- und Physik-Unterrichts, München 1895 (128 u. 37 S.) bearbeitet. Eine 2. Aufl. soll demnächst erscheinen. Alle diese Schriften allgemein-pädagogischen Inhalts geben dem zukünftigen Lehrer nur einzelne brauchbare Winke. Die Pädagogik ist eine Kunst und kann nicht aus Büchern erlernt werden. Leider kommt mancher Kandidat des höheren Schulamts erst während des pädagogischen Probejahres zu der Erkenntnis, daß ihm die Begabung für diese Kunst fehlt. Was die Ausbildung der Mathematiker auf den Universitäten betrifft, so wäre eine Hodegetik für viele gewiß recht erwünscht. Bis jetzt haben sich die meisten Dozenten gegen die Aufstellung eines eingehenderen Studienplanes erklärt, weil er der sogenannten „akademischen Freiheit" widersprechen soll, die gleichmäßig für Studierende und für Dozenten gilt. Doch haben die mathematischen Dozenten mehrerer Universitäten (Göttingen, Leipzig, Jena, Greifswald u. a.) allgemeine „Ratschläge" für die Studierenden der Mathematik und Physik veröffentlicht, deren Durcharbeitung und Berücksichtigung den Studierenden nicht dringend genug ans Herz gelegt werden kann.

§ 2. **Über mathematischen Unterricht im allgemeinen.** Den oben genannten Werken über Methodenlehre im allgemeinen und mathematische Methode im besonderen seien noch hinzugefügt:

Chr. v. Wolf, Anfangsgründe der Rechenkunst, Geometrie und Trigonometrie, nebst einem Unterricht von der mathematischen Lehrart. Halle 1733.

F. W. Dn. Snell, Preisschrift von der besten Methode, die Mathematik in den Schulen zu lehren. Gießen 1786.

M. W. Drobisch, Philologie und Mathematik als Gegenstände des Gymnasialunterrichts betrachtet. Leipzig 1832.

S. Fr. Lacroix, Essai sur l'enseignement en général et sur celui des mathématiques en particulier. Paris 1798; 2. éd. 1816; 3. éd. 1838.

F. A. W. Diesterweg, Wegweiser zur Bildung für deutsche Lehrer. 3. Aufl. 1844.

A. Gille, Herbarts Ansichten über den mathematischen Unterricht. Diss. Halle 1888. 50 S.

A. Mayr, Die wissenschaftliche Methode angewandt auf die Mathematik. Würzburg 1845.

C. H. Schellbach, Über den Inhalt und die Bedeutung des mathematischen und physikalischen Unterrichts an unsern Gymnasien. Pr. Friedr.-Wilh.-Gymn. Berlin 1866; 2. Aufl. 1883.

E. Kretschmer, Welche Aufgabe soll die Mathematik in der Gymnasialerziehung erfüllen? Pr. Posen 1875.

G. Korneck, Über mathematischen Unterricht. Pr. Kempen. 1870.

L. Houtain, Quelques réflexions sur l'enseignement supérieur. Mém. Soc. Liége (2) 6. 1878. (Darin eine Klassifikation der Mathematik.)

Fr. Reidt, Anleitung zum mathematischen Unterricht an höheren Schulen. Berlin 1886. x u. 252 S.

Ziegel, Methode und Lehrplan des mathematischen Unterrichts an Progymnasien. Pr. Schwerin a. d. W. 1878.

J. C. Becker, Die Mathematik als Lehrgegenstand des Gymnasiums. Berlin 1883.

Th. Wittstein, Die Methode des mathematischen Unterrichts. Nebst Proben einer schulgemäßen Behandlung der Geometrie. Hannover 1879. 2. Aufl. IV u. 103. 1890.

G. Loria, Della varia fortuna di Euclide in relazione con i problemi dell' insegnamento geometrico elementare. Period. di mat. **8**, 81—113, 1893.

Friedr. Meyer, Mitteilungen aus dem mathematischen Lehrplane des Gymnasiums. Pr. Halle a. S. 1901. 35 S. 4°.

F. Buchbinder, Der mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht auf deutschen Gymnasien. Z. f. math. Unt. **1**, 10—33, 1870.

D. E. Smith, The teaching of elementary mathematics. New York 1900. xv u. 312.

Felix Müller, Welche Bedeutung hat für den Lehrer der Mathematik die Kenntnis der Geschichte, Literatur und Terminologie seiner Wissenschaft? Z. f. Gymn.-Wesen **57**, 801—815. Berlin 1903.

F. Rosenberger, Die Geschichte der exakten Wissenschaften und der Nutzen ihres Studiums. Festschrift für M. Cantor, Leipzig 1899, 359—381. Abh. z. Gesch. d. Math. **9.**

A. de Morgan, On the study and difficulties of mathematics. 2^d ed. Chicago. VI u. 288 S. 1899.

A. Brill, Über die akademische Vorbildung der Candidaten des höheren Lehramts für Mathematik und Naturwissenschaften. Beilage z. Allg. Ztg. Nr. 139 u. 140. München 1893. 21 S.

Erw. Papperitz, Die Mathematik an den deutschen technischen Hochschulen. Leipzig 1899. IV u. 68.

F. Klein und **E. Riecke,** Über angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an höheren Schulen. Nebst Erläuterung der bezüglichen Göttinger Universitätseinrichtungen. Leipzig VI u. 252. 1900.

F. Klein und **E. Riecke,** Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts an höheren Schulen. Vorträge. Leipzig 1905.

F. Klein, Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen. Nach Vorlesungen aus den Jahren 1904—05 bearbeitet von R. Schimmack. 2 Teile. Leipzig. I. 1907.

J. W. A. Young, Teaching of mathematics in the elementary and secondary schools. London 1907.

Rein historisch:

S. Günther, Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter bis 1525. Monum. Germ. Paedag. 3. Berlin 1887. VI u. 408 S.

Beier, Die Mathematik im Unterricht der höheren Schulen von der Reformation bis zur Mitte des 18. Jahrhunderts. Pr. Crimmitschau. 1879.

Schließlich weisen wir auf eine für Lehrer der Mathematik wichtige Sammlung von Lesestoffen aus Euklid, Ptolemäus, Nikomachos, Diophant, Geminus, Strabo u. a. hin:

M. C. P. Schmidt, Realistische Chrestomathie aus der Literatur des klassischen Altertums. I. VIII u. 128. II. VI u. 170. Leipzig 1900.

§ 3. Unterricht in speziellen mathematischen Disziplinen.

B. Becker, Über die Methode des geometrischen Unterrichts. Frankfurt a. M. 1845.

C. Harms, Die erste Stufe des mathematischen Unterrichts. 2. T. Oldenburg 1852.

Jänicke, Geschichte des Rechenunterrichts, in **Kehr,** Geschichte der Methodik I, 1877.
Knilling, Zur Reform des Rechenunterrichts. 2 Pr. 1884—86.
Fr. Unger, Die Methodik der praktischen Arithmetik in historischer Entwickelung vom Ausgange des Mittelalters bis auf die Gegenwart. Nach den Originalquellen bearbeitet. Leipzig 1888. 240 S.
J. van Hoorn, Historisch-critisch oversicht der in de vorige eeuw verschenen methode vor het stelonderwijs. Groningen 1903. 252 S
K. Kraus, Methodik des Unterrichts in der Geometrie und im geometrischen Zeichnen. Wien 1895. 212 S.
Paul Serret, Des méthodes en géométrie. Paris 1855. (Für höhere Geometrie.)
G. Veronese, Dei principali metodi in geometria. Verona e Padova 1882 (ebenso).
R. Sturm, Die neuere Geometrie auf der Schule. Z. f. math. Unt. **1,** 474—490. 1870.
J. Kober, Über die Definitionen der geometrischen Grundbegriffe. Z. f. math. Unt. **1,** 228—236. 1870. (Für den Schulunterricht).
H. Schotten, Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts. Eine vergleichende Planimetrie. Leipzig. I. Grundbegriffe. (Zusammenstellung von Definitionen aus zahlreichen Lehrbüchern.) IV u. 370. 1890. II. Richtung und Abstand. Lagen- und Maßbezeichnungen. Parallelismus. Winkel. Dreieck. IV u. 410. 1893. III. (in Vorbereitung).
A. Pieper, Einige Bemerkungen zum Unterricht in der Elementargeometrie. Pr. Bochum 1868.
H. Börner, Geometrische Propädeutik. Pr. Ruhrort 1876.
E. Enriques, Questioni riguardanti la geometria elementare. Raccolte. Bologna VII u. 532. 1900. (Sammlung von 14 Aufsätzen erfahrener und mit der Literatur vertrauter italienischer Lehrer der Mathematik, welche die neuesten Fortschritte der Geometrie im Unterricht der elementaren Geometrie nutzbar machen. Viel Historisches.) Deutsche Ausgabe von Fleischer, Leipzig, II. 1907.
F. Klein, Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie. Ausgearbeitet von F. Tägert. Leipzig 1895. v u. 66.
Krähe, Über den indirekten Beweis. Pr. Berlin 1874.
K. A. F. Knabe, Die Formen des indirekten Beweises mit besonderer Rücksicht auf ihre Anwendung in der Mathematik. Diss. Leipzig 1885.
K. A. F. Knabe, Über den direkten Beweis. Pr. Cassel 1890. 26 S.
H. Vogt, Der Grenzbegriff in der Elementar-Mathematik. Pr. Breslau 1885.

Schließlich erinnern wir hier an die schon oben (S. 45) erwähnte Encyklopädie der Elementar-Mathematik von H. Weber und J. Wellstein.

Abschnitt III. Algebra.

Kapitel 1. Formale Algebra.

Leibniz trug sich mit dem Gedanken eines calculus philosophicus oder calculus ratiocinator, einer Disziplin, die aus gegebenen Prämissen in rechnender Weise Schlußfolgerungen in allen rein deduktiven Richtungen auch mit erwiesener Vollständigkeit ziehen sollte. In gewissem Sinne verwirklichte George Boole diesen Gedanken.

George Boole, The mathematical analysis of logic, being an essay towards a calculus of deductiv reasoning. Cambridge 1847. 82 S.
George Boole, The calculus of logic. Cambr. a. Dubl. math. J. **3,** 183—198, 1848.



George Boole, An investigation of the laws of thought, on wich are founded the mathematical theories of logic and probabilities. London, Cambridge. 1854. 424 S.

In gedrängter Form faßte seine Resultate zusammen:

E. Schröder, Der Operationskreis des Logikcalculs. Leipzig 1877. 37 S. (Er gibt eine elementare Methode, die Probleme der deduktiven Logik mittels eleganter Rechnung zu lösen.)

Verwandten Inhalts sind folgende Schriften:

G. Frege, Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. Halle 1879. 88 S. (Ein Versuch, Leibniz' Ideal einer Pasigraphie zu verwirklichen.)

Hugh Mac Coll, The calculus of equivalent statements and integration limits. Proc. Lond. math. Soc. **9**, 9—20, 177—186, 1878; **10**, 16—28, 1879; **11**, 113—121, 1880. (Eine symbolische Sprache, welche bezweckt, die logischen Operationen in mathematischer Bezeichnung und durch mathematische Rechnung wiederzugeben.)

Ch. S. Peirce, On the algebra of logic. A contribution to the philosophy of notation. Amer. J. **3**, 15—57, 1880; **7**, 180—202, 1885.

E. Schröder, Die formalen Elemente der absoluten Algebra. Pr. Baden-Baden 1874.

E. Schröder, Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik). Leipzig. **3** Bde. I. XII u. 717. 1890. II, 1 (Der Aussagecalcül). XV u. 400. 1891. II, 2. Hrsg. von E. Müller 1905. XXXII u. 206. III. (Algebra und Logik der Relative). VIII u. 649. 1895.

L. Couturat, L'algèbre de la logique. Paris 1905. 100 S.

Die Notwendigkeit einer formalen Mathematik, einer Verknüpfung der Größen im allgemeinen, wurde zuerst mit Entschiedenheit betont von

G. Peacock, Report of certain branches of analysis. Rep. Brit. Ass. **3**, London 1834.

Er schuf die Cambridger Schule für „symbolische Algebra". Vgl.

A. de Morgan, The foundation of algebra. Phil. Trans. Cambridge 7 u. 8.

Der Gedanke, die allgemeine Arithmetik und Algebra unter dem höheren Gesichtspunkte einer formalen Mathematik anzusehen, die durch das Prinzip der Permanenz ihrer formalen Gesetze bedingt ist, wurde durchgeführt von

H. Hankel, Theorie der complexen Zahlensysteme. Leipzig 1869. 167 S.

Eine kurze, aber strenge Begründung der Elemente der Algebra enthält:

E. Schröder, Abriß der Arithmetik und Algebra für Schüler an Gymnasien und Realschulen. I. Heft. Die sieben algebraischen Operationen. Leipzig 1874. 48 S.

Werke, welche die Entwicklung des Zahlbegriffs mit Hilfe der algebraischen Operationen enthalten, suche man im Abschnitt „Arithmetik"

Kapitel 2. Lehrbücher der Algebra.

Verstehen wir unter Algebra die Herstellung und Lösung von Gleichungen, so können wir die Anfänge dieser Wissenschaft bis zum Rechenbuche des Ahmes, um 1700 v. Chr., zurück verfolgen. Doch ist die eigentliche Algebra, die Ansetzung und Lösung der Gleichungen mit Hilfe von Zahlensymbolen eine Schöpfung der Araber, und das älteste Lehrbuch,

mit dem die Geschichte der Algebra bei den Arabern beginnt, ist das des Mohammed ben Musa, um 820 geschrieben, im Original und übersetzt herausgegeben von Fr. Rosen, The Algebra of Mohammed ben Musa, London 1831. Über den Inhalt dieses Werkes und über die weitere Ausbildung der Algebra findet man Näheres in M. Cantors Vorlesungen über Geschichte der Mathematik (s. oben S. 3).

Speziell für die Geschichte der Algebra seien folgende Werke genannt:

G. H. F. Nesselmann, Versuch einer kritischen Geschichte der Algebra. I. (einz.) T. Die Algebra der Griechen. Berlin 1842. 498 S.

John Wallis, Treatise of algebra, both historical and practical, London 1685, fol. Später in seinen Werken lateinisch als Tractatus de algebra historicus et practicus, Oxford 1693.

P. Cossali, Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell' algebra. Storia critica. Roma 1797—99. 2 v. 4°. 396 e 492 p.

A. Favaro, Notizie storico-critiche sulla costruzione delle equazioni. Modena 1878. IV e 206 S.

L. Matthießen, Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen. Leipzig 1878. 1001 S. 2. Ausg. 1896. (Mit einem chronologischen Verzeichnis der Literatur.)

A. Aubry, Essai historique sur la théorie des équations. J. math. spéc. (4) **3** (Von Thales bis Descartes) 1894; (4) **4** (Bis Fourier, Abel, Galois) 1895; (4) **5** (Moivre, Zerlegung des Trinoms, Lösungen durch rekurrente Reihen) 1896; (5) **1** (Fundamentaltheorem, Imaginäres) 1897. (Eine Reihe kleinerer Artikel in jedem Bande.)

Die Anfänge des algebraischen Kalküls neben der praktischen Arithmetik enthält das bedeutendste mathematische Werk des 15. Jahrhunderts:

Luca Paciuolo, Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalità. Venet. 1494 fol., 2. ed. 1523. (Das erste größere mathematische Werk, das unter die Presse kam.)

Das erste, auf den von Grammateus gegebenen Grundlagen aufgebaute Lehrbuch der Algebra in Deutschland war:

Christoff Rudolff, Behend vnnd hübsch Rechnung durch die kunstreichen Regeln Algebre, so gemeincklich die Coß genennt werden. Straßburg 1525. Neu herausgegeben von

Michael Stifel, Die Coß Christoph Rudolphs, mit schönen Exempeln der Coß gebessert. Königsberg 1553.

Einen wesentlichen Fortschritt in der Theorie der algebraischen Gleichungen brachte Vieta, dessen Werke wir in Kap. 3 nennen werden, ferner Descartes (Géométrie) und

Alb. Girard, Invention nouvelle en l'Algèbre, tant pour la solution des équations, que pour recognoistre le nombre des solutions qu'elles reçoivent, avec plusieurs choses qui sont nécessaires à la perfection de ceste divine science. Amsterdam 1629. Réimpr. p. Bierens de Haan. Leiden 1884.

Aus dem 18. Jahrhundert seien folgende Lehrbücher der Algebra genannt:

Nick. Saunderson, The elements of algebra in ten books. Cambridge 1740. 2 v. 748 S. 4°. Ein Lehrbuch mit vielen Beispielen und Übungen. Frz. von Joncourt, Amsterdam 1756.

A. C. Clairaut, Éléments d'algèbre. Paris 1746. 314 S. Es folgten zahlreiche neue Auflagen 1749, 1753, 1760; 5. éd. avec des notes et des additions par Lagrange et De Laplace, par Lacroix, 1797, 2 v.; auch 6. éd. par P. Garnier 1801. Dtsch. von Mylius 1752; 2. Aufl. von Tempelhof 1778.

C. Maclaurin, A treatise of algebra, in three parts, to which is added an Appendix concerning the general properties of geometrical lines. Posth. 366 u. 65 S. London 1748; 6. ed. 1796.

L. Euler, Vollständige Anleitung zur niederen und höheren Algebra. St. Petersburg 1770, u. später. Nach der franz. Ausgabe von de Lagrange hrsg. von Joh. Phil. Gruson. Berlin. 2. T. I, 1796, 312 S. II, 1797, 403 S. Der I. Teil: „Von den verschiedenen Rechnungsarten, Verhältnissen und Proportionen". II. Teil: „Von der Auflösung algebraischer Gleichungen und der unbestimmten Analytik". Lagranges Zusätze betreffen die unbestimmte Analysis. Die Eulersche Algebra wurde ins Lateinische, Französische, Englische, Holländische und Russische übersetzt. Eine neue Auflage erschien noch Leipzig, Reklam 1883.

In den oben (S. 44) angeführten Gesamttraktaten der Mathematik aus dem 18. Jahrhundert sind z. T. recht gute Lehrbücher der Algebra. Außerordentlich wächst die Zahl der letzteren im 19. Jahrhundert. Zur Orientierung für den Studierenden wird es genügen, die folgenden neueren Lehrbücher der Algebra zu nennen:

S. F. Lacroix, Éléments d'algèbre. Paris 1826. 25. éd. rev. par Prouhet 1888. Compléments des Éléments d'algèbre. 7. ed. ib. 1888.

P. L. M. Bourdon, Éléments d'algèbre. Avec Notes de Prouhet. 19. éd. Paris 1897. XII u. 655.

L. Lefébure de Fourcy, Leçons d'algèbre. 9. éd. Paris 1880. 10. éd. 1893.

J. Bertrand, Traité d'algèbre élémentaire. Paris. 17. éd. par H. Garcet 1899. Ital. v. Betti. 23. ed. Firenze 1895.

E. Combette, Cours abrégé d'algèbre élémentaire. 8. éd. Paris 1905. VIII u. 336.

H. Laurent, Traité d'algèbre. I. Algèbre élémentaire. II. Analyse algébrique. III. Théorie des équations. IV. Compléments: Théorie des polynômes à plusieurs variables. Paris. 5. éd. rev. p. Marchand. 1894.

G. Salmon, Treatise on higher algebra. 3. ed. London 1876. Leçons d'algèbre supérieure. Trad. par M. Bazin, augm. de notes par M. Hermite, Paris 1868.

J. A. Serret, Cours d'algèbre supérieure. Paris 5. éd. 2 v. 1895. Dtsch. „Handbuch der höheren Algebra" von G. Wertheim. Leipzig 1868. 2. Aufl. 2 Bde. 1878/79, 528 u. 574 S.

Jul. Petersen, Theorie der algebraischen Gleichungen. Kopenhagen 1878. 335 S. Trad. p. H. Laurent. Paris 1897.

J. Carnoy, Cours d'algèbre supérieure. Louvain et Paris. XII u. 537, 1900. (Principes de la théorie des déterminants. Théorie des équations. Introduction à la théorie des formes algébriques.)

Ch. de Comberousse, Algèbre supérieure. 2 v. Paris. I. Compléments d'algèbre élémentaire: Déterminants, fonctions continues etc. Combinaisons. Séries. Étude des fonctions. Dérivées et différentielles. Premiers principes du calcul intégral. 3. éd. XXI u. 767, 1904. II. Étude des imaginaires. Théorie générale des équations. 2. éd. XXV u. 832, 1890.

H. Weber, Lehrbuch der Algebra. 2 Bde. Braunschweig 1895—96. 2. Aufl. I. XVI u. 704, 1898. II. XVI u. 885, 1899. Frz. von J. Gries, Traité d'algèbre supérieure. Principes, racines des équations, grandeurs algébriques, théorie de Galois. Paris 1898, XI u. 764.

E. Netto, Vorlesungen über Algebra. Leipzig I, 1896. 388 S. II, 1899. 519 S.

E. Netto, Elementare Algebra. Akademische Vorlesungen für Studierende der ersten Semester. Leipzig 1904. VIII u. 200.

L. Kronecker, Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Gleichungen. Hrsg. von K. Hensel. 2 T. Leipzig. 1906.

Ch. Briot, Leçons d'Algèbre, conformes aux Programmes officiels de l'enseignement des lycées. 2 v. Paris. I, 13. éd. 1891. II, 16. éd. 1893.

Julius König, Einleitung in die Theorie der algebraischen Größen. Leipzig 1903. x u. 564.

Émile Borel, Algèbre. Paris 1904. 2. éd. 1904. I. cycle 256 S. II. cycle 379 S. Deutsch von Stäckel n. d. Pr.

Kapitel 3. Theorie der algebraischen Gleichungen.

§ 1. Kubische Gleichungen:

Niccola Tartaglia, Quesiti ett inventioni diverse. Veneçia 1546.

Geronimo Cardano, Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus. Mediol. 1545.

R. Bombelli, L'Algebra parte maggiore dell'aritmetica divisa in tre libri. Bologna 1572.

§ 2. **Allgemeine Theorie.** Die allgemeine Theorie der algebraischen Gleichungen beginnt mit:

François Viète (Vieta), De aequationum recognitione et emendatione libri duo. Publ. Al. Anderson. Paris 1615. und

Fr. Vieta, De numerosa potestatum purarum atque adfectarum ad exegesin resolutione tractatus. Paris 1600.

Thomas Harriot, Artis analyticae praxis ad aequationes algebraicas nova, expedita et generali methodo resolvendas. London 1631.

Joh. Hudde, De aequationum reductione; de maximis et minimis. 2 Briefe an F. van Schooten, von diesem aus dem Holländ. übersetzt und 1659 publ.

J. Wallis, Treatise of algebra, both historical and practical. London 1685, lat. 1693, enthält Newtons Methode zur Lösung numerischer Gleichungen. Ebenso Newton, Methodus fluxionum et serierum infinitarum, ed. J. Colson, London 1736 (schon 1671 geschrieben).

Is. Newton, Arithmetica universalis seu de compositione et resolutione arithmetica liber, ed. Whiston, Cambr. 1707; 2. ed. London 1722; engl. Übersetzung, London 1728.

Michel Rolle, Traité d'algèbre, ou principes généraux pour résoudre les questions de mathématiques. Paris 1690.

Edm. Halley, Methodus nova accurata et facilis inveniendi radices aequationum quarumcunque generaliter, sine praevia reductione. Phil. Trans. London 1694.

J. P. de Gua, Recherche des nombres des racines réelles ou imaginaires, qui peuvent se trouver dans les équations de tous les degrés. Hist. Ac. Paris a. 1741, 435—494

Dan. Bernoulli, De seriebus recurrentibus. Comm. Ac. Petr. 3. ad a. 1728 [1732].

L. Lagrange, Sur la résolution des équations numériques. Mém. Ac. Berlin **23,** 311—352, a. 1767 [1769] u. **24,** 111—180, a. 1768 [1770]. (S. auch folg. Seite.)

E. W. v. Tschirnhausen, Nova methodus auferendi omnes terminos intermedios ex data aequatione. Act. Erud. 1683, 204.

E. S. Bring, Meletemata quaedam mathematica circa transformationem aequationum algebraicarum. Diss. Lundae 1786. Reprod. Arch. Math. Phys. **41,** 105—112, 1864.

Edw. Waring, Miscellanea analytica de aequationibus algebraicis et curvarum proprietatibus. Cambr. 1762. 162 S. Meditationes algebraicae. Cambridge 1770, 219 S.; 1773; 3. ed. 1782, 389 S.; 1785, 42 u. 722 S.

É. Bezout, Sur plusieurs classes d'équations de tous les degrés qui admettent une solution algébrique. Mém. Ac. Paris a 1762 [1764]. Sur la résolution générale des équations de tous les degrés. ib. a. 1765 [1768].

L. Lagrange, Réflexions sur la résolution algébrique des équations. Nouv. Mém. Ac. Berlin 1770, 134—215, [1772], et 1771, 138—254 [1773]. (Deutsch von Michelsen in Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen, **3,** Berlin

1791.) (Hier sind alle früheren Methoden, Gleichungen höherer Grade zu lösen, zusammengestellt. Als allgemeines Prinzip benutzt Lagrange die Aufstellung der nach ihm benannten Resolvente.)

Vandermonde, Mémoire sur la résolution des équations. Hist. Mém. Ac. Paris a. 1771, 365 [1773]. (Bestimmung des Grades der Resolventengleichung. Mit dieser Abhandlung datiert ein neuer Aufschwung der Algebra.)

Ruffini, Riflessioni intorno alla soluzione delle equazioni algebriche generali. Mem. Soc. It. **10**, 1803. (Zuerst der Satz ausgesprochen, daß die algebraische Auflösung der Gleichungen von höherem als dem 4. Grade unmöglich ist.)

H. N. Abel, Mémoire sur les équations algébriques, où l'on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré. Christiania 1824; Beweis der Unmöglichkeit. Journ. f. Math. **1**, 65—84. 1826.

H. N. Abel, Sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement. Journ. f. Math. **4**, 131—156, 1829. Hrsg. von A. Löwy: Abhandlung über eine besondere Klasse algebraisch auflösbarer Gleichungen. Ostw. Klass. III. 1900. 50 S.

§ 3. **Fundamentaltheorem.** Das Fundamentaltheorem der algebraischen Gleichungen. (Jede algebraische Gleichung n^{ten} Grades hat n Wurzeln):

C. F. Gauß, Demonstratio nova theorematis, omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse. Diss. Helmstedt 1797. Neue Beweise Comm. rec. Gott. **3**, 1815 u. 1816; Abh. Ges. Gött. **4**, 1848—1850: „Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen." „Die Gaußschen vier Beweise für die Zerlegung ganzer algebraischer Funktionen in reelle Faktoren des ersten oder zweiten Grades. (1799—1849)." Hrsg. von E. Netto. Ostw. Klass. **14**, 81 S. 1890.

Die Geschichte und Bibliographie des Fundamentaltheorems gibt:

G. Loria, Esame di alcune ricerche concernenti l'esistenza di radici nelle equazioni algebriche. Bibl. math. (2) **5**, 99—112, 1891.

§ 4. **Sturmscher Satz.** Der berühmte Sturmsche Satz über die Anzahl der zwischen zwei gegebenen Zahlen liegenden reellen Wurzeln einer Gleichung wurde zuerst veröffentlicht 1829:

Ch. Sturm, Analyse d'un Mémoire sur la résolution des équations numériques. Bull. d. sc. math. (Férussac) **11**, 419, 1829; dann das Mémoire in Mém. prés. Ac. Paris (2) **6**, 271—318, 1835.

Eine zusammenhängende Theorie gab:

G. Darboux, Mémoire sur le théorème de Sturm. Bull. sc. math. **8**, 56—63, 92—112, 1875.

L. Kronecker, Über die verschiedenen Sturmschen Reihen und ihre gegenseitigen Beziehungen. Monatsber. Ak. Berl. 1873, 116—154.

L. Kronecker, Über Sturmsche Funktionen. Monatsber. Ak. Berlin 1878, 95—121.

§ 5. **Numerische Gleichungen. Fortsetzung.** Weitere Schriften über die Lösung der numerischen Gleichungen:

L. Lagrange, Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés. Avec des Notes sur plusieurs points de la théorie des équations algébriques. 3. éd. p. Poinsot. Paris 1826.

J. B. J. Fourier, Analyse des équations déterminées. Posth. Paris 1831.

M. W. Drobisch, Lehre von den höheren numerischen Gleichungen. Leipzig 1834.

J. Brizard, Méthode pour résoudre les équations numériques de tous les degrés. Paris 1834.

K. H. Gräffe, Die Auflösung der höheren numerischen Gleichungen. Zürich 1837. Zusätze 1839. Bearbeitet von Encke, Berl. astr. Jhrb. 1841.

C. Jordan, Traité des substitutions et des équations algébriques. Paris 1870.

§ 6. **Symmetrische Funktionen.** Die Theorie der symmetrischen Funktionen der Wurzeln algebraischer Gleichungen findet sich in den oben (S. 59) genannten Schriften Edw. Warings. Ferner in:

C. W. Borchardt, Bestimmung der symmetrischen Verbindungen mittels ihrer erzeugenden Funktion. Journ. f. Math. **53**, 193, 1857.

G. Salmon, Lessons introductory to modern higher algebra. London 2. ed. 1866. Dtsch. von Fiedler. Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformationen. 2. Aufl. Leipzig 1877.

G. v. Escherich, Beiträge zur Bildung der symmetrischen Funktionen der Wurzelsysteme und der Resultante simultaner Gleichungen. Denkschr. Ak. Wien **36**, 1876. 24 S.

Tafeln der symmetrischen Funktionen finden sich noch in:

Meier Hirsch, Sammlung von Aufgaben aus der Theorie der algebraischen Gleichungen. Berlin, 1809.

Faà di Bruno, Théorie des formes binaires. Turin 1876. Dtsch.: Einleitung in die Theorie der binären Formen. Bearb. von Th. Walter. Leipzig 1881. VIII u. 379 S.

W. Řehořovský, Tafeln der symmetrischen Funktionen der Wurzeln und der Koeffizienten-Kombinationen vom Gewichte 11 und 12. Denkschr. Ak. Wien. **46**, 182. 10 S. u. 2. Tafeln.

§ 7. **Gleichungen 4., 5. u. 6. Grades:**

A. Olivier, Über die konstruktive Lösung geometrischer Aufgaben des 3. und 4. Grades. Pr. Schaffhausen 1868.

E. Hutt, Die Auflösung der Gleichung 4. Grades durch elliptische Funktionen. Diss. Königsberg 1870.

A. Puchta, Das Oktaëder und die Gleichung 4. Grades. Denkschr. Ak. Wien. **41**, 1879. 42 S.

J. Pierpont, Zur Geschichte der Gleichung des 5. Grades (bis 1858). Monatschr. f. Math. **6**, 15—68, 1895. (Tschirnhaus, Euler, Bezout, Lagrange, Vandermonde, Malfatti, Ruffini, Abel, Jacobi, Galois, Hermite, Brioschi, Kronecker.)

F. Klein, Vorlesungen über das Ikosaëder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade. Leipzig 1884. 260 S.

Ch. Hermite, Sur la théorie des équations modulaires et la résolution de l'équation du cinquième degré. Paris 1859. Sur l'équation du cinquième degré. Paris 1866.

F. Klein, Untersuchungen über das Ikosaëder. Math. Ann. **12**, 503—561. 1876.

P. Gordan, Die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade. Math. Ann. **13**, 375—405. 1878.

F. Brioschi, Über die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade. Math. Ann. **13**, 109—160. 1878.

F. Klein, Über die Transformation der elliptischen Funktionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades. Math. Ann. **14**, 111—172. 1878.

L. Kiepert, Auflösung der Gleichungen fünften Grades. J. f. Math. **87**, 114—133. 1878.

D. Besso, Sull equazione del quinto grado. Mem. Acc. Linc. (3) **19**. Roma 1884.

A. Weill, Die geometrische Interpretation der Gleichung fünften Grades auf invariantentheoretischer Grundlage. Diss. Straßburg 1900. 60 S.

P. Joubert, Sur l'équation du sixième degré. Paris 1867.

§ 8. **Reziproke Gleichungen.** Man findet die Theorie derselben in allen elementaren Lehrbüchern der Algebra. Von besonderen Schriften seien angeführt:

A. Vogt, Théorie des équations réciproques. Diss. Freiburg 1862.
B. Adam, Über reziproke Gleichungen. Pr. Clausthal 1883.

§ 9. **Binomische Gleichungen.** Binomische Gleichungen werden in der Algebra, Zahlentheorie und Trigonometrie behandelt.

F. Tano, Intorno alle equazione binomie. Palermo 1881.
C. Biehler, Sur la division des arcs en trigonométrie. Sur les équations binômes. Paris 1891.

§ 10. **Trinomische Gleichungen:**

A. Gebhardt, Auflösung dreigliedriger algebraischer Gleichungen durch Reihen. Pr. Leipzig 1873.
H. v. Mangoldt, Über Darstellung der Wurzeln einer dreigliedrigen algebraischen Gleichung durch unendliche Reihen. Berlin 1878.
J. Dieckmann, Zur Auflösung der dreigliedrigen irrationalen Gleichung mit beliebigen Radikanden. Pr. Viersen 1889. 25 S.
A. Gundelfinger, Tafeln zur Berechnung der reellen Wurzeln sämtlicher trinomischer Gleichungen. Leipzig 1897. IV u. 15 S.

§ 11. **Aufgaben über algebraische Gleichungen.** In den meisten größeren und kleineren Lehrbüchern der Algebra finden sich Übungen und Aufgaben. Von besonderen Aufgabensammlungen über algebraische Gleichungen seien folgende genannt.

E. Bardey, Algebraische Gleichungen nebst den Resultaten und den Methoden zu ihrer Auflösung. 5. Aufl. von Fr. Pietzker. Leipzig 1902. XVI u. 420.
E. Bardey, Anleitung zur Auflösung eingekleideter algebraischer Gleichungen. Neue Ausg. von F. Pietzker. Leipzig 1903. VIII u. 159.
E. Bardey, Quadratische Gleichungen mit den Lösungen für die oberen Klassen der Gymnasien und Realschulen. 2. Aufl. Leipzig 1887. IV u. 94.
E. Bardey, Zur Formation quadratischer Gleichungen. 2. Aufl. 1894. VIII u. 390. Leipzig.
Meier Hirsch, Sammlung von Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra. Berlin 1804. 5. Aufl. 1853. 18. Ausg. von H. Bertram 1881.
Eduard Heis, Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra. Köln 1837. 20. Aufl. 1868. 106.—108. Ausg. 1904.
Ludwig Matthießen, Schlüssel zur Sammlung von Beispielen und Aufgaben von E. Heis. 3. Aufl. 3 Teile. Köln 1886.
S. Tzaut et **Morf,** Exercices et Problèmes d'Algèbre. I[re] Série. Recueil gradué renfermant plus de 3880 exercices sur l'Algèbre élémentaire jusqu' aux équations du premier degré inclusivement. 12°. Paris 1877. 2. éd. 1892. Réponses aux Exercices et Problèmes. ib.
S. Tzaut, Exercices et Problèmes d'Algèbre. II[re] Série. Recueil gradué renfermant plus de 6200 exercices sur l'Algèbre élémentaire, depuis les équations de premier degré exclusivement jusqu'au binôme de Newton et aux déterminants inclusivement. 12°. Paris 1881. Réponses ib. 1881.
E. Lampe, Geometrische Aufgaben zu den cubischen Gleichungen nebst einem Anhange mit Aufgaben über biquadratische Gleichungen. Pr. Berlin 1876.
E. Lampe, Geometrische und mechanische Aufgaben zur numerischen Auflösung von Gleichungen höherer Grade. Pr. Berlin 1885. 24 S.

Weitere Aufgaben über algebraische Gleichungen sind mit solchen über Arithmetik vereinigt und im nächsten Abschnitt zu finden. Auch verweisen wir auf die weiter unten anzuführenden Aufgaben-Sammlungen aus der gesamten Elementar-Mathematik.

Wir bemerken schließlich, daß wir die transzendenten Gleichungen in die Funktionentheorie eingereiht haben, und die Theorie der Elimination in das gleiche Kapitel wie die Substitution gesetzt haben.

Kapitel 4. Elimination, Substitution und Gruppentheorie.

§ 1. **Elimination.** Die Auflösung eines Systems simultaner Gleichungen wird in den Lehrbüchern der Algebra, die oben (S. 57—59) genannt sind, vorgetragen.

Die Theorie der Elimination fand ihre Ausbildung in folgenden Arbeiten:

Gabriel Cramer, Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques. Genève 1750.

L. Euler, Nouvelle méthode d'éliminer les quantités inconnues des équations. Hist. Mém. Ac. Berlin **20**, a. 1764, 91—104 [1766].

L. Lagrange, Sur l'élimination des inconnues dans les équations. Hist. Mém. Ac. Berlin **25**, a. 1769, 303—318 [1771].

Ét. Bezout, Recherches sur le degré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues et sur les moyens qu'il convient d'employer pour trouver les équations résultantes. Mém. Ac. Par. a. 1764, 288—338 [1767].

Ét. Bezout, Théorie générale des équations algébriques. Paris 1779, 471 p. 4°.

Ch. A. Vandermonde, Mémoire sur l'élimination des inconnues dans les équations. Mém. Ac. Par. a. 1771—72, 365 [1773—74].

A. L. Cauchy, Mémoire sur l'élimination d'une variable entre deux équations algébriques, in Exercices mathématiques. Paris 1827. Wieder abgedruckt Nouv. Ann. (2) **15**, 385—396, 433—451. 1876.

K. G. J. Jacobi, De eliminatione variabilis e duabus equationibus algebraicis. Journ. f. Math. **15**, 101—123. 1836.

J. J. Sylvester, Dialytic method. of eliminating. Phil. Mag. **22**, 1842.

R. Lemonnier, Mémoire sur l'élimination. Ann. Ec. Norm. (2) **8**, 77—100, 151—214. 1878. (Historische Methoden von Sylvester, Bezout, Cauchy; Theorie der gemeinsamen Wurzeln zweier Gleichungen; Sturmsche Funktionen.)

M. Falk, Sur la méthode d'élimination de Bezout et Cauchy. Mém. Soc. Upsala 1879. 36 S.

L. Kronecker, Zur Theorie der Elimination einer Variabeln aus zwei algebraischen Gleichungen. Monatsber. Ak. Berlin Juni 1881. 66 S.

§ 2. **Substitution.** Die Theorie der Substitutionen hat sich ebenfalls aus der Theorie der algebraischen Gleichungen entwickelt; in den Lehrbüchern der Algebra finden wir die Elemente der Substitutionentheorie vorgetragen. In Lagranges Réflexions sur la résolution algébrique des équations 1770/71 (s. oben S. 59) sind die Anfänge der Theorie zu suchen. Die weiteren Entwicklungen der Theorie durch Cauchy, Gauß, Abel und Galois nebst der einschlägigen Literatur werden in folgenden Lehrbüchern dargestellt:

J. A. Serret, Cours d'algèbre supérieure 1866 (s. oben S. 58) II, 4: Die Substitutionen. In der dtsch. Ausg. S. 175—342.

C. Jordan, Traité des substitutions et des équations algébriques. Paris 1870.

E. Netto, Substitutionentheorie und ihre Anwendung auf die Algebra. Leipzig 1882. VIII u. 290 S. (Eine leichtere Einführung mit Benutzung der Kroneckerschen Anschauungen über Rationalitätsbereiche u. ä.)

E. Netto, Einleitung in die Theorie der Substitutionen und ihrer Anwendungen. Arch. Math. Phys. **62**, 225—259. 1878.

§ 3. **Gruppentheorie.** Die Anfänge der Gruppentheorie sind zurückzuführen auf die Schrift von

Paolo Ruffini, Teoria generale delle equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebraica delle equazioni generali di grado superiore al quarto. 2 v. Bologna 1798. 522 S.

Geschichtliches findet man in:

H. Burkhardt, Die Anfänge der Gruppentheorie und Paolo Ruffini. Z. Math. Phys. **37**, Suppl. 119—159, 1892.

G. A. Miller, Report on recent progress in the theory of groups of finite ordre. Bull. Amer. Math. Soc. (2) **5**, 227—249, 1899. Second report. ib. (2) **9**, 106—123, 1902.

Ev. Galois wies auf die Bedeutung des Begriffs der diskontinuierlichen Gruppe für die Algebra hin. Später wurde der Begriff der diskontinuierlichen Gruppe für die Zahlentheorie von Dedekind u. a., für die allgemeine Funktionentheorie von F. Klein, Poincaré, Picard u. a. verwertet. Ihre Arbeiten siehe in den betr. Abschnitten.

Die Theorie der Auflösung der algebraischen Gleichungen beruht hauptsächlich auf der Betrachtung gewisser Gruppen von Substitutionen oder Vertauschungen der Wurzeln. Ein ähnliches Problem ist, wie S. Lie 1873 bemerkt hat, das der Integration von Differentialgleichungen. Für die erste Einführung in die Liesche Gruppentheorie sei genannt:

S. Lie, Vorlesungen über kontinuierliche Gruppen zur Einführung in die Theorie derselben. Bearbeitet und hrsg. von G. Scheffers. Leipzig 1891. XVI u. 568.

Eine vollständige systematische Darstellung der von Lie veröffentlichten Untersuchungen gibt das Werk von

S. Lie, Theorie der Transformationsgruppen. Unter Mitwirkung von F. Engel. I. X u. 632. 1888. II. VIII u. 555. 1890. III. XXVII u. 831. 1893.

Anwendungen von Lies Gruppentheorie auf Differentialgleichungen enthalten Arbeiten, auf welche wir in der Theorie der Differentialgleichungen hinweisen.

Kapitel 5. Determinanten.

§ 1. **Einleitung. Historisches.** Die erste Idee, die Theorie der Gleichungen durch Bildung kombinatorischer Ausdrücke, die heute Determinanten genannt werden, zu fördern, gebührt Leibniz (Brief an de l'Hospital v. 28. April 1693). Die zweite Erfindung der Determinanten machte

G. Cramer, Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques. Appendice. Genève 1750.



Anfänge der Theorie finden sich bei

L. Lagrange, Nouvelle solution du problème du mouvement de rotation d'un corps etc. Nouv. Mém. Ac. Berlin a. 1773, 86—120 [1775], und bei

A. Th. Vandermonde, Mémoire sur l'élimination des inconnues dans les équations. Mém. Ac. Paris a. 1772, 516 [1774].

Aber der formale Begründer der Determinantentheorie wurde

A. L. Cauchy, Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment. J. Éc. Polyt. ch. **17**, 1815.

Die geschichtliche Entwicklung der Theorie der Determinanten und eine Bibliographie enthalten die Schriften von

Th. Muir, The theory of determinants in the historical order of its development. Part I. Determinants in general. Leibniz (1693) to Cayley (1841). London 1890. XI u. 278. 2[d]. ed. London 1906. XI u. 491.

Th. Muir, The theory of continuants in the historical order of its development up to 1870. Proc. Soc. Edinb. **25**, 129—159, 1904; 648—679, 1905.

Th. Muir, A third list of writings of determinants (1885—1900). Quart. J. **36**, 171—192, 1904; 193—267, 1905. (S. auch § 3 S. 67.)

§ 2. **Lehrbücher und Abhandlungen.** Ein Kapitel über Determinanten findet man in allen Lehrbüchern der Algebra. Von besonderen Lehrbüchern seien genannt:

H. Dölp, Die Determinanten, nebst Anwendung auf die Lösung algebraischer und analytischer Aufgaben. 5. Aufl. Darmstadt 1899. IV u. 95.

O. Hesse, Die Determinanten, elementar behandelt. 2. Aufl. Leipzig 1872. IV u. 48. (Wegen der strengen Definition nicht einfach.)

S. Günther, Lehrbuch der Determinantentheorie. Erlangen. 2. Aufl. 1877. (Mit Literaturverzeichnis und Aufgaben.)

R. Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten. Leipzig. 5. Aufl. 1881. (Nicht für Anfänger.) Frz. von Hoüel. Paris 1861.

J. Diekmann, Einleitung in die Lehre von den Determinanten und ihrer Anwendung auf dem Gebiete der niederen Mathematik. Essen 1876. 88 S.

K. Hattendorff, Einleitung in die Lehre von den Determinanten. Hannover. 2. Aufl. 1887. 60 S.

P. Mansion, Introduction à la théorie des déterminants. 3. éd. Gand 1899. 40 S. Übersetzt:

P. Mansion, Einleitung in die Theorie der Determinanten für Gymnasien und Realschulen. Leipzig 1899. 40 S.

P. Mansion, Éléments de la théorie des déterminants avec de nombreux exercices. Paris 6[e]. éd. 1900. IV u. 91. Deutsch von Horn. Leipzig 3. Aufl. 1900. 103 S.

E. Pascal, I determinanti, teoria ed applicazioni, con tutte le più recenti ricerche. Milano 1896. VIII u. 330. (Ein vollständiges Kompendium mit Geschichte und Bibliographie.) Dtsch. von Leitzmann. Leipzig 1900. XVI u. 266.

R. Forsyth Scott, The theory of determinants and their applications. 2[0] ed. rev. by G. B. Mathews. Cambr. 1904. XI u. 288.

Th. Muir, A treatise on the theory of determinants with graduated sets of exercises for use in colleges and schools. London 2. ed. 1900. 240 S.

G. Dostor, Éléments de la théorie des déterminants, avec application à l'Algèbre, la Trigonométrie et la Géométrie analytique dans le plan et dans l'espace. Paris. 2. éd 1883. XXXII u. 352. 3. éd. 1905. XXXIII u. 362.

E. Netto, Kombinatorik. § 15—35 Determinanten. Encykl. d. math. Wiss. I, 36—46.

Von wichtigen Abhandlungen über Determinanten seien genannt:

C. G. J. Jacobi, De formatione et proprietatibus determinantium. J. f. Math. **22**, 285—318, 1841. Dtsch. hrsg. von P. Stäckel: Über die Bildung und

die Eigenschaften der Determinanten. Ostw. Klass. Nr. 77. 1896. 73 S. (Mit historischen Notizen.)

C. G. J. Jacobi, De determinantibus functionalibus. J. f. Math. **22**, 319—352, 1841. Dtsch. hrsg. von P. Stäckel: Über die Funktionaldeterminanten, Ostw. Klass. Nr. 78. 1896. 72 S.

O. Hesse, Über die Elimination der Variabeln aus drei algebraischen Gleichungen vom zweiten Grade mit zwei Variabeln. Journ. f. Math. **28**, 68—96, 1844.

A. Cayley, On the theory of determinants. Trans. Soc. Cambr. **8**, 1844.

A. Cayley, Sur quelques propriétés des déterminants gauches. Journ. f. Math. **38**, 93, 1848.

E. Schering, Analytische Theorie der Determinanten. Abh. Ges. Gött. **22**, 1877. 41 S.

Ph. Gilbert, Sur une propriété des déterminants fonctionnels. Bruxelles 1869.

Kapitel 6. Algebraische Formen.

§ 1. Einleitung. Historisches.

Charakteristisch für die neuere Algebra ist, daß sie ihre Resultate in größter Allgemeinheit und in symmetrischer Form gibt. Unter Theorie der algebraischen Formen versteht man die Untersuchung derjenigen Eigenschaften der ganzen homogenen Funktionen beliebig vieler Veränderlichen, die bei beliebigen linearen Transformationen bestehen bleiben. Der Keim der Invarianz ist bereits in Lagranges oben (S. 59) genannter Abhandlung v. J. 1773 zu finden; doch beginnt die eigentliche Theorie der algebraischen Formen erst in den vierziger Jahren des 19. Jahrhunderts.

O. Hesse, Über die ebenen Kurven 3. Ordnung. Journ. f. Math. **28**, 68 u. 97, **36**, 143; **37**, 241 u. 257. Covariante (Hessische Form) und eine Invariante (Diskriminante).

A. Cayley, Über die Hyperdeterminante, das Fundamentalprinzip der modernen Algebra. Cambr. Math. J. **4**, 1845 u. Journ. f. Math. **30**, 1—37, 1846.

J. J. Sylvester, On a theory of the syzygetic relations of two rational integral functions. Phil. Trans. London 1853. (Trägheitsgesetz der quadratischen Formen.)

S. Aronhold, Zur Theorie der homogenen Funktionen dritten Grades. Journ. f. Math. **39**, 140—160, 1850.

S. Aronhold, Über eine fundamentale Begründung der Invariantentheorie. Journ. f. Math. **52**, 281, 1863.

S. Aronhold, Theorie der homogenen Funktionen dritten Grades von drei Veränderlichen. Journ. f. Math. **55**, 97—191 1858.

A. Cayley, Memoirs upon Quantics. Phil. Trans. London 1857 u. 1858.

A. Cayley, Mémoire sur la forme canonique des formes binaires. Journ. f. Math **54**, 48—58 u. 292, 1857.

Geschichte und Literatur der algebraischen Formen gibt:

Franz Meyer, Bericht über den gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie. Ber. Dtsch. Math. Ver. **1**, 79—292. 1892. Frz. von H. Fehr, Bull. sc. math. **20**, 1896. Ital. von G. Vivanti, Giorn. di mat. Napoli 1899.

§ 2. Lehrbücher der Theorie der algebraischen Formen.

G. Salmon, Lessons introductory to the modern higher algebra. London 1859. Deutsch von W. Fiedler: Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformationen. 2. Aufl. Leipzig 1877. XIV u. 478. (Theorie der Determinanten; Resultanten, Diskriminanten, Invarianten und Covarianten; Kanonische Formen; Binäre Formen. Historisches. Bibliographie.)

W. Fiedler, Die Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binären

Formen. Ein Beitrag zur Einführung in die Algebra der linearen Transformationen. Leipzig 1862. 235 S.
A. Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen. Leipzig 1871. VIII u. 467.
F. Faà di Bruno, Théorie des formes binaires. Torino 1876. Dtsch. von Th. Walter. Leipzig 1881. VIII u. 379.
P. Gordan, Vorlesungen über Invariantentheorie. Hrsgeg. von G. Kerschensteiner. Leipzig. I. Bd. Determinanten. XI u. 201. 1885. II. Binäre Formen. XII u. 360. 1887. III. Ternäre Formen. 1906.
E. Study, Methoden zur Theorie der ternären Formen. Im Zusammenhange mit Untersuchungen Anderer dargestellt. Leipzig. 1889. XII u. 210.
H. Andoyer, Leçons sur la théorie des formes et la géométrie analytique supérieure, à l'usage des étudiants des facultés des sciences. 2 v. Paris 1900. I. VI u. 508. II. (sous presse).

§ 3. **Spezielles.**

P. Gordan, Über das Formensystem binärer Formen. Leipzig. 1875. 52 S.
F. Klein, Über binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst. Math. Ann. **9**, 183—208, 1875.
L. Wedekind, Beiträge zur geometrischen Interpretation binärer Formen. Diss. Erlangen 1875.
C. Jordan, Mémoire sur les covariants des formes binaires. Journ. d. math. p. appl. (3) **2**, 177—233, 1876.
A. Cayley, A tenth memoir upon quantics. Phil. Trans. London **169**, 603—661, 1878. (Zur Theorie der binären Formen. 5. Ordnung.)
P. Gordan, Über Combinanten. Math. Ann. **5**, 95—123. 1872.
A. Clebsch und **P. Gordan,** Über cubische ternäre Formen. Math. Ann. **6**, 436—512, 1873.
Th. Muir, The theory of orthogonants in the historical order of its development up to 1832. Proc. R. Soc. Edinb. **24**, 244—288, 1902.
Th. Muir, The theory of Jacobians in the historical order of its development up to 1841. Proc. R. Soc. Edinb. **24**, 151—195, 1902.

Abschnitt IV. Arithmetik.

Kapitel 1. Niedere Arithmetik.

§ 1. **Das elementare Rechnen.** Die niedere Arithmetik umfaßt die sieben algebraischen Operationen, d. h. die Theorie der Verknüpfungen von Zahlen durch die Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Potenzierung, Radizierung und Logarithmierung. Das elementare Rechnen vollzieht diese Verknüpfungen an natürlichen bestimmten Zahlen; die allgemeine Arithmetik oder Buchstabenrechnung, arithmetica speciosa, operiert mit unbestimmten Zahlen oder Zahlensymbolen (Buchstaben).

Über die Geschichte der Zahlzeichen, der Numerationssysteme und des elementaren Rechnens in den ältesten Zeiten findet man Näheres in M. Cantors Vorlesungen über Geschichte der Mathematik (oben S. 3), in

M. Cantor, Mathematische Beiträge zum Culturleben der Völker. Halle 1863.
G. Friedlein, Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer und des christlichen Abendlandes vom 7. bis 13. Jahrhundert. Erlangen 1869.
P. Treutlein, Geschichte unsrer Zahlzeichen und Entwickelung der Ansichten über dieselben. Pr. Karlsruhe 1875.
R. F. B. Cantzler, De Graecorum arithmetica dissertatiunculae. 2 Pr. Greifswald 1831 u. 1832.

K. G. Hunger, Die arithmetische Terminologie der Griechen als Kriterium für das System der griechischen Arithmetik. Pr. Hildburghausen 1874.
P. Treutlein, Das Rechnen im 16. Jahrhundert. Abh. z. Gesch. d. Math. I. Leipzig 1877 u. Z. f. Math. u. Phys. 20. Suppl.
H. Stoy, Zur Geschichte des Rechenunterrichts. I. (einz.) T. Diss. Jena 1876.
Friedr. Unger, Die Methodik der praktischen Arithmetik, in historischer Entwickelung vom Ausgange des Mittelalters bis auf die Gegenwart, nach den Originalquellen bearbeitet. Leipzig 1888. 240 S.
T. Adam, Geschichte des Rechnens und des Rechenunterrichts. Quedlinburg 1892.
P. Bariola, Storia della ragioneria italiana. Milano 1897.
A. Brambilla, Saggio di storia della ragioneria presso i populi antichi. Milano 1896. 50 S.
A. Brambilla, Saggi critici di storia della ragioneria. I. Milano 1898.
F. Villicus, Geschichte der Rechenkunst vom Altertum bis zum 18. Jahrhundert mit besonderer Rücksicht auf Deutschland und auf Österreich. 3. Aufl. Wien 1897. VI u. 114.
A. Sadowski, Die österreichische Rechenmethode in pädagogischer und historischer Beleuchtung. Pr. Königsberg 1892.
P. Steinweller, Kurzer Abriß der Geschichte des Rechenunterrichts sowie Beschreibung der wichtigsten Lehrmittel für denselben. Leipzig. 2. Aufl. 1900. 48 S.
G. Cerboni, Elenco cronologico delle opere di computisteria e ragioneria venuto alla luce in Italia dal 1202 sino al presente. 3. ed. Roma 1886.
H. Große, Historische Rechenbücher des 16. und 17. Jahrhunderts und die Entwicklung ihrer Grundgedanken bis zur Neuzeit. Ein Beitrag zur Geschichte der Methodik des Rechenunterrichts. Leipzig 1901. 183 S.

Von älteren Rechenbüchern nennen wir nur solche, die historisch wichtig sind. Jahrhunderte hindurch haben die Rechenmeister und Algebristen ihre Weisheit geschöpft aus dem Werke von:

Leonardo Pisano (gen. Fibonacci), Liber Abaci, 1202 geschrieben. 1228. Pubblicato da B. Boncompagni, Roma 1857.
Luca Paciuolo, Summa de arithmetica, 1494. (Das schon oben [S. 57] erwähnte Buch enthält auch die praktische Arithmetik.)
Ulrich Wagner, ein Rechenbuch, gedruckt 1482 von Petzensteiner. Bamberg.
J. Widmann, Behende und hübsche Rechnung auf allen Kaufmannschaft. Leipzig 1489, Pforzheim 1500, 1508, Hagenau 1519 u. Augsb. 1526.
Gernardus, Algorithmus demonstratus. Ed. J. Schoner Norimb. 1534.
G. v. Peuerbach, Elementa Arithmetices. Wittenberg 1536.
Reiner Gemma Frisius, Arithmeticae practicae methodus facilis. Antw. 1540, Viteb. 1548. Viele Auflagen.
Adam Riese, Rechnung nach der Lenge, auf den Linihen und Federn, dazu forteil und behendigkeit durch die Proportionen, Practica genennt. St. Annenberg 1550.
Christian Pescheck, Vorhof zur Rechenkunst. Zittau 1708. 12. Aufl. 1768. (Ein weit verbreitetes Rechenbuch.)
C. v Clausberg, Demonstrative Rechenkunst, worinnen gemeine und kaufmännische Rechnungsarten. Leipzig 1732. 5. Aufl. 1795.
I. G. G. Hübsch, Arithmetica Portensis. Leipzig 1748. (Für Lateinschulen. Ganze Zahlen, Brüche, Praktik, Regeldetri.)
I. B. Basedow, Überzeugende Methode der auf das bürgerliche Leben angewandten Arithmetik. Lübeck 1763.
J. H. Pestalozzi, Anschauungslehre der Zahlenverhältnisse, bearb. von Krüsi. Zürich 1803.
Jos. Schmidt, Die Elemente der Zahl als Fund der Algebra. Heidelberg 1810.
E. A. A. Tillich, Allgemeines Lehrbuch der Arithmetik. Leipzig 1806 u. 1821.

F. W. v. Türk, Leitfaden zur zweckmäßigen Behandlung des Unterrichts im Rechnen. Berlin 1816. 4. Afl. 1824.
A. Diesterweg und **Horner,** Methodisches Handbuch für den Gesamtunterricht im Rechnen. Elberfeld. 3. Aufl. 1839.
W. Stern, Lehrgang des Rechenunterrichts nach geistbildenden Grundsätzen. Karlsruhe 1832.
A. W. Grube, Leitfaden für das Rechnen in der Elementarschule, nach den Grundsätzen der heuristischen Methode. Berlin 1842. 2. Aufl. 1852.
A. Böhme, Anleitung zum Unterricht im Rechnen. Berlin 1852.
A. Harprecht, Der Rechenunterricht in der Realschule. Pr. Berlin 1866.
B. E. R. Schurig, Lehrbuch der Arithmetik. Leipzig 1883—84.
F. Schader, Über den Rechenunterricht an höheren Schulen. Entwurf eines methodischen Leitfadens. I. Pr. Naumburg 1884.
Tanck, Das Rechnen auf der Unterstufe. 1884.
A. P. L. Claußen, Methodische Anleitung zum Unterricht im Rechnen. Potsdam 1885. 304 S. (Für Volksschullehrer.)
E. Särchinger u. **V. Ester,** Aufgabensammlung für den Rechenunterricht. 3 Hefte. 91 + 104 + 70 S. Leipzig. 3. Aufl. 1904.
H. Müller und **F. Pietzker,** Rechenbuch für die unteren Klassen der höheren Lehranstalten. A. Für Gymnasien. VIII u. 254. B. Für Realanstalten. VIII u. 284. Leipzig 1904. C. 3 Hefte. 1906. XVIII u. 252.
H. Heinemann und **Fr. Schreyer,** Rechenbuch für kaufmännische Fortbildungsschulen. A. 4 Hefte. VI u. 412. B. II u. 338. C. II u. 189. Leipzig 1904.
W. Stegemann, Zur Methodik des Rechenunterrichts in höheren Schulen. Pr. Prenzlau 1889.

Das Kopfrechnen wird ausführlich behandelt in:

Ryder, Système complet de calcul mental, ou Méthode de calcul abrégé. Paris 1886.
W. A. Quitzow, Das Kopfrechnen in systematischer Stufenfolge. Leipzig 1883. 250 S.
W. Adam, Schule des Kopfrechnens. Zum Handgebrauch für Lehrer bearbeitet. Leipzig. I. T. 1886. 215 S. II. 1887. 136 S. III. 1888. 156 S.
Émile Jacobi, La clef de l'Arithmétique. Traité de Calcul mental. Ouvrage couronné. 2. éd. 18°. Paris 1860.

Die Bruchrechnung, sowohl das Rechnen mit gemeinen Brüchen wie die Dezimalbruchrechnung, werden in den genannten Rechenbüchern abgehandelt. Von besonderen Büchern seien genannt:

E. Th. Schütze, Praktische Anweisung zur Behandlung der Bruchrechnung und der bürgerlichen Rechnungsarten. Für angehende Lehrer. Leipzig 1877. 368 S. — Frag- u. Aufgabenhefte zur Bruchrechnung und den bürgerlichen Rechnungsarten. Leipzig 1878, I. Heft. — Bruchrechnung und Regeldetri. 88 S. II. Heft. — Die bürgerlichen Rechnungsarten mit abgekürzter Dezimalbruchrechnung. 66 S. Auflösungen zu I u. II. 35 S.

Was die Entstehung der Dezimalbrüche anbetrifft, so waren Peuerbach und Regiomontanus die Ersten, welche in astronomischen Rechnungen die von den Griechen überkommenen Sexagesimalbrüche durch Dezimalbrüche ersetzten. Allgemeiner kamen sie erst in Gebrauch durch die erste zusammenhängende Darstellung von

Simon Stevin, La disme enseignant facilement expédier par nombres entiers sans rompre tous comptes se rencontrant aux affaires des hommes. Leyden 1585. 7 S. fol. Weitere Schriften:
Joh. Hartmann-Beyer, Logistica decimalis, d. i. Kunstrechnung von zehnteiligen Brüchen. Frankf. 1603. IV u. 230 S. u. später.
J. Robertson, On the theory of circulating decimal fractions. Phil. Trans. Lond. 1768, 207.

Joh. III. Bernoulli, Sur les fractions décimales périodiques. Hist. Mém. Ac. Berlin a. 1771, 273, 305.
W. Fr. Wucherer, Beiträge zum allgemeinen Gebrauch der Decimalbrüche. Mit Tafeln. Carlsruhe 1795. 152 S.
Ch. L. Schübler, Praktische Vorteile der Decimalrechnung mit bestimmten Anwendungen, insbesondere auch in Beziehung auf Kopfrechnen. Heilbronn 1799.
F. Vieille, Théorie générale des approximations numériques. 2. éd. 18°. Paris 1854.
C. Harms, Das abgekürzte Rechnen. Pr. Oldenburg 1872.
A. Powel, Abgekürzte Rechnung mit Dezimalzahlen. Pr. Gumbinnen 1887.
P. Martin, Théorie et pratique des calculs d'approximation numérique. Paris 12°. 1864.
Gouyon, Sur les approximations numériques. 2. éd. Paris 1891.
Bohnstedt, Das Rechnen mit Dezimalbrüchen. Pr. Luckau 1874.
G. de Coninck, Lois nouvelles des puissances des nombres. Propriétés nouvelles des fractions décimales périodiques. Paris 1875.
H. Schwarz, Theorie der abgekürzten Rechnung mit Dezimalzahlen. Pr. Gumbinnen 1882.
C. H. Nagel, Theorie der periodischen Dezimalbrüche. Stuttgart. 2. Aufl. 1884.
O. Adam, Über periodische Dezimalbrüche. Pr. Wien 1885.
H. Bork, Periodische Dezimalbrüche. Pr. Berlin 1895.
E. Kullrich, Die abgekürzte Dezimalbruchrechnung. Pr. Schöneberg 1898. 28 S. 4°.
A. Holtze, Über periodische Dezimalbrüche und ihr Analogon in anderen Zahlensystemen. Pr. Naumburg 1887. 50 S. 4°.
P. F. Verhulst, Leçons d'arithmétique sur la multiplication abrégée. Bruxelles 1897.

Die Verhältnisrechnung und Regeldetri findet ihre Stelle in allen Rechenbüchern; von speziellen Schriften seien genannt:

K. F. de Rees, Allgemeine Regel der Rechenkunst, oder neueste Art, alle Aufgaben, in welchen etwas ein Verhältnis zu andern Dingen hat, kurz und leicht aufzulösen. Aus dem Holl. von L. Mt. Kahle Bremen 1738. 6. Asg. 1797.
M. L. Willich, Gründliche Vorstellung der Reeseschen allgemeinen Regel nebst deren Anwendung auf die üblichsten Rechnungsarten. 2 Bd., Bremen u. Göttingen 1759—60.
J. G. Schmalzried, Vollständige Anleitung zur Reeseschen Rechnung Stuttgart 1778; 7. Aufl. 1810.
J. M. Knappich, Logisch-mathematische Lösungsmethode der Verhältnisrechnung. Isng. 1827.
N. H. W. Arendt, Die Regeldetri in ganzen Zahlen und mit leichten Brüchen. Hamburg und Leipzig 1835.
G. Longona, La regola de tri. Sambolini 1893.
E. R. Albricht, Über die Lösung aller Aufgaben der einfachen und zusammengesetzten Regeldetri. Pr. Leisnig 1893.
F. Kleinpaul, Aufgaben zum praktischen Rechnen. I—IV. 12. Aufl. Bremen 1886.
E. Knieß und **O. Bachmann,** Aufgabensammlung für das Rechnen mit bestimmten Zahlen. I—II. 4.—5. Aufl. München 1893.
K. Röse, 5000 Aufgaben nebst den Resultaten aus der Bruchrechnung. Wismar 1890.

§ 2. **Die elementare Arithmetik. Lehrbücher und Aufgaben.** In dem VII., VIII. und IX. Buch der Elemente Euklids wird die Arithmetik behandelt; aber in Ermangelung passender Symbole werden hier allgemeine Zahlen durch Strecken bezeichnet und Zahlenverbindungen durch Konstruktionen erläutert. Deutliche Anfänge der Buchstabenrechnung finden sich erst bei

Michael Stifel, Arithmetica integra. Mit Vorrede von Ph. Melanchthon. Norimb. 1544, und Die Coss (S. S. 57).

Weiter entwickelt wird die Buchstabenrechnung von

Fr. Vieta, Isagoge in artem analyticam. Tours 1591.

Simon Stevin, La pratique d'arithmétique. Leiden 1585.

A. Girard, Invention nouvelle en l'algèbre (s. oben S. 57).

Franciscus Maurolycus, Arithmeticorum libri II. Anhang der Opuscula. Venetiis 1575.

Als ältere praktische Lehrbücher der Arithmetik nennen wir:

Reiner Gemma Frisius, Arithmeticae practicae methodus facilis. Antverp. 1540, Viteberg. 1548. Viele Auflagen.

Georg Henisch, Arithmetica perfecta et demonstrata. Aug. Vindelic. 1605.

L. Euler, Einleitung zur Rechenkunst. Petersb. 1738—40. 2 Bde., 8°.

A. de Fortia, Traité d'Arithmétique. Avignon 1781 u. 1794.

L. Lagrange, Mathematische Elementarvorlesungen (1795 an der École Normale zu Paris gehalten). Dtsch. von H. Niedermüller. Leipzig 1880, behandeln im I. u. II. Teil die Arithmetik.

Seit Beginn des 19. Jahrhunderts entstanden sehr viele wissenschaftlich gehaltene Lehrbücher der Arithmetik. Aus der Fülle derselben seien folgende genannt:

M. Ohm, Reine Elementarmathematik. I. Die Arithmetik. Berlin 1825. — Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik. I. Niedere Analysis: Arithmetik und Algebra. Berlin. 2. Aufl. 1828.

M. Cantor, Grundzüge einer Elementararithmetik. Heidelberg 1855.

J. H. T. Müller, Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik. Halle 1838; 2. Aufl. 1855. 412 S.

H. Graßmann, Lehrbuch der Arithmetik. Berlin 1861. 220 S.

J. Bertrand, Traité d'arithmétique. 4. éd. Berlin 1867.

E. Kossak, Die Elemente der Arithmetik. Pr. Berlin 1872. 29 S. 4°. (Eine wissenschaftliche Auffassung nach Weierstraß.)

O. Hesse, Die vier Species. Leipzig 1872; 35 S.

J. A. Serret, Traité d'arithmétique. 7. éd. Paris 1887.

O. Stolz, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik. Nach den neueren Ansichten bearbeitet. Leipzig. I. Allgemeines und Arithmetik der reellen Zahlen. 1885, 344 S. II. Arithmetik der complexen Zahlen. 1886, 326 S.

R. Baltzer, Die Elemente der Mathematik. I. Arithmetik, S. 1—197. Leipzig. 7. Afl. 1885.

H. Schubert, Elementare Arithmetik und Algebra. Leipzig. Göschen. 1899. 230 S. (Auch historische Notizen.)

K. Schwering, Arithmetik und Algebra für höhere Lehranstalten. Freiburg i. B. 2. Aufl. 1899. 80 S.

Ch. de Comberousse, Arithmétique (I. du Cours de Mathématiques). 4. éd. Paris 1900.

E. Humbert, Traité d'arithmétique. Avec une préface de J. Tannery. 3. éd. Paris 1903. VII u. 501.

O. Stolz und **J. A. Gmeiner,** Theoretische Arithmetik. Leipzig. I. T. 1901, IV u. 98; II. T. 1902, XI u. 99—402.

F. Amodeo, Aritmetica particolare e generale. Napoli 1904. XVI u. 526.

Eine Bibliographie der Arithmetik gibt

A. de Morgan, Arithmetical books from the invention of printing to the present time. London 1847.

In den meisten dieser Lehrbücher finden sich zugleich zahlreiche Übungen und Aufgaben. Von besonderen Aufgaben-Sammlungen seien hier noch einige angeführt:

Meier Hirsch, Sammlung von Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra. Berlin 1804. 18. Aufl. von H. Bertram 1881.

Eduard Heis, Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra. Köln 1837. 108 Aufl. 1904.

Ludw. Matthießen, Schlüssel zur Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra von E. Heis. Köln 4. Aufl. VIII u. 180. 1902.

E. Bardey, Arithmetische Aufgaben nebst Lehrbuch der Arithmetik. Leipzig 5. Aufl. 1888. 269 S. 13. Aufl. 1903. IX u. 269. 14. Aufl. Neu bearbeitet von F. Pietzker und O. Preßler. Leipzig 1905.

E. Bardey, Methodisch geordnete Aufgabensammlung, mehr als 8000 Aufgaben enthaltend, über alle Teile der Elementar-Arithmetik. Leipzig. 28. Aufl. 1905. XIV u. 330. Neue Ausg. 5. Aufl. von F. Pietzker und O. Preßler 1907. VIII u. 395. Ausg. für Lehrerseminare von W. Seyffarth. Leipzig 1904. VIII u. 300.

H. Schubert, Sammlung von arithmetischen und algebraischen Fragen und Aufgaben, verbunden mit einem systematischen Aufbau der Begriffe, Formeln und Lehrsätze der Arithmetik für höhere Schulen. 2 Hefte. Potsdam 1883. 222 u. 224 S.

H. Schubert, Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra. 2765 Aufgaben, systematisch geordnet. 3. Aufl. Leipzig. 1905. 147 S. 12°.

H. Müller und **M. Kutnewsky,** Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik, Trigonometrie und Stereometrie. In 2 Teilen. gr. 8. Leipzig. Ausgabe A: Für Gymnasien und Progymnasien. I. Teil: 4. Aufl. 1906. VII u. 237 S. II. Teil: 1902. VIII u. 348 S. 2. verb. u. stark gekürzte Aufl. 1905. VIII u. 273 S. Ausgabe B: Für reale Anstalten und Reformschulen. I. Teil: 4. Aufl. 1906. VIII u. 301 S. II. Teil: 2. Aufl. 1907. IX u. 304 S. Ausgabe für bayerische Lehranstalten. Herausg. von M. Zwerger. 1906. VIII u. 276 S.

A. Schülke, Aufgaben-Sammlung aus der Arithmetik, Geometrie, Trigonometrie und Stereometrie nebst Anwendungen auf Astronomie, Feldmessung, Nautik, Physik, Technik und Volkswirtschaftslehre. gr. 8. Leipzig. I Teil: Für die mittleren Klassen. Mit 7 Figuren im Text. 1906. VIII u. 194 S. II. Teil: Für die oberen Klassen. Mit 45 Figuren im Text. 1902. X u. 194 S.

H. Fenkner, Arithmetische Aufgaben. Unter besonderer Berücksichtigung von Anwendungen aus dem Gebiete der Geometrie, Physik und Chemie. Braunschweig 1898. Ausg. A. (Gymn.) VIII u. 258. B. (Realsch.) VI u. 222. 4. Aufl.

P. André, Exercices d'arithmétique, problèmes et théorèmes. Énoncés et solutions développées. Paris 6. éd. 1891. 360 S.

J. Fitz-Patrick et **G. Chevreul,** Exercices d'arithmétiques, énoncés et solutions. Avec une préface de J. Tannery. 2. éd. Paris 1899. 690 S.

K. Schwering, Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik. 3 T. Freiburg i. B. 2. Aufl. 1902. 242 S.

E. Wrobel, Übungsbuch zur Arithmetik und Algebra. 3. Aufl. Rostock 1898.

H. Harth, Aufgabensammlung aus der Arithmetik und Algebra. Leipzig und Wien 1898. 305 S.

K. Fuß, Sammlung von Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra. Nürnberg 6. Aufl. XII u. 256 S. 1904.

§ 3. Praktische Arithmetik.

Eine der ersten wissenschaftlichen Arbeiten über Zinsrechnung ist:

G. Leibniz, Meditatio juridico-mathematica de interusurio simplici. Acta Erud. 1683.

In vielen Lehrbüchern des elementaren Rechnens und der Arithmetik, die wir im vorigen genannt haben, wird auch das kaufmännische Rechnen,

die Zinseszins-, Rabatt-, Termin-, Rentenrechnung und die politische Arithmetik behandelt.

Von speziellen älteren und neueren Lehrbüchern der praktischen Arithmetik seien genannt:

Christlieb v. Clausberg, Demonstrative Rechenkunst, worinnen gemeine und kaufmännische Rechnungsarten. Leipzig 1732. 5. Aufl. 1795. 1520 S. (Das bedeutendste kaufmännische Rechenbuch des Jahrhunderts.)

Carl Chassot de Florencourt, Abhandlungen aus der juristischen und politischen Rechenkunst. Mit Vorrede von Kästner. Altenburg 1781. 298 S. 4°.

A. G. Kästner, Fortsetzung der Rechenkunst in Anwendung auf mancherley Geschäfte. Göttingen 1786.

J. N. Tetens, Einleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften, die von dem Leben und Tode einer oder mehrerer Personen abhangen. Mit Tabellen zum praktischen Gebrauche. 2 Bde., Leipzig 1785—86. 1000 S. (Vollständigstes Werk über Leibrenten.)

Fr. Ferd. Schweins, Zinszinsrechnung. Darmstadt 1812.

J. Ambr. Hülße, Die einfache und zusammengesetzte Zinsrechnung mit ihren Anwendungen. Leipzig 1836.

H. Bleicher, Grundriß der Theorie der Zinsrechnung. Berlin 1888. 75 S.

F. E. Feller und **C. G. Odermann,** Das Ganze der kaufmännischen Arithmetik. Leipzig 1842. 17. Aufl. 1897.

L. Öttinger, Anleitung zur finanziellen, politischen und juridischen Rechnungen. Braunschweig 1845.

W. Stanley-Jevons, The theory of political economy. London 1871.

Léon Walras, Éléments d'économie politique pure, ou théorie de la richesse sociale. Lausanne 1874. 208 S.

E. Kaulich, Lehrbuch der kaufmännischen Arithmetik. 4. Aufl. Prag 1885.

M. Cantor, Politische Arithmetik oder die Arithmetik des täglichen Lebens. Leipzig 1898; 2. Aufl. 1903. x u. 155.

Moritz Kitt, Grundlinien der politischen Arithmetik. I. Zinseszins- und Rentenrechnung. IV u. 78. II. Tabellen. 29 S. Wien 1901.

U. Ceretti, Gli elementi dell' aritmetica pratica esposto con metodo sinottico. Rieti 1894.

C. Burali-Forti, Lezioni di aritmetica pratica. Torino 1901. VIII u. 276.

E. Pereire, Tables de l'intérêt composé, des annuités et des rentes viagères. Paris 3. éd. 1882.

N. Lacaille, Tables synoptiques des calculs d'intérêts composés, d'annuités et d'amortissements. 2. éd. Paris 1885.

C. Runge, Praxis der Gleichungen. Leipzig 1900. 196 S.

J. Lüroth, Vorlesungen über numerisches Rechnen. Leipzig 1900. VI u. 194.

H. Bruns, Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens. Leipzig 1903. VI u. 159.

R. Mehmke, Numerisches Rechnen. Encykl. d. math. Wiss. I. T. 938—1079. Leipzig 1901. (Genaues Rechnen. Genähertes Rechnen. Rechenapparate und -Maschinen. Graphische Tafeln.)

C. Faßbinder, Théorie et pratique des approximations numériques. Paris 1906. VI u. 92.

§ 4. Logarithmen.

Bei Beginn des 17. Jahrhunderts begann eine neue Epoche der Arithmetik mit der Erfindung der Logarithmen.

Die jetzt übliche Darstellung der Lehre von den Logarithmen rührt von **L. Euler** her. (Introductio in analysin infinitorum, Laus. et Gen. 1748, I § 102 sq.)

Für die Geschichte und Bibliographie der Logarithmen ist von Bedeutung das Sammelwerk von

Fr. Mazères, Scriptores logarithmici; or a Collection of several curious tracts on the nature and construction of Logarithmus, mentioned in Dr. Huttons historical introduction to his new edition of Sherwins mathematical tables. London 6 v. 4°. 1791—1807.

Peter Wargentin, Af vetenskapernas historia; om logarithmerma. Handl. Vet. Stockh. **13**, (1752), 1—11. Dtsch. Abh. Schwed. Ak. **14**, (1752), 3—15.

I. Sm. Fr. Gehler, Historiae logarithmorum naturalium primordia. Lips. 1776. 4°.

L. Euler, De la controverse entre Mm. Leibniz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires. Mém. Ac. Berlin **5**, a. 1749, 139—179. 1751.

Bernh. F. Thibaut, Historiae controversiae circa numerorum negativorum et impossibilium logarithmos. Gotting. 1797. 4°.

Joost Bürgi, Arithmetische und geometrische Progreß-Tabulen, sambt gründlichem Unterricht, wie solche nützlich in allerley Rechnungen zu gebrauchen und verstanden werden sol. Prag 1620. 4°.

John Napier, Mirifici logarithmorum canonis descriptio. Edinb. 1614; 2. éd., vermehrt um die: Mirifici ipsius canonis constructio, 1619. Facsimile Reprod. der Ausg. Lugd. 1620. Paris 1895. (I) u. 62.

Henry Briggs, Logarithmorum Chilias prima. London 1618.

Henry Briggs, Arithmetica logarithmica. London 1624. (Erste vollständige Tafel der gemeinen Logarithmen der Zahlen von 1 bis 20000, von 90000—100000 auf 14 Stellen.) Neue Aufl. von Vlacq. Goudae 1628 (worin die Lücke 20000—90000 ausgefüllt wird).

Henry Briggs, Trigonometria Britannica: sive de doctrina Triangulorum libri duo. Ed. Henr. Gellibrand. Goudae 1633. 4. Bll. u. 110 S. u. 68 Bg. Tafeln fol.

Adr. Vlacq, Trigonometria artificialis, seu magnus canon triangolorum logarithmicus. Goudae fol. 1633. Auszüge 1636 und öfter.

Nic. Mercator, Logarithmotechnia, sive methodus nova accurata et facilis construendi logarithmos. London 1668.

G. v. Vega, Thesaurus logarithmorum completus, d. i. vollständige Sammlung größerer logarithmisch-trigonometrischer Tafeln. Leipzig 1794. 684 S. fol. (10stellig). Reprod. Florenz 1889 u. 1896. 3 u. 29 u. 684 S. 4°.

G. v. Vega, Logarithmisch-trigonometrische Tafeln. Wien 1783. (7stellig.) Zahlreiche Ausg. von v. Vega, Hülße, Bremiker.

Fr. Callet, Tables portatives de logarithmes. Paris 1783 u. flg. Neue Ausg. 1866. 798 S. 8°.

Sherwin, Mathematical tables. Revised and corrected by W. Gardiner. London 1706 u. später. 5. ed. 1785. 535 S.

G. v. Vega, Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch. Hsg. von I. A. Hülße. 34. Aufl. Leipzig 1851; 46. Aufl. 1862. Neue Ausgaben von C. Bremiker. 74. Aufl. von F. Tietjen. Berlin 1892. XXVIII u. 575.

Joh. Karl Schulze, Neue Sammlung logarithmischer, trigonometrischer und anderer Tafeln. 2 T. Berlin 1788. (Enthält 48-stellige natürliche Logarithmen der Primzahlen unter 10000.)

A. Namur et **P. Mansion,** Tables de logarithmes à 12 décimales, jusqu'à 434 milliards, publ. p. l'Académie Royale de Belgique. Paris, Bruxelles 1877.

E. Chambers Mathematical tables, consisting of logarithmes of numbers 1 to 10800, trigonometrical, nautical and other tables, ed. by James Pryde. New ed. by W. and R. Chambers. London, Edinburgh 1880. 454 S. (Reichhaltiges Tabellenwerk.)

V. Caillet, Tables des logarithmes et co-logarithmes des nombres et des lignes trigonométriques. Suivies d'un Recueil de Tables astronomiques et nautiques. Paris 1854. 331 S., 47 T.

C. Bruhns, Neues logarithmisch-trigonometrisches Handbuch auf 7 Dezimalstellen. Leipzig 6. Ausg. 1903. XXIV u. 610.

L. Schrön, Siebenstellige gemeine Logarithmen der Zahlen von 1 bis 108000 und der Sinus. Cosinus, Tangenten und Cotangenten aller Winkel des Quadranten von 10 zu 10 Sekunden. Braunschweig. T. I u. II. 22. Aufl. 1895. VIII u. 4, XX u. 474. Lex. 8°.

H. G. Köhler, Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch. Leipzig. 16. Aufl. 1898. XXXVI u. 388 S. 8°.

I. Hoüel, Tables des logarithmes à cinq décimales pour les nombres et les lignes trigonométriques, suivies des logarithmes d'addition et de soustraction ou logarithmes de Gauß et de diverses tables usuelles. Paris. Nouv. éd. 1891.

Z. Leonelli, Supplément logarithmique. Bordeaux 1802. (Darin schon die sog. Gaußschen Logarithmen.) 2. éd. avec une Notice sur l'auteur, par I. Hoüel. Paris 1864.

C. F. Gauß, Tafel zur bequemen Berechnung der Logarithmen der Summe oder Differenz zweier Größen, die selbst nur durch ihre Logarithmen gegeben sind. Monatl. Corr. Zach **26**, 1812.

Th. L. Wittstein, Siebenstellige Gaußische Logarithmen. Hannover 1866.

S. Gundelfinger, Sechsstellige Gaußische u. siebenstellige gemeine Logarithmen. 2. Aufl. Leipzig 1902. IV u. 31.

W. Jordan, Logarithmisch-trigonometrische Tafeln für neue (centesimale) Teilung, mit 6 Dezimalstellen. Stuttgart 1894. VIII u. 420. Gr. Lex. 8°.

C. Bremiker, Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit 6 Dezimalstellen. Neu bearb. von Th. Albrecht. Berlin. 13. Asg. 1900. XVIII u. 598.

C. Stampfer, Sechsstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln. Neu bearb. von Ed. Doležal. 20. Aufl. Schulausgabe. Wien 1904. XXXII u. 162.

F. G. Gauß, Fünfstellige vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Halle. 60. Aufl. 1899. 166 u. XXXV. Ster. Dr. 1904. 140 u. XVIII.

H. Schubert, Fünfstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen. Leipzig 1897. VI u. 157.

H. Gravelius, Fünfstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln für die Dezimalteilung des Quadranten. Nebst vierstelligen Tafeln der Zahlenwerte der trigonometrischen Funktionen, sowie gewöhnlichen Logarithmentafeln und Quadrattafeln. Berlin 1886. 203 S. gr. 8°.

H. Gravelius, Vierstellige Logarithmentafeln. Berlin 1901. 24 S. 3°.

C. Bremikers Tafeln vierstelliger Logarithmen. 2. Aufl. von A. Kallius. Berlin 1894. 64 S. gr. 8°.

F. G. Gauß, Vierstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Halle a. S. 1900. 96 S. 8°.

A. Schülke, Vierstellige Logarithmentafeln. Leipzig. 6. Aufl. 1907. VI u. 22.

Jos. Hrabák, Praktische Hilfstabellen für logarithmische und andere Zahlenrechnungen. Leipzig. 3. Aufl. 1885. V u. 253.

I. Zech, Tafeln der Additions- und Subtractions-Logarithmen für sieben Stellen. Berlin 3. Aufl. 1892.

§ 5. Instrumentale Arithmetik.

John Napier (Neper), Rhabdologiae seu numerationis per virgulas libri duo, cum appendice de expeditissimo multiplicationis promptuario, quibus accessit et arithmeticae localis liber unus. Edinb. 1617. 159 S. 12°. Dtsch. 1619, 1623; ital. Verona 1623. (Rechenstäbe zur Multiplikation.)

Edmund Gunter, The description and use of the sector, gross-staff and other instruments. London 1620, Works 1624. 5. ed. 1673. (Rechenschieber, règle à calcul, sliding rule.)

Joh. Heinr. Lambert, Beschreibung und Gebrauch der logarithmischen Rechenstäbe. Augsburg 1761. Zusätze 1770. 2. Aufl. 1772.

Ph. Mouzin, Instruction sur la manière de se servir de la règle à calcul. Paris 3. éd. 1837.

A. Labosne, Instruction sur la règle à calcul, contenant les applications de cet instrument au calcul des expressions numériques, à la résolution des équations du deuxième et du troisième degré, et aux principales questions de trigonométrie. Paris 1872.

K. v. Ott, Der logarithmische Rechenschieber. Theorie und Gebrauch desselben. Prag 1891.

E. Hammer, Der logarithmische Rechenschieber und sein Gebrauch. Stuttgart. 2. Aufl. 1901. VII u. 69. 3. Aufl. 1904. VIII u. 71.

B. Esmarch, Die Kunst des Stabrechnens. Gemeinfaßliche und vollständige Anleitung zum Gebrauch des Rechenstabes. Leipzig 1896. 192 S. u. 2 Tfln.

I. A. Müller-Bertosa, Anleitung zum Rechnen mit dem logarithmischen Rechenschieber. Zürich. 2. Aufl. 1896. IV u. 60.

W. Dyck, Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente. Unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen herausgegeben im Auftrage des Vorstandes der Dtsch. Math.-Ver. München 1892. XVI u. 430. Nachtrag 1893. X u. 135. (Abt. I, 1: Arithmetik.)

M. d'Ocagne, Nomographie. Les calculs usuels effectués au moyen des abaques. Essai d'une théorie générale. Règles pratiques. Exemples d'application. Paris 1891. VI u. 96.

M. d'Ocagne, Traité de Nomographie. (Théorie des abaques. Applications pratiques.) Paris 1899. XIV u. 480. 8⁰.

F. Schilling, Über die Nomographie von M. d'Ocagne. Eine Einführung. Leipzig 1900. 47 S.

R. Mehmke, Numerisches Rechnen. (S. S. 73.)

Kapitel 2. Höhere Arithmetik (Zahlentheorie).

§ 1. **Einleitung.** Während die niedere Arithmetik, die Zahlenlehre im engeren Sinne, nur nach der Größe der Zahl fragt, untersucht die höhere Arithmetik oder Zahlentheorie die Qualität der Zahl. Ihre Anfänge reichen zurück bis auf Diophant. Durch die Beschäftigung mit Diophant gelangte Fermat zur Auffindung einer Reihe zahlentheoretischer Sätze. Er teilte sie sowohl in Briefen an Roberval, Pascal, den Pater Mersenne und andere mit, wie besonders in den von seinem Sohne herausgegebenen beiden Werken: Diophanti Alexandrini quaestionum arithmeticorum libri VI, cum Commentariis D. Bacheti et observationibus P. de Fermat, Tolosae 1670, und Varia Opera mathematica D. P. de Fermat, Tolosae 1679; Réimpr. Berlin 1861. (S. auch Omores, oben S. 15.) Einen Auszug beider Werke und einen Auszug aus Fermats Briefwechsel gibt E. Brassinne, Précis des oeuvres mathématiques de Fermat. Paris 1853. Ein großer Teil der Sätze Fermats wurde von L. Euler und Lagrange bewiesen. Zu einer besonderen mathematischen Disziplin wurde die Zahlentheorie erst um die Wende des 18. Jahrhunderts.

§ 2. **Lehrbücher.** Das erste größere zusammenhängende Werk über Zahlentheorie ist

A. M. Legendre, Essai sur la théorie des nombres. Paris 1798; 2. éd. Théorie des nombres 1808, 2 Suppl. 1816 u. 1825; 3. éd, 2 v. 1830; 4. éd. (Réimpr.) 1899. 800 S. 4⁰. Dtsch. von H. Maser 2 Bde., Leipzig 1893. I. XVIII u. 442; II. XII u. 453.

K. F. Gauß, Disquisitiones arithmeticae. Lipsiae 1801. Werke I (Sectio I.

Kongruenzen im allgemeinen. II. Kongruenzen 1. Gr. III. Potenzreste. IV. Kongruenzen 2. Gr. V. Quadratische Formen. VI. Anwendungen. VII. Kreisteilungsgleichungen.)

K. F. Gauß, Untersuchungen über höhere Arithmetik. Dtsch. hrsg. von H. Maser. Berlin 1889. 695 S. (Außer dem vorigen Werke mehrere Abhandlungen arithmetischen Inhalts.)

Ferd. Minding, Anfangsgründe der höheren Arithmetik. Berlin 1832. 198 S.

P. G. Lejeune-Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie. Hrsg. von R. Dedekind. 4. Aufl. Braunschweig 1894. xvii u. 657. Ital. von Faifofer. Venezia 1881.

P. Bachmann, Zahlentheorie. Versuch einer Gesamtdarstellung dieser Wissenschaft in ihren Hauptteilen. I. Die Elemente der Zahlentheorie. Leipzig 1892. xii u. 264. II. Die analytische Zahlentheorie. 1894. xviii u. 494. III. Die Lehre von der Kreisteilung und ihre Beziehungen zur Zahlentheorie. 1872. xii u. 300. IV. Die Arithmetik der quadratischen Formen. 1. Abt. 1898. xvi u. 668. V. Allgemeine Arithmetik der Zahlenkörper. 1905. xxii u. 548.

V. A. Lebesgue, Introduction à la théorie des nombres. Paris 1862.

G. Wertheim, Elemente der Zahlentheorie. Leipzig 1887. x u. 382.

G. B. Matthews, Theory of numbers. I. Cambridge 1892. xii u. 323.

Ed. Lucas, Théorie des nombres. T. I. (Le calcul des nombres entiers. Le calcul des nombres rationnels. La divisibilité arithmétique.) Paris 1891. xxxiv u. 520.

U. Scarpis, Primi elementi della teoria dei numeri. Man. Höpli. Milano 1896. viii u. 152. kl. 8.

E. Cahen, Éléments de la théorie des nombres. (Congruences. Formes quadratiques. Nombres incommensurables. Questions diverses.) Paris 1899. viii u. 403. gr. 8.

L. Kronecker, Vorlesungen über Zahlentheorie. Hrsg. von K. Hensel. I. Bd. Leipzig 1901. xvi u. 509.

G. Wertheim, Anfangsgründe der Zahlenlehre. Braunschweig 1902. xii u. 427. (Populäre Darstellung.)

P. L. Tschebyscheff, Elemente der Zahlentheorie. (Theorie der Kongruenzen.) Russisch 1889. Dtsch. von H. Schapira. Neue Asg. Berlin 1902. xvii u. 314 u. 32. gr. 8.

P. Cazzaniga, Gli elementi della teoria dei numeri. Padova 1903. viii u. 408.

P. Bachmann, Analytische Zahlentheorie. Encykl. d. math. Wissensch. I C **3**, 636—674. Leipzig 1900. (Historisch-bibliographisch.)

P. Bachmann, Niedere Zahlentheorie. I. Leipzig 1902. x u. 402.

T. J. Stieltjes, Sur la théorie des nombres. Étude bibliographique. Ann. Fac. Toulouse **4**, 1—103, 1890. Sonderabdruck. Paris 1895.

St. Smith, Reports of the theory of numbers. Rep. Brit. Ass. 1859—65. Coll. Math. Pap. I, 38, 93, 163, 229, 263, 289.

§ 3. **Zahlkörper.** Den Schriften über den Zahlbegriff, welche in Teil II, Abschn. 1, § 4 (S. 50 flg.) genannt worden sind, haben wir hier noch folgende hinzuzufügen. Die Einführung der imaginären Zahlen in die Zahlentheorie verdanken wir

K. F. Gauß, Theoria residuorum biquadraticorum commentatio prima et secunda. Werke 2, 65 u. 93. (In diesen Abhandlungen liegt der Keim der Theorie der algebraischen Zahlkörper.)

Dav. Hilbert, Die Theorie der algebraischen Zahlkörper. Bericht in Jhrsb. d. Dtsch. Math. Ver. 4, 1—xviii, 175—546, 1897. (Historisches.)

P. G. Lejeune-Dirichlet, Untersuchungen über die Theorie der complexen Zahlen. J. f. Math. **22**, 375—379. 1841 u. Abh. Ak. Berlin 1841, 141—161.

E. E. Kummer, Zur Theorie der complexen Zahlen. J. f. Math. **35**, 319—327, 1847. — Über die Zerlegung der aus Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen in ihre Primfaktoren ib. 327—368.

G. Zolotareff, Théorie des nombres entiers complexes, avec une application au calcul intégral. St. Petersburg 1874.
C. G. Reuschle, Tafeln complexer Primzahlen, welche aus Wurzeln der Einheit gebildet sind. Berlin 1875.
R. Dedekind, Sur la théorie des nombres entiers algébriques. Paris 1877.
R. Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen. Braunschw. 1872; 2. Aufl. 1892. VII u. 24. 3. Aufl. 1905.
K. Weierstraß, Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Größen. Nachr. Ges. Gött. 1884, 395—519.
R. Dedekind, Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Größen. Nachr. Ges. Gött. 1885, 141—159.
L. Kronecker, Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen. Festschrift. Berlin 1882; J. f. Math. **92**, 1—123, 1881.
L. Kronecker, Über den Zahlbegriff. J. f. Math. **101**, 337—355, 1887.
O. Stolz, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik. Nach den neueren Ansichten bearbeitet. I. T. Allgemeines und Arithmetik der reellen Zahlen. Leipzig 1885. II. T. Arithmetik der complexen Zahlen. 1886. VIII u. 326.
P. Bachmann, Vorlesungen über die Natur der Irrationalzahlen. Leipzig 1892. X u. 121.
G. Landsberg, Untersuchungen über die Theorie der Ideale. Diss. Breslau 1890. 58 S.
Dav. Hilbert, Theorie der algebraischen Zahlkörper. Encykl. d. math. Wiss. I C 4a, 675—698. 1898. Theorie des Kreiskörpers. ib. 699—714.
H. Weber, Theorie der Abelschen Zahlkörper. Acta math. **8**, 193—263, 1885; **9**, 105—130, 1886.
H. Minkowski, Geometrie der Zahlen. Lfr. 1. Leipzig 1896. 240 S.
U. Minkowski, Diophantische Approximationen. Eine Einführung in die Zahlentheorie. Leipzig 1907. VIII u. 236.
J. Sommer, Vorlesungen über Zahlentheorie. Einführung in die Theorie der algebraischen Zahlkörper. Leipzig 1907. VI und 361.

§ 4. **Zerlegung der Zahlen. Potenzreste** Die Lehre von der Teilbarkeit der Zahlen und von den Potenzresten verdanken wir L. Euler. Seine zahlreichen Abhandlungen sind in den Comm. Ac. Petr. und Nov. Comm. Ac. Petr. enthalten. Wir nennen von ihnen:

L. Euler, Demonstratio theorematis Fermatiani, omnem numerum primum formae $4n + 1$ esse summam duorum quadratorum. Nov. Comm. Ac. Petr. **5,** 1754/5, 3—58. — De partitione numerorum in partes tam numero quam specie datas. ib. **14**, I, 1769, 168. — Theoremata circa residua ex divisione potestatum relicta, ib. **7**, 195 8/7, 45. S. auch seine Opuscula analytica und seine Opera minora (oben S. 16).
O. Baumgart, Über die quadratischen Reciprocitätsgesetze. Eine vergleichende Darstellung der Beweise des Fundamentaltheorems in der Theorie der quadratischen Reste und der denselben zu Grunde liegenden Principien. Z. Math. Phys. **30**, M. Abt. 169—236, 241—277. 1885. (Historisch-kritisch.)
T. Pepin, Étude historique sur la théorie des résidus quadratiques. Mem. Acc. Lincei Roma **16**, 220—276, 1900.
H. Konen, Geschichte der Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$. Leipzig 1901. V u. 132.
D. Gambioli, Memoria bibliografica sull' ultimo teorema di Fermat. Period. di mat. (2) **3**, 145—192, 1902. [$x^n + y^n = z^n$ für $n > 2$ unmöglich.]

Von Originalarbeiten seien genannt:

K. F. Gauß, Theorematis fundamentalis in doctrina de residuis quadraticis demonstrationes et ampliationes novae. Gotting. 1817. Werke **2**, 59—64. — Theoria residuorum biquadraticorum. Comm. I. Gotting. 1828.
A. M. Legendre, Recherches sur quelques objets d'analyse indéterminée et

particulièrement sur le théorème de Fermat. Mém. Inst. Paris (2) **6**, ann. 1823, 1—60. 1827.

A. L. Cauchy, Mémoire sur la théorie des nombres. Mém. Inst. Paris (2) **17**, 249—768. 1840.

P. G. Lejeune-Dirichlet, Démonstration d'une propiété analogue à la loi de réciprocité qui existe entre deux nombres premiers quelconques. J. f. Math. **9**, 379—389. 1832.

E. E. Kummer, De residuis cubicis disquisitiones nonnullae analyticae. Breslau 1842.

P. G. Lejeune-Dirichlet, Recherches sur les formes quadratiques à coefficients et à indéterminées complexes. J. f. Math. **24**, 241—372, 1842.

E. Schering, Bestimmung des quadratischen Rest-Charakters. Abh. Ges. Gött. **24**, 1879. 48 S.

C. F. Degen, Codex Pellianus, sive Tabula simplissimam aequationis celebratissimae $y^2 = ax^2 + 1$ solutionem, pro singulis numeri dati valoribus ab 1 usque ad 1000 in numeris rationalibus iisdemque integris exhibens, Kjöbnh. 1817.

Aus der Literatur über die Primzahlen:

J. P. Gram, Undersögelser angaaende maengden af primtal under en given graense. Kjöbnh. 1884. Résumé en français. Skrift. Kjöbnh. (6) **2**, 185—308. 1884. (Sorgfältige Bibliographie. Tafeln der reziproken Potenzen, Werte zahlentheoretischer Funktionen, Primzahltafeln bis 10000.)

B. Riemann, Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze. Monatsb. Ak. Berlin 1859. Werke, 2. Aufl. 145—153. Frz. v. Laugel. Paris 1895.

E. Meißel, Über die exakte Bestimmung der Primzahlmenge innerhalb gegebener Grenzen. Pr. Iserlohn 1869. — Über die relative Menge gewisser Formprimzahlen innerhalb beträchtlicher Zahlenräume. Pr. Kiel 1884.

P. Seelhoff, Prüfung größerer Zahlen auf ihre Eigenschaft als Primzahlen. Amer. J. of math. **7** u. **8**, 1885. 19 S.

J. Perott, Remarques au sujet du théorème d'Euclide sur l'infinité du nombre des nombres premiers. Amer. J. of math. **11**, 99—138, 1888; **13**, 235—308, 1891. (Anwendung der Gruppentheorie auf die Zahlkörper.)

§ 5. **Faktorentafeln, Primzahltafeln.** Die erste größere Faktorentafel (bis 24000) findet sich bei

I. H. Rahn, Teutsche Algebra. Zürich 1659. 4; engl. übers. von Th. Branker 1668, wo diese Tafel bis 100000 fortgesetzt ist.

J. H. Lambert, Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendungen. II. Über Teilung und Teiler der Zahlen. Berlin 1770 (bis 102000).

J. Ch. Burckhardt, Table des diviseurs pour tous les nombres du deuxième million, ou plus exactement depuis 1020000 à 2028000 avec les nombres premiers, qui s'y trouvent. Paris 1814 112 S. fol. . . . Depuis 2028000 à 3036000. ib. 1816. 112 S. . . . Depuis 1 à 1020000. ib. 1817. 114 S.

J. M. Zacharias Dase, Faktoren-Tafeln für alle Zahlen der 7., 8., 9. Million. Hamburg 1862—65. (Die der 4., 5., 6. Million als Manuskript bei der Berliner Akademie.)

P. Barlow, Tables of squares, cubes, square roots, cube roots, reciprocals of all integer numbers up to 10000. London 1814. Ster.-Ed. 1852.

K. G. J. Jacobi, Canon arithmeticus, sive tabulae, quibus exhibentur pro singulis numeris primis vel primorum potestatibus infra 1000 numeri ad datos indices et indices ad datos numeros pertinentes. Regiomont. 1839. 4°.

G. v. Vega, Tafel der Primfactoren der Zahlen von 1 bis 16397, Tafel der 4. bis 8. Potenzen der Zahlen von 1 bis 100, Tafel der 2. und 3. Potenzen der Zahlen von 1 bis 1000, Tafel der 2. und 3. Wurzeln der Zahlen von 1 bis 1000. Ausgearb. von W. Matzka. Wien 1838. gr. 8.

G. v. Vega, Sammlung mathematischer Tafeln. Als neue und völlig umgearbeitete Auflage von dessen größeren logarithmisch-trigonometrischen Tafeln. Herausg. von J. A. Hülsse. Ster.-Ausg. Leipzig 1840. 2. Abdr. 1849.
Fr. Schaller, Primzahl-Tafel von 1 bis 10 000. Berlin 1855; 2. Aufl. 1869.
B. Goldberg, Primzahl- und Faktorentafeln von 1 bis 251 647. Leipzig 1862.
J. Ph. Kulik, Tafel der einfachen Faktoren aller Zahlen unter einer Million. Graz 1825. — — Tafeln der Quadrat- und Kubikzahlen aller natürlichen Zahlen bis 100 000, nebst ihrer Anwendung auf die Zerlegung großer Zahlen in ihre Faktoren. Leipzig. 1848, VII u. 460.
J. Blater, Tafel der Viertelquadrate aller Zahlen von 1 bis 200 000. Wien 1887. XVI u. 205.
J. W. L. Glaisher, Factor Tables for the 4th., 5th., 6th. million. London 1879—83.
A. L. Crelle, Rechentafeln. Mit einem Vorwort von C. Bremiker. 9. Aufl. Berlin 1904. x u. 452 S. 4°.
H. Zimmermann, Rechentafel nebst Sammlung häufig gebrauchter Zahlenwerte. Berlin. 5. Aufl. 1907. XXXIV u. 204.

§ 6. **Zahlensysteme.** Der Erste, der sich mit Zahlensystemen von einer anderen Basis als 10 beschäftigte, war

Joh. Caramuel, Mathesis biceps, vetus et nova. Campaniae 1670. Es werden hierin außer dem dyadischen Zahlensystem auch die Systeme mit den Grundzahlen 3 bis 10, 12 und 60 behandelt.
Erk. Weigel, Tetractys, summum tum arithmeticae, tum philosophiae discursivae compendium. Jenae 1672.
G. W. Leibniz, Explication de l'arithmétique binaire, qui se sert des seuls caractères *a* et *b*, Mém. Ac. sc. Paris a. 1703, p. 105. (Darin auch historische Notizen.)
Joh. Friedr. Weidler, Dissertatio de praestantia arithmeticae decadicae, quae tetracticam et duadicam antecellit. Vitemb. 1719.
G. F. Brander, Arithmetica binaria sive dyadica, oder die Kunst, nur mit 2 Zahlen in allen vorkommenden Fällen sicher und leicht zu rechnen. Augsb. 1767; 2. Aufl. 1775.
J. D. Colenne, Le système octaval, ou la numération et les poids et mesures réformés. Paris. Nouv. éd. 1845.
A. F. Pott, Die quinäre und vigesimale Zählmethode bei Völkern aller Weltteile. Halle 1847.
O. Byrne, Dual arithmetic. London 1864.
A. Mariage, Numération par huit. Paris 1857.
E. Ullrich, Das Rechnen mit Duodezimalzahlen. Pr. Midelberg 1891. 30 S. (Geschichte des Rechnens mit nicht-dekadischen Zahlensystemen.)
L. G. Du Pasquier, Zahlentheorie der Tettarionen. Diss. Zürich 1906. 76 S.

Eine Darstellung aller Primzahlen bis 2^{11} im dyadischen Zahlensystem:

O. Simony, Über den Zusammenhang gewisser topologischer Tatsachen mit neuen Sätzen der höheren Arithmetik und dessen theoretischer Bedeutung. Ber. Ak. Wien **96**, 191—286, 1887;
E. Suchanek, Dyadische Coordinaten der bis 100 000 vorkommenden Primzahlen zur Reihe der ungeraden Zahlen. Ber. Ak. Wien **103**, 443—610, 1894.

§ 7. **Unbestimmte Analytik.** Sie wurde zuerst eingehend behandelt von den Indern. In Europa ist der eigentliche Begründer der Methode der unbestimmten Analytik, desjenigen Teiles der höheren Arithmetik, der rationale, meist sogar ganze Zahlen finden läßt, die gegebenen Bedingungen Genüge leisten, der Kommentator Diophants, Bachet de Méziriac.

Cl. G. Bachet de Méziriac, Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres. Lyon 1612 u. 1624. 5e éd. par A. Labosne. Paris 1884. Abgekürzte Ausg. 1905. VI u. 163.

Diophanti Alexandrini arithmeticorum libri sex et de numeris multangulis liber unus. Ed. Bachet. Paris 1621; Neue Ausg. von S. Fermat 1670 (mit Bemerkungen von P. Fermat).

Eine ähnliche Methode zur Auflösung der unbestimmten Gleichungen gab

L. Euler, Vollständige Anleitung zur Algebra. 2 Bde. Petersburg 1770. Hrsg. von Grüson. Berlin. II. 1797. Abschn. 2: Von der unbestimmten Analytik, S. 163—403. (Die schon oben (S. 58) erwähnten Zusätze zu Eulers Elementen der Algebra von J. L. Lagrange beziehen sich ebenfalls auf die unbestimmte Analytik.)

J. L. Lagrange, Solution d'un problème d'arithmétique. Mél. Tur. **4**, 1766—69, 44 ff.

J. L. Lagrange, Sur la solution des problèmes indéterminés du second degré. Mém. Ac. Berlin **23**, a. 1767 [1769], 165—310. — Nouvelles méthodes pour résoudre les problèmes indéterminés en nombres entiers. ib. **24**, a. 1768 [1770], 181—250. — Über die Lösung der unbestimmten Probleme 2. Grades. 1768. Dtsch. von Netto. Klass. d. ex. Wiss. 146. Leipzig 1904. 131 S.

Eine weitere Entwicklung wurde gegeben in den oben (S. 78) genannten Werken von Legendre und Gauß. Ferner in:

A. Goepel, De aequationibus secundi gradus indeterminatis. Diss. Berlin 1835.

C. A. W. Berkhan, Lehrbuch der unbestimmten Analytik. 2 T. Halle 1855—56.

J. Heger, Auflösung eines Systems von unbestimmten Gleichungen ersten Grades in ganzen Zahlen. Wien 1856.

E. Desmarest, Traité d'analyse indéterminée du 2e degré à deux inconnus. Paris 1852.

E. Lucas, Recherches sur l'analyse indéterminée et l'arithmétique de Diophante. Moulins 1873.

A. C. W. H. Scheffler, Die unbestimmte Analytik. 2 T. Hannover 1854.

K. Weihrauch, Die Anzahl der Lösungen diophantischer Gleichungen bei teilfremden Coefficienten. Z. Math. Phys. **20**, 97—111, 1875.

J. Hermes, Gleichungen ersten und zweiten Grades schematisch aufgelöst in ganzen Zahlen. Leipzig 1882. 87 S.

§ 8. **Magische Quadrate. Mathematische Belustigungen.** Die Beziehung zwischen geometrischer Form und arithmetischer Anordnung kann sowohl der Kombinationslehre wie der Zahlentheorie eingereiht werden. Den einfachsten Fall bilden die magischen Quadrate. Es handelt sich um die Aufgabe, alle ganzen positiven Zahlen von 1 bis n^2 so in die n^2 Felder eines quadratischen Schachbrettes einzutragen, daß alle Vertikalreihen, alle Horizontalreihen und beide Diagonalen dieselbe Summe ergeben. Moschopulos schrieb um 1300 ein Werk über das magische Quadrat.

Historische Studien über die magischen Quadrate enthält:

S. Günther, Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Leipzig 1876. VIII u. 352. Kap. IV, S. 188—270.

Außer den in § 7 genannten Problèmes von Bachet de Méziriac sind zu nennen:

Ath. Kircher, Arithmologia sive de abditis numerorum mysteriis. Romae 1635. 301 S. 4° (Magische Quadrate. Historisches).

L. L. P. Ons-en-Bray, Méthode facile pour faire telles quarrées magiques que l'on voudra. Mém. Ac. sc. Paris 1750. Mém. **241**, 363.

Corn. Capito, Alle magischen Quadrattafeln zu verfertigen. Glückstadt 1767. 8 Bgn. 8°.
L. Euler, De quadratis magicis. Opera posth. **1**, 140—151. 1849. Comment. arithm. **2**, 593—602, 1862. — Recherches sur une nouvelle espèce de carrés magiques. Verhand. Genootsch. Vlissingen, **9**, 85—239, 1782. Comment. ar. **1**, 302—361, 1849.
K. B. Mollweide, De quadratis magicis commentatio. Leipzig 1816.
T. Hugel, Die magischen Quadrate, mathematisch behandelt und bewiesen. Ansbach 1859.
B. Violle, Traité complet des carrés magiques. 2 v. Paris 1838.
M. Frolov, Les carrés magiques. Nouv. étude, suivie de Notes de MM. Delannoy et Éd. Lucas. Paris 1886. gr. 8.
H. Scheffler, Die magischen Figuren. Allgemeine Lösung und Erweiterung eines aus dem Altertume stammenden Problems. Leipzig 1882. III u. 112.
Massip, Les carrés magiques. Mém. Ac. Toulouse (9) **4**, 423—454, 1892. (Zum Teil historisch.)
F. Latoon, On common and perfect magic squares. With examples. London 1896. 140 S.
P. A. Mac Mahon, Les carrés magiques. Rev. scient. (4) **17**, 744—751, 1902. (Großenteils historisch.)
Dan. Schwenter, Deliciae mathematicae, oder mathematische und philosophische Erquickstunden. Nürnberg 1636. 574 S. 2. Aufl. 1651. Fortsetzung durch **Phil. Harsdörffer,** ib. 1651, 1653. 620 u. 660 u. Register.
J. Ozanam, Récréations mathématiques et physiques. Paris 1694. Zahlreiche neue Auflagen.
Guyot, Nouvelles récréations physiques et mathématiques. Paris 1769; 3 v. 1772—74, 1799, 1810. Dtsch. Augsburg. 7 T. 1772—77.
E. Lucas, Récréations mathématiques. 4 v. Paris 1892—94; 2. Aufl. I, 1893; II, 1896, 247 S.; III, 1893; IV, 1894.
W. W. Rouse Ball, Mathematical recreations and problems at past and present times. 3. ed. London 1896, 288 S. u. später. Franz. von Fitz-Patrik. Paris 1898. IV u. 352. 2ᵉ éd. 1907—1908.
E. Lucas, L'arithmétique amusante. Introduction aux Récréations mathématiques. Amusements scientifiques pour l'enseignement et la pratique du calcul. Paris 1895. VIII u. 266.
W. Große, Unterhaltende Probleme und Spiele in mathematischer Beleuchtung. Leipzig 1897. V u. 252.
J. Vinot, Récréations mathématiques. Nouveau recueil de questions curieuses et utiles extraites des auteurs anciens et modernes. Paris 4ᵉ éd. 1898. VIII u. 215.
E. Fourrey, Récréations arithmétiques. Paris 1899. VIII u. 263.
H. Schubert, Mathematische Mußestunden. Eine Sammlung von Geduldspielen, Kunststücken und Unterhaltungsaufgaben. 2. Aufl. 3 Bde. Leipzig 1900. VIII u. 199, IV u. 247, III u. 265.
W. Ahrens, Mathematische Unterhaltungen und Spiele. Leipzig 1901. X u. 428. (Auch Literatur.) — Mathematische Spiele 1907. VI u. 118.
L. Pfaundler, Das chinesisch-japanische Go-Spiel. Leipzig 1908. VI u. 74.
W. Ahrens, Mathematische Spiele. Encycl. d. math. Wiss. I, 1080—1093. 1902. In d. frz. Ausg. bearb. von E. Maillet. I, 3, 62—75, 1906. (Historisches und Bibliographisches.)
A. v. d. Linde, Geschichte und Literatur des Schachspiels. 2 T. Berlin 1874.
G. W. Hemming, Billards mathematically treated. London 1899. 46 S.

§ 9. **Kreisteilungsgleichungen.** Die binomischen Gleichungen $x^n - 1 = 0$, deren Wurzeln (n^{te} Einheitswurzeln) durch n äquidistante Punkte eines Kreises geometrisch dargestellt werden können, heißen des-

halb Kreisteilungsgleichungen. Ihre Theorie wird in den Lehrbüchern der Algebra und denen der Zahlentheorie abgehandelt. Ausführliche Literatur gibt:

P. G. H. Bachmann, Die Lehre von der Kreisteilung und ihre Beziehungen zur Zahlentheorie. Leipzig 1872. XII u. 300.

K. G. C. v. Staudt, Möglichst einfache Entwicklung des Gaußschen Theorems, die Teilung des Kreises betreffend. Pr. Würzburg 1825.

F. Arndt, Einfacher Beweis für die Irreducibilität der Gleichungen in der Kreisteilung. Berlin 1857.

N. Fialkowski, Teilung des Winkels und des Kreises. Wien 1860.

F. Tano, Intorno alle equazioni binomie. Palermo 1881.

P. Biehler, Sur les équations auxquelles conduit le problème de la division des arcs en trigonométrie. Nouv. Ann. (3) **8**, 552—563, 1889. — Sur les équations binômes. ib. (3) **9**, 472—476, 1890. Beides auch Paris 1891.

U. Scarpis, Il problema della divisione della circonferenza esposto elementarmente. Savona 1891. 72 S.

§ 10. **Zahlentheoretische Formen.** Die Theorie der quadratischen Formen ist von C. F. Gauß, Disquisitiones arithmeticae (s. S. 76) Sect. 5 begründet worden.

L. A. Seeber, Mathematische Abhandlungen. Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischer Formen. Freiburg 1831. — **C. F. Gauß,** Zusätze zu Seebers Werke über die ternären quadratischen Formen. Gött. Anz. 1831.

G. Lejeune Dirichlet, Untersuchungen über die Theorie der quadratischen Formen. Abh. Ak. Berlin 1833, 101—121.

G. Lejeune Dirichlet, Recherches sur les diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres. J. f. Math. **19**, 324, 1839; **20**, 1 u. 134, 1840. 80 S. Dtsch. hrsg. von R. Haußner, Ostw. Klass. d. ex. Wiss. Nr. 91. Leipzig 1897. 118 S. kl. 8°.

G. Lejeune Dirichlet, Recherches sur les formes quadratiques à coefficients et à indéterminées complexes. J. f. Math. **24**, 291—371, 1842.

G. Lejeune Dirichlet, Über die Reduktion der positiven quadratischen Formen mit drei unbestimmten ganzen Zahlen. J. f. Math. **40**, 209—229, 1850.

G. Eisenstein, Tabelle der reduzierten positiven ternären quadratischen Formen nebst den Resultaten neuer Forschungen über diese Formen in besonderer Rücksicht auf ihre tabellarische Rechnung. J. f. Math. **41**, 141—227, u. Berlin 1851. 66 S. 4°.

Ch. Hermite, Sur la théorie des formes quadratiques ternaires indéfinies. J. f. Math. **47**, 307—313, 1854. — Sur la théorie des formes quadratiques. 2 Mém. ib. 313—369, 1854.

F. Arndt, Zur Theorie der binären kubischen Formen. Berlin 1855.

F. Arndt, Über die Anzahl der Genera der quadratischen Formen. Berlin 1857.

K. Weierstraß, Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen. Monatsb. Ak. Berlin 1868, 310—338. **L. Kronecker,** Bemerkungen dazu: ib. 339—346.

Ed. Selling, Über die binären und ternären quadratischen Formen. J. f. Math. **77**, 143—229, 1874; u. J. math. p. appl. (3) **3**, 21—61, 153—107, 1877.

A. Korkine et **G. Zolotareff,** Sur les formes quadratiques. Math. Ann. **2**, 366—390, 1873; **11**, 242—292, 1877.

L. Charve, De la réduction des formes quadratiques ternaires positives et de son application aux irrationnelles du troisième degré. Ann. Ec. Norm. (2) **9**, Suppl. 1880. 156 S. (Viel Historisches.)

L. Kronecker, Über bilineare Formen mit vier Variabeln. Abh. Ak. Berlin 1884.

H. J. S. Smith, Mémoire sur la représentation des nombres par des sommes de cinq carrés. Mém. prés. sav. étr. Ac. Paris (2) **29**, Nr. 1. 1887. 72 S.

H. Minkowski, Mémoire sur la théorie des formes quadratiques à coefficients entiers. Mém. prés. sav. étr. Ac. Paris (2) **29**, Nr. 2. 1887. 180 S.
A. Mayer, Über die Klassenanzahl derjenigen ternären quadratischen Formen, durch welche die Null rational darstellbar ist. J. f. Math. **98**, 177—231. 1885.
Ph. Furtwängler, Zur Theorie der in Linearfaktoren zerlegbaren ganzzahligen ternären kubischen Formen. Diss. Göttingen. 1896. 64 S.
F. Klein, Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie. I. Vorles. 1895/96. Ausg. von A. Sommerfeld. Autogr. Göttingen 1896. v u. 391. II. Vorl. 1896. Ausg. von A. Sommerfeld u. Ph. Furtwängler. 1897. 354 S. III. Math. Ann. **48**, 562—587. 1896. Leipzig.
P. Bachmann, Die Arithmetik der quadratischen Formen. I. Abt. Leipzig 1898. xvi u. 668. (Der Zahlentheorie IV. Teil.)

Abschnitt V. Niedere Analysis.

Einleitung. Wir haben als Überschrift zu diesem Abschnitt, der die Kombinationslehre, die Wahrscheinlichkeitsrechnung mit der Methode der kleinsten Quadrate, die Reihen, die Interpolation und die Kettenbrüche umfassen wird, den Namen „Niedere Analysis" gewählt, im Gegensatz zur Infinitesimal-Analysis und Funktionentheorie, welche den Gegenstand des VI. Abschnittes bilden. Wir hätten auch als Überschrift zu unserm Abschnitt „Algebraische Analysis" sagen können, eine Bezeichnung, die sich seit dem Erscheinen von Cauchys gleichnamigem Werke (1821) eingebürgert hat.

Kapitel 1. Kombinationslehre.

Die Anfänge der Kombinationslehre (Würfe mit Würfeln, Verbindungen, Variationen) finden sich schon bei Tartaglia und Cardano. Auch bei
Joh. Buteo, Logistica in quinque libros digesta. Lugduni. 1559.
Franz van Schooten, Exercitationum mathematicarum libri quinque. Lugd. Bat. 1657. 4°.

Als älteste Abhandlungen über Kombinationslehre sind zu nennen:
P. Guldin, Problema arithmeticum de rerum combinationibus. Viennae 1622. 4.
Blaise Pascal, Traité du triangle arithmétique. (Op. posth.) Paris 1665, schon 1654 vollendet. Oeuvres Paris 1880, **3**, 243.

Weitere Ausbildung erfuhr die Theorie durch:
G. W. Leibniz, Dissertatio de arte combinatoria, cum appendice. Lipsiae 1668. 4; 2. Ausg. Francof. 1690. Math. Schriften, hrsg. von C. J. Gerhardt, V, 14.
B. Frénicle de Bessy, Abrégé des combinaisons. Paris 1693.
Jakob Bernoulli, Ars conjectandi. (Posth.) Herausg. von Nicolaus I Bernoulli. Basileae 1713. Frz. von L. G. F. Vastel, Caen. An X.
L. Euler, Observationes analyticae variae de combinationibus. Comm. Ac. Petrop. **13**, 1741—43, 64—93 [1751].
Fr. Maseres, The doctrine of permutations and combinations, being an essential part of the doctrine of chances. With many tables. London 1795. 606 S. r. 8°. Enthält eine Sammlung von Aufsätzen über Kombinationslehre, u. a.

Jac. Bernoullis Doctrine of permutations and combinations, einen Auszug aus dem Werke De arte combinatoria, ferner Abhandlungen von Simpson, Wallis, Dodson, Maseres, Hutton u. a.
K. Fr. Hindenburg, Novi systematis permutationum, combinationum et variationum primae lineae. Lipsiae 1781. 4°.
K. Fr. Hindenburg, Sammlung kombinatorisch-analytischer Abhandlungen. Leipzig 1796—1800. 2 Bde 8°. Abh. **2**, 1800, p. 263.
J. C. Weingärtner, Lehrbuch der kombinatorischen Analysis. 2 T. Leipzig 1800—1801.
K. Fr. Hindenburg, Über kombinatorische Analysis und Derivationskalkül. Leipzig 1805.
F. F. Schweins, Analysis, kombinatorisch behandelt. Heidelberg 1820.
A. v. Ettingshausen, Die kombinatorische Analysis. Wien 1826.
L. Öttinger, Lehre von den Kombinationen. Freiburg 1837.
J. F. C. Hessel, Eigentümliche, leicht faßliche, in systematischem Zusammenhang stehende Beweise bekannter wichtiger Sätze aus der Kombinationslehre. Arch. Math. Phys. (1) **7**, 295—304, 1846.
L. Öttinger, Über den Begriff der Kombinationslehre und der Bezeichnung in derselben und einige neue Sätze über die Kombinationen mit beschränkten Wiederholungen. Arch. Math. Phys. (1) **15**, 241—314, 1850.
E. Jablonski, Théorie des permutations et des arrangements circulaires complèts. J. math. p. appl. (4) **8**, 331—349, u. Paris 1892.
H. Staudacher, Lehrbuch der Kombinatorik. Ausführliche Darstellung der Lehre von den kombinatorischen Operationen (Permutieren, Kombinieren, Variieren). Stuttgart 1892. VII u. 298. 8°.
E. Netto, Kombinatorik. Encycl. d. math. Wiss. I, 28—46, Leipzig 1900. Ed. frz. I, 63—88. (Exposé p. H. Vogt.) 1904.
E. Netto, Lehrbuch der Kombinatorik. Leipzig 1901. VIII u. 260.
H. Schubert, Niedere Analysis. I. T. Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Kettenbrüche und diophantische Gleichungen. Leipzig, Sammlung Göschen. 1902. V u. 181. 8°.

Die Kombinationslehre findet ihre Anwendung auf eine Reihe mathematischer Unterhaltungen und Spiele, von denen im vorigen Abschnitte (s. o. Kap. 1, S. 82) die Rede war. Auch die Aufgaben des Schachspiels gehören dorthin; zugleich auch in die sogenannte Analysis situs. Die erste Mitteilung seiner Idee einer Analysis situs, „welche unmittelbar den situs ausdrückt, wie die Algebra die magnitudo", machte Leibniz in einem Briefe an Huygens vom 8. September 1679 (Math. Schriften, hrsg. von C. J. Gerhardt, Abt. I, Bd. III, Berlin 1850). Dann folgte die Abhandlung von

G. W. Leibniz, Annotatio de quibusdam ludis, imprimis de ludo quodam sinico etc. Misc. Berol. 1710.
L. Euler, Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. Comm. Ac. Petrop. a. 1736, **8**, 126—140 [1741]. Frz. von Coupy, Nouv. Ann. **10**, 106—119, 1851. (Aufgabe der 7 Brücken.)
L. Euler, Solution d'une question curieuse, qui ne paraît soumise à aucune analyse, sur la marche du cavalier sur l'échiquier. Hist. Mém. Ac. Berl. **15**, a. 1759, 310—359 [1766].
Ch. A. Vandermonde, Remarques sur les problèmes de situation. Mém. Ac. sc. Paris 1771, 566. (Rösselsprung.)
C. M. Collini, Solution du problème du cavalier au jeu des échecs. Mannheim. 1773. 60 S. 8°.

Kapitel 2. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Methode der kleinsten Quadrate.

§ 1. **Einleitung.** Durch dieselben kombinatorischen Probleme veranlaßt begründeten Pascal und Fermat die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Der darauf bezügliche Briefwechsel zwischen beiden findet sich in Oeuvres mathématiques et philosophiques de Blaise Pascal, p. Bossut, 2[e] éd. par Lefévre Paris 1819, t. 4 u. in den Oeuvres de Fermat, II. Paris 1894. Fast zu derselben Zeit, wo Pascal seinen oben (S. 84) genannten Traité du triangle arithmétique schrieb, verfaßte Chr. Huygens seine Schrift De ratiociniis in ludo aleae, die als Anhang zu Schootens Exercitationum mathematicarum libri quinque 1657 Lugd. Bat. erschien. In dieser Schrift ist der Fundamentalsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung enthalten.

§ 2. **Ältere Schriften über Wahrscheinlichkeit.** Huygens Abhandlung wurde mit Kommentar abgedruckt in dem ersten Teil des schon oben (S. 84) genannten epochemachenden Werkes von

Jac. Bernoulli, Ars conjectandi. Basil. 1713. Dtsch. übers. u. hersg. von R. Haußner. Leipzig. Ostwalds Klass. d. ex. Wiss. Nr, 107 u. 108. 1899. 162 u. 172 S. kl. 8. Der zweite Teil enthält die Kombinationslehre, der dritte Lösungen von Problemen über Wahrscheinlichkeit, der vierte Anwendungen der Theorie auf Fragen der Moral und Politik.

Abraham de Moivre, De mensura sortis s. de probabilitate eventuum in ludis a casu fortuito pendentibus, Phil. Trans. London 1711.

Abraham de Moivre, The doctrine of changes or a method of calculating probabilities of events in play. London 1718. 4, auch 1738, 1756. Mit der letzten Ausgabe wurde vereinigt:

Abraham de Moivre, Evaluation of annuities of lives, with several tables exhibiting at one view the values of liver for several rates of interest. London 1724, 1742, 1756. Dtsch: Abhandlung über Leibrenten. Von Em. Czuber. Wien 1906. 88 S.

Für das Bernoullische Prinzip der moralischen Hoffnung:

Daniel Bernoulli, Specimen theoriae novae de mensura sortis, Com̃. Ac. Petrop. **5,** a. 1730/31, 175—192. [1738]; Dtsch. mit Anm. von A. Pringsheim, Die Grundlagen der modernen Wertlehre. Leipzig 1896. 60 S. 8.

Dan. Bernoulli, Disquisitiones analyticae de novo problemate conjecturandi. Nov. Comm. Ac. Petrop. **14** P. I. a. 1769. Mem. 3. [1770].

Dan. Bernoulli, Dijudicatio maxime probabilis plurium observationum discrepantium. Acta Ac. Petrop. **1,** P. I, a. 1777, 3—23. [1778].

Die Bedeutung des arithmetischen Mittels bei Bestimmung des wahrscheinlichen Wertes zeigten:

Thomas Simpson, On the advantage of taking the mean of a number of observations in practical astronomy. Phil. Trans. London **49**, 82—93. 1755.

J. L. Lagrange, Mémoire sur l'utilité de la méthode de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations. Mém. Ac. Tur. **5**, 167—232, 1770/3.

Die Prinzipien der Wahrscheinlichkeit der Ursachen, aus der Beobachtung abgeleitet:

Th. Bayes, Au essay towards solving a problem in the doctrine of chances. (Posth.) Ed. R. Price. Phil. Trans. Lond. **53**, 370, 1763.

P. S. Laplace, Mémoire sur la probabilité des causes par les événemens. Mém. prés. Ac. sc. Paris **6**, 621. 1774.

P. S. Laplace, Mémoire sur les suites récurro-récurrentes et sur leurs usages dans la théorie des hazards. ib. p. 353.

P. S. Laplace, Mémoire sur l'intégration des équations différentielles et sur leur usage dans la théorie des hazards. ib. 7, a 1773, 37 [1776].

Die Lösung des Hauptproblems der aposteriorischen Wahrscheinlichkeit gab

N. C. de Condorcet, Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix. Paris 1785. U. d. T. Élémens du calcul des probabilités. Publ. p. Fayolle. Paris 1805.

Am wesentlichsten wurde die Wahrscheinlichkeitsrechnung gefördert durch das Werk von

P. S. Laplace, Théorie analytique des probabilités. Paris 1812, 1814, 3e éd. 1820. 4e supplém. 1825. (Erstes zusammenfassendes Lehrbuch.)

P. S. Laplace, Essai philosophique sur les probabilités. Paris 1814, 5e éd. 1825. 6e éd. 1840. (Einleitung aus dem großen Lehrbuch.)

Für die historische Entwickelung der Wahrscheinlichkeitsrechnung bis zu Laplaces Zeiten ist zu nennen:

I. Todhunter, A history of the mathematical theory of the probability, from the time of Pascal to that of Laplace. London 1865.

und für die Geschichte auch der neueren Zeit:

Em. Czuber, Die Entwickelung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen. Jahresb. d. Dtsch. Math. Ver. VII, 2, 1899. VIII u. 279.

§ 3. **Neuere Lehrbücher über Wahrscheinlichkeitsrechnung.** Die neueren Werke über die Theorie der Wahrscheinlichkeit enthalten meist auch die Literatur und Geschichte dieser Disziplin. Als Studienwerke mögen hier genannt werden:

G. Hagen, Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin. 1837 u. 1867. 3. Aufl. 1882. (Besonders für Techniker.)

H. Laurent, Traité du calcul des probabilités. Paris 1873. 268 S.

J. Bertrand, Calcul des probabilités. Paris 1889. LVII u. 332. gr. 8°.

A. Meyer, Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung. Deutsch bearbeitet von E. Czuber. Leipzig 1879. 554 S.

H. Poincaré, Calcul des probabilités. Leçons réd. p. A. Quiquet. Paris 1896. 280 S.

E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung. Encykl. d. math. Wiss. I, D, **1**, 733—767. 1899. Calcul des probabilités. Exposition par J. Le Roux. Encycl. d. sc. math. I, D, **1 : 4**, 1—46. Paris 1906.

E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. Leipzig 1903. XIV u. 593. [2. Aufl. unter der Presse.]

H. Bruns, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre. Leipzig 1906. VIII u. 310 u. Anhang 18 S.

§ 4. **Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.** Die soeben angeführten Lehrbücher, besonders das zuletzt genannte, enthalten Anwendung der Theorie der Wahrscheinlichkeit auf mathematische Statistik, Lebensversicherung, Nationalökonomie, Ausgleichungsrechnung und Methode der kleinsten Quadrate. Für diese Anwendungen müssen wir neben neueren Werken auch einige ältere, historisch wichtige nennen.

Th. Simpson, The doctrine of annuities and reversions. London 1742; 2d. ed. 1775.



Fr. Baily, The doctrine of interest and annuities analytically investigated and explained. London 1808.
Joh. Nic. Tetens, Einleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften, die von dem Leben und Tode einer oder mehrerer Personen abhängen. Mit Tabellen zum praktischen Gebrauche. 2 Bde. Leipzig 1785—86. 604 u. 302 S.
W. Morgan, The doctrine of annuities and assurances of lives and survivorships. London 1779; 2d. ed. 1821.
M. Kanner, Allgemeine Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fragen der Statistik. Ann. ges. Versicherungswesens **1.** No. 20 bis 24. Berlin 1870.
W. Karup, Theoretisches Handbuch der Lebensversicherung. Leipzig 1871.
E. Béziat d'Audibert, Théorie élémentaire des assurances sur la vie et d'autres opérations viagères. Paris 2e éd. 1893. 204 S.
H. Laurent, Théorie et pratique des assurances sur la vie. Paris 1895. 176 S.
H. Laurent, Théorie des opérations financières. Paris 1898. 486 S.
C. Vivante, Traité théorique et pratique des assurances maritimes. Traduit, annoté et complété par V. Yseux. Paris 1898. 40 u. 564.
A. Meizen, Geschichte, Theorie und Technik der Statistik. 2. Aufl. Stuttgart 1903. x u. 240.
H. Westergaard, Die Lehre von der Mortalität und Morbilität. Anthropologisch-statistische Untersuchungen. 2. Aufl. Jena 1901. vii u. 703.
F. Virgilii e **C. Garibaldi,** Introduzione alla economia matematica. (Manuali Hoepli No. 281.) Milano 1899. xii u. 210.
L. v. Bortkewitsch, Das Gesetz der kleinen Zahlen. Leipzig 1898. vii u. 52.
L. v. Bortkewitsch, Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Stastistik: Enc. d. math. Wiss. 1, 821—851. Leipzig 1900.
O. Bohlmann, Lebensversicherungs-Mathematik. Enc. d. math. Wiss. **1,** 852—917. Leipzig 1900.
W. Großmann, Versicherungsmathematik. Leipzig 1902. vi u. 218.
A. Löwy, Versicherungsmathematik. Leipzig-Göschen 1903. 145 S.

§ 5. **Geometrische Wahrscheinlichkeit.** Die ersten Spuren einer geometrischen Wahrscheinlichkeit findet man in Buffons Nadelproblem:
G. Buffon, Essai d'arithmétique moral. Supplément à l'Histoire naturelle. Paris 1777; schon geschrieben 1760.

Dieses und ähnliche Probleme wurden auch behandelt in Laplaces Théorie analytique des probabilités 1812 (s. oben vor. S.) und in der neueren Zeit mit Hilfe der Integralrechnung, vor allem von
M. W. Crofton, Local probability and geometrical probability, Trans. R. Soc. Lond. **158,** 181—199, 1868.

Die erste zusammenfassende Darstellung mit Literatur gab:
E. Czuber, Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte. Leipzig 1884. vii u. 244.

§ 6. **Ausgleichungsrechnung und Methode der kleinsten Quadrate.** Die Ausgleichungsrechnung hat ihren Namen daher, daß sie die Widersprüche in der Ermittelung der Unbekannten ausgleichen will, die durch Beobachtungsfehler entstanden sind. Gauß stellte den Begriff des mittleren Fehlers auf und erfand 1795 die Methode der kleinsten Quadrate, welcher Legendre, der zu derselben Methode gelangte, den Namen gab. Die ältere Darstellung dieser Methode ist zu finden in:
C. Fr. Gauß, Theoria motus corporum coelestium 1800. Lib. II, sect. III (Werke Bd. VII). Ferner

C. Fr. Gauß, Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen. Ztschr. f. Astr. von Lindemann und Bohnenberger. **1**, 1816.

C. Fr. Gauß, Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae. Commentat. Soc. Gott. rec. **5**, 1819—1822, **6**, 1823—1827.

Der Studierende findet diese fundamentalen Arbeiten zusammengestellt in:

C. Fr. Gauß, Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate. In deutscher Sprache herausgegeben von A. Börsch und P. Simon, mit einem Vorworte von Prof. Helmert. Berlin 1887. 207 S.

C. Fr. Gauß, Méthode des moindres carrés. Mémoires sur la combinaison des observations. Trad. p. J. Bertrand. Paris 1855.

Eine Bibliographie der Methode der kleinsten Quadrate enthält

M. Merriman, List of writings relating to the method of least squares. Trans. Ac. Connecticut **4**, 151 sq. 1877. (408 Titel.)

Von Lehrbüchern seien hier folgende genannt:

F. R. Helmert, Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate mit Anwendung auf die Geodäsie und die Theorie der Meßinstrumente. Leipzig 1872. xi u. 348.

W. v. Freeden, Die Praxis der Methode der kleinsten Quadrate, für die Bedürfnisse der Anfänger bearbeitet. Braunschweig 1863.

E. Czuber, Theorie der Beobachtungsfehler. Leipzig 1891. xii u. 418. (Mit zahlreichen Literaturangaben.)

R. Henke, Über die Methode der kleinsten Quadrate. Leipzig. 5. Aufl. 1894. v u. 77. (Historisch-kritische Begründungen.)

M. Merriman, The method of least squares. New-York. 7d. ed. 1897. 326 S.

O. O. Forti, Il metodo dei minimi quadrati e la teoria degli errori. Milano 1890.

D. J. Bartlett, General principles of the method of least squares, with applications. Boston 2d ed. 1900. 142 u. 11 S.

O. Koll, Die Theorie der Beobachtungsfehler und die Methode der kleinsten Quadrate mit ihrer Anwendung auf die Geodäsie und die Wassermessungen. Berlin. 2. Aufl. 1900. xii u. 323 u. 31. (Für Techniker.)

J. Bauschinger, Ausgleichungsrechnung. (Methode der kleinsten Quadrate. Fehlertheorie.) Encykl. d. math. Wiss. **1**, 768—798. Leipzig 1901.

Kapitel 3. Reihen und Interpolation.

§ 1. **Einleitung.** Zahlenreihen kannten schon die Ägypter und Babylonier; Ägypter und Griechen aus der pythagoreischen Schule nahmen schon verschiedene Summierungen vor, Archimedes summierte unendliche geometrische Reihen, um Quadraturen der Parabel und Inhaltsbestimmungen der Körper zu finden, aber eine Theorie der unendlichen Reihen beginnt erst im 17. Jahrhundert. Hier sind zu nennen:

B. Cavalieri, Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota. Bologna 1635; 2. Aufl. 1653.

John Wallis, Arithmetrica infinitorum sive nova methodus inquirendi in curvilineorum quadraturam, aliaque difficiliora matheseos problemata. Oxoniae 1656.

Nic. Mercator, Logarithmotechnia sive methodus construendi logarithmos nova accurata et facilis. Cui accedit vera quadratura hyperbolae et inventio summae logarithmorum. London 1668.

W. Brouncker, The squaring of the hyperbola by an infinite series of rational numbers, together with its demonstration. Phil. Trans. R. Soc. London 1668.

Die universelle Einführung der unendlichen Reihen gebührt Is. Newton. Er legte seine Abhandlung: „De analysi per aequationes numero terminorum infinitas“, welche die erste Methode der Entwicklung gegebener

Funktionen in unendliche Reihen enthält und zuerst 1711 dann 1744 in der Opuscula Newtoni I, 3—28 erschien, schon 1669 Barrow vor. Schon in Wallis' Algebra 1685 wurde Newtons Verfahren auseinandergesetzt und in Newtons 1704 erschienener „Quadratura curvarum" sind für die Analysis wichtige Reihen enthalten. Wir verweisen hier im übrigen wegen der geschichtlichen Entwicklung auf:

R. Reiff, Geschichte der unendlichen Reihen. Tübingen 1889. 212 S.

A. Pringsheim, Irrationalzahlen und Konvergenz unendlicher Prozesse, Enz. d. math. Wiss. **1**, 49—146, u. Ergänzung: Unendliche Prozesse mit komplexen Termen. ib. **1**, 1121—1128. Leipzig 1898—1904. Expos. franc. p. J. Molk, I, 1, 133—270. 1904—1907.

§ 2. **Lehrbücher über algebraische Analysis.** Die Summation der elementaren arithmetischen und geometrischen Reihen findet man in einem jeden Lehrbuch der Elementar-Mathematik, besonders in der elementaren Arithmetik. Als das erste zusammenfassende Lehrbuch der unendlichen Reihen kann angesehen werden:

John Wallis, Treatise of algebra both historical and practical with some additional treatises. London 1685.

Ihm folgten 5 Abhandlungen von

Jacob Bernoulli, Propositiones arithmeticae de seriebus infinitis earumque summa finita. Basileae 1689, mit 4 Fortsetzungen: Propositionum arithmeticarum pars altera, 1692, tertia 1696, quarta 1698, quinta 1704. Opera omnia I, 373—402. 517—542, 745—764, 849—867, 955—975. Auch als Anhang zur Ars conjectandi, Basel 1713, S. 241—306 erschienen.

Später finden wir die Reihentheorie dargelegt in Lehrbüchern der algebraischen Analysis, auch in solchen über Differentialrechnung und über Funktionentheorie. Als erstes klassisches Lehrbuch der algebraischen Analysis ist zu nennen:

L. Euler, Introductio in analysin infinitorum. Lausannae. 2 vol. 4°, 1748; Lugduni 1797. Deutsch von Michelsen, 3 Teile. Berlin 1788—91; u. 1835—36; I. Teil deutsch von H. Maser. Berlin 1885. Frz. von Labey, Paris 2 v. an IV, V (1796, 1797); auch 1835. (Der erste Teil enthält die wichtigsten Probleme der algebraischen Analysis.)

Von späteren Werken über die algebraische Analysis seien genannt:

A. L. Cauchy, Cours d'analyse de l'École polytechnique. P. I. Analyse algébrique. Paris 1821. 576 S. — Lehrbuch der algebraischen Analysis, a. d. Franz. übers. von C. L. B. Huzler, Königsberg 1828. — Dtsch. von C. Itzigsohn, Berlin 1885. 398 S.

M. A. Stern, Lehrbuch der algebraischen Analysis. Leipzig 1860.

K. Hattendorff, Algebraische Analysis. Hannover 1877. 298 S.

R. Götting, Einleitung in die Analysis. Berlin 1880. 188 S.

O. Schlömilch, Handbuch der algebraischen Analysis. Jena 1845. 6. Aufl. Stuttgart 1886.

E. Cesàro, Corso di analisi algebrica con introduzione al calcolo infinitesimale. Torino 1894. VIII u. 500.

O. Biermann, Elemente der höheren Mathematik. Vorlesungen zur Vorbereitung des Studiums der Differentialrechnung, Algebra und Funktionentheorie. Leipzig 1895. XII u. 382.

H. Burkhardt, Funktionentheoretische Vorlesungen. I, 1. Algebraische Analysis. Leipzig 1903. XII u. 195.

E. Borel, Leçons sur les séries à termes positifs, professées au Collége de France. Recueillies et rédigées par R. d'Adhémar. Paris 1902. VI u. 95.
Maurice Godefroy, Théorie élémentaire des Séries. (Limites. Séries à termes constants. Séries à termes variables. Fonction exponentielle. Fonctions circulaires. Fonction gamma.) Avec une Préface de L. Sauvage. Paris 1903. VIII u. 266.
J. Lieblein, Sammlung von Aufgaben aus der algebraischen Analysis, zum Selbstunterricht. 2. Aufl. hrsg. von W. Láska. Prag 1888. 180 S.
C. Runge, Theorie und Praxis der Reihen. (Sammlung Schubert Nr. 32.) Leipzig, Göschen 1904. 266 S.

§ 3. **Spezielle Reihen.** Wir wollen im folgenden einige Schriften über spezielle Reihen anführen.

L. Euler, Demonstratio theorematis Newtoniani de evolutione potestatum binomii, pro casibus quibus exponentes non sunt numeri integri. Novi Comm. Ac. Petrop. **19**, a. 1774, 103—111 [1775].
L. Euler, De mirabilibus proprietatibus unciarum, quae in evolutione binomii ad potestatem quamcunque evecti occurrunt. Acta Ac. Petrop. **5**, a. 1781, P. I, 74—111 [1784].
L. Euler, De insignibus proprietatibus unciarum binomii ad uncias quorumvis polynomiorum extensis, ib. P. II, 76—89 [1785].
N. H. Abel, Untersuchungen über die Reihe $1 + \frac{m}{1} x + \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} x^2 + \cdots$ Journ. f. Math. **1**, 311—339, 1827. — Hrsg. von A. Wangerin. Ostw. Klass. d. ex. Wiss. Nr. 71. Leipzig 1895. 46 S.
C. Fr. Gauß, Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\ \beta(\beta+1)}{1 \cdot 2\ \gamma(\gamma+1)} x^2$ etc. Commentat. Gotting. **2**, a. 1812 [1813]. — Deutsch; Allgemeine Untersuchungen etc., mit Einschluß der nachgelassenen Fortsetzung übers. von H. Simon. Berlin 1887. 86 S. Werke III.
L. Jecklin, Historisch-kritische Untersuchung über die Theorie der hypergeometrischen Reihe bis zu den Entdeckungen von E. E. Kummer. Bern 1901. 87 S.
P. G. Lejeune Dirichlet, Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données. Journ. f. Math. **4**, 157—169, 1829.
P. G. Lejeune Dirichlet, Sur l'usage des intégrales définies dans la sommation des séries finies ou infinies. Journ. f. Math. **17**, 57—67, 1837.
P. G. Lejeune-Dirichlet, Über die Darstellung ganz willkürlicher Funktionen durch Sinus- und Cosinusreihen. Dove's Repert. **1**, 152—174, 1837.
P. L. Seidel, Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuirliche Funktionen darstellen. Abh. Ak. München. Math. phys. Kl. **5**, 1847. Hrsg. von H. Liebmann. Ostw. Klass d. ex. Wiss. No. 116. Leipzig 1900. 58 S.
B. Riemann, Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe. Abh. Ges. Wiss. Gött. **13**, 1867. 47 S. — Ges. Werke. 2. Aufl. 227—271. Leipzig 1892. (Auch Historisches.)
A. Sachse, Versuch einer Geschichte der Darstellung willkührlicher Functionen einer Variabeln durch trigonometrische Reihen. Diss. Göttingen 1879. Verbessert: Ztschr. Math. Phys. **25**, Suppl. 229—276. 1880. — Frz. Bull. sc. math. (2) **3**, 43—64, 83—112. 1880.
P. du Bois Reymond, Zur Geschichte der trigonometrischen Reihen. Tübingen 1880. 62 S.
G. A. Gibson, On the history of the Fourier series. Proc. math. Soc. Edinb. **11**, 137—166. 1893.
L. Saalschütz, Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen, ihren Zusammenhang mit den Sekanten-Koefficienten und ihre wichtigeren Anwendungen. Berlin 1893. VIII u. 208.

E. C. Catalan, Sur les nombres de Bernoulli et d'Euler. Mém. Ac. Bruxelles **37**, 1867.
Dan. Bernoulli, De seriebus recurrentibus. Comm. Ac. Petrop. **3**, a. 1728 [1732].
A. M. Lorgna, Specimen de seriebus recurrentibns. Veronae 1775. 100 S. Translated by H. Clarke, with Supplement. London 1779, 1783.
J. L. Lagrange, Sur l'intégration d'une équation différentielle à différences finies, qui contient la théorie des suites récurrentes. Misc. Taur. **1**, 1759, 33 ff..
M. d'Ocagne, Mémoire sur les suites récurrentes. Journ. Éc. Polyt. cah. **64**, 151—224. 1894.
T. J. Stieltjes, Recherches sur quelques séries semiconvergentes. Ann. Éc. Norm. (3) **3**, 201—258. 1886.
M. Servant, Essai sur les séries divergentes. Ann. Fac. Toulouse. (2) **1**, 117—175. 1899.
E. Borel, Leçons sur les séries divergentes. Paris 1901. VII u. 182.

§ 4. **Interpolationen.**

Die Interpolation wird sowohl in der Theorie der Reihen wie in der Funktionentheorie und in Lehrbüchern der Astronomie behandelt. Die ersten Interpolationsformeln gab Newton, „Principia“ 1687, lib. III, lemma 5, und „Methodus differentialis“ 1711. Geschichtliches siehe in:

A. v. Braunmühl, Historische Untersuchung der ersten Arbeiten über Interpolation. Bibl. math. (3) **2**, 86—110, 1901.
Jul. Bauschinger, Interpolation. Encykl. d. math. Wiss. I D. **3**, 799—820. Leipzig 1900—1904. Expos. franç. par H. Andoyer. **1 : 4.** S. 127—160. 1906.
R. Radau, Études sur les formules d'interpolation. Paris 1891. (Reich an literarischen Angaben.)
E. Pascal, Calcolo della variazioni e calcolo delle differenze finite. Manuale Hoepli. Milano. XII u. 330. 1897. (Viel Literatur.)
J. L. Lagrange, Sur les interpolations. (Ältere Darstellung vom J. 1778.) Oeuvres **7**, 535. Deutsch von Schultze, Über das Einschalten, nebst Tafeln. Berl. astr. Jhrb. f. 1783 [1781].
J. L. Lagrange, Sur une méthode particulière d'approximation et d'interpolation. Nouv. Mém. Ac. Berlin **14**, a. 1783, 279 [1785]. (Oeuvres **5**, 517.)
J. L. Lagrange, Mémoire sur la méthode d'interpolation. Nouv. Mém. Ac. Berlin **21**, a. 1792—93, 271 [1795]. (Oeuvres **5**, 663.)
C. F. Gauß, Theoria interpolationis methodo nova tractata. Werke III (Nachlaß) p. 265.
H. Bruns, Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens. Leipzig 1903. VII u. 159.
H. Burkhardt, Trigonometrische Interpolation. (Mathematische Behandlung periodischer Naturerscheinungen.) Encykl. d. math. Wiss. **2**, 642—694. Leipzig 1904.

Kapitel 4. Kettenbrüche.

Lord Brouncker bediente sich bei dem Versuche, die Fläche eines Kreises annähernd zu bestimmen, der Kettenbrüche, um 1665. Als Vorläufer könnte man Pietro Cataldi 1613 und Dan. Schwenter 1618 nennen. Die erste zusammenhängende Theorie der Kettenbrüche und zugleich den Namen fractio continua, verdanken wir Euler;

L. Euler, De fractionibus continuis. Comm. Ac. Petrop. **9**, a. 1737, 98—137 [1744] und: De fractionibus continuis observationes. Comm. Ac. Petro. **11**, a. 1739, 32—81 [1750] und: De transformatione serierum in fractiones continuas, ubi simul haec theoria non mediocriter amplificatur. Opusc. anal **2**, 138—177. 1785. Siehe auch seine „Introductio“. (Oben S. 90.)

Über die Entwicklungsgeschichte der Kettenbrüche siehe:

S. Günther, Beiträge zur Erfindungsgeschichte der Kettenbrüche. Pr. Weißenburg 1872. Ital. neu bearbeitet, mit Zusätzen von S. Günther, von A. Sparagna, Bull. bibl. stor. **7**, 213—254. 1874.

A. Favaro, Notizie storiche sulle frazioni continue, dal secolo decimoterzo al decimosettimo. ib. 451—502, 533—596.

S. auch den oben (S. 90) zitierten Beitrag zur Enzyklopädie von A. Pringsheim. Literatur findet sich auch in folgenden Lehrbüchern:

M. A. Stern, Theorie der Kettenbrüche und ihre Anwendung. Berlin 1833.

T. J. Stieltjes, Recherches sur les fractions continues. Ann. Fac. Toulouse 8 J., 1—122, 1894, **9** A, 1—47, 1895.

Eine Theorie der Kettenbrüche ist auch in den oben genannten Lehrbüchern der algebraischen Analysis zu finden sowie in denen über Funktionentheorie und höhere Algebra.

Außer den obigen Eulerschen Originalarbeiten seien noch folgende genannt:

J. L. Lagrange, Essai de l'analyse numérique sur la transformation des fonctions. Journ. Éc. Polyt. cah. **5**, 93 sq.

F. A. Möbius, Beiträge zur Lehre von den Kettenbrüchen. Journ. f. Math. **6**, 215—243, 1830.

M. A. Stern, Über die Kennzeichen der Konvergenz eines Kettenbruchs. Journ. f. Math. **37**, 255—273, 1848; — Zur Theorie der periodischen Kettenbrüche, ib. **53**, 1—102, 1857.

Ph. L. Seidel, Untersuchungen über die Konvergenz und Divergenz der Kettenbrüche. München 1846; — Bemerkungen über den Zusammenhang zwischen dem Bildungsgesetze eines Kettenbruches und der Art des Fortgangs seiner Näherungsbrüche. München 1855.

C. G. J. Jacobi, Allgemeine Theorie der kettenbruchähnlichen Algorithmen, in welchen jede Zahl aus drei vorhergehenden gebildet wird. Posth. hrsg. von E. Heine. Journ. f. Math. **69**, 29—64, 1868.

Abschnitt VI. Höhere Analysis.

A. Infinitesimal-Analysis.

Einleitung. Eine Reihe von Problemen, welche seit Beginn des 17. Jahrhunderts Mathematiker wie Cavalieri, Pascal, Fermat, Roberval, Barrow u. a. beschäftigten, nämlich die Betrachtung einer Summe von unendlich vielen, unendlich kleinen Größen oder des Quotienten zweier unendlich kleiner Größen, die Bestimmung des Maximums oder Minimums einer Funktion, die Aufgabe, an eine Kurve eine Tangente zu ziehen, die Quadraturen, das umgekehrte Tangentenproblem führten auf die Entstehung der Infinitesimal-Rechnung. Der Algorithmus der Differentialrechnung wurde von Leibnitz 1676 geschaffen. Die erste Enthüllung über die Fluxionsmethode von Is. Newton geschah durch Wallis, der 1693 in der Ausgabe seiner eigenen Werke Briefe Newtons aus dem Jahre 1692 veröffentlichte. Ihre formale Ausbildung erhielt die Differential- und Integralrechnung durch Johann Bernoulli, L. Euler, J. L. Lagrange u. a., ihre Begründung durch Maclaurin, d'Alembert, Cauchy u. a. Die Aufgabe der Differentialrechnung ist, die Grenze des Verhältnisses zwischen dem Zuwachs einer Funktion und dem Zuwachs der unabhängigen Veränderlichen zu finden, wenn letzterer unendlich klein

wird. Die Integralrechnung sucht umgekehrt aus diesem Verhältnis, oder der Ableitung der Funktion, diese Funktion zu finden.

Kapitel 1. Allgemeines.

§ 1. **Geschichte und Literatur.** Die Geschichte der Infinitesimalrechnung findet man in allen größeren Werken über die Geschichte der Mathematik (s. oben I. Teil Abschn I). Von Monographien nennen wir noch:

C. I. Gerhardt, Historische Entwickelung des Princips der Differentialrechnung bis auf Leibniz, Pr. Salzwedel (Halle) 1840; — Historia et origo calculi differentialis a Leibnitio conscripta. Hannover 1846.

C. I. Gerhardt, Die Entdeckung der Differentialrechnung durch Leibniz. Halle 1848.

C. I. Gerhardt, Die Geschichte der höheren Analysis. I. Die Entdeckung der höheren Analysis. Halle 1855.

F. Giesel, Entstehung des Newton-Leibnizschen Prioritätsstreites, hinsichtlich der Erfindung der Infinitesimalrechnung. Delitzsch 1868.

H. Weißenborn, Die Principien der höheren Analysis in ihrer Entwickelung von Leibniz bis auf Lagrange. Halle 1856.

P. Mansion, Esquisse de l'histoire du calcul infinitésimal. Gand 1887. 35 S.

J. Cohn, Geschichte des Unendlichkeitsproblems im abendländischen Denken bis Kant. Leipzig 1896. VII u. 261.

G. Vivanti, Il concetto d'infinitesimo e la sua applicazione alla matematica. Saggio storico. Mantova 1894. 134 S. 2. Aufl. Napoli 1901. 163 S.

G. Bohlmann, Übersicht über die wichtigsten Lehrbücher der Infinitesimalrechnung von Euler bis auf die heutige Zeit. Jhrsb. Dtsch. Math.-Ver. **6**, II, 91—110. 1900.

A. Voß, Differential- und Integralrechnung. Encykl. d. math. Wiss. II A, 2. **2**, 54—134. Leipzig 1899.

§ 2. **Ältere und neuere Lehrbücher.** Die Zahl der älteren und neueren Lehrbücher der Höheren Analyse ist außerordentlich groß; wir können hier nur verhältnismäßig wenige nennen. Bis ins XVII. Jahrhundert zurück reicht das Lehrbuch der Differentialrechnung von

G. Fr. de l'Hospital, Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes. Paris 1696; 2e éd. 1715; 3e éd. 1768. Übersetzt und durch eine Integralrechnung vermehrt von Edm. Stone. The method of fluxions both directe and inverse. London 1730.

Colin Maclaurin, A treatise of fluxions in two books. 2 vol. Edinb. 1742. New ed. 1807. Franz. v. Pezenas. Paris 1750. (Die 2. Hälfte des 2. Bandes enthält die Integralrechnung.)

Als Fortsetzung des Werkes von de l'Hospital können dienen:

L. A. de Bougainville, Traité du calcul intégral. 2 v. Paris 1754 u. 1756; und

Joh. Bernoulli, Lectiones mathematicae de methodo integralium, aliisque. Paris. (Ausgearbeitet 1691 u. 1692; erst gedruckt Opera III, 385—558.) 1742.

Th. Le Seur et **Fr. Jacquier,** Éléments du calcul intégral, Parma 1768; 2. Aufl. Parma u. Leipzig 1782.

Eines der ältesten Lehrbücher der Differential- und Integralrechnung, das seiner Zeit sehr beliebt war, schuf

Maria Gaetana Agnesi, Istituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana. Milano 2 v. 4°. 1748. 428 u. 589 S. Der 2. Band frz. Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral, avec Additions par Cousin. Paris 1775. Engl. Analytical institutions, by J. Colson. 2. v. London 1801.

Noch heute werden mit Erfolg studiert die Werke von L. Euler:

L. Euler, Institutiones calculi differentialis cum ejus usu in analysi infinitorum ac doctrina serierum. Berolini 1755. 2 v. Ticini 1787. Deutsch von J. A. Ch. Michelson. T. I u. II Berlin u. Libau 1790, T. III Berlin 1793. Supplement von J. Ph. Grüson, Berlin 1798. Eine Fortsetzung; Institutiones calculi differentialis Sectio III, Opera posthuma I, 342—402. Petropoli 1862.

L. Euler, Institutiones calculi integralis. Petropoli 3 v. I 1768, II 1768, III 1769; 2. ed. 4 v. ib. 1792—94; 3. ed. 4 v. ib. 1824—45. Deutsch von Jos. Salomon. Wien I 1828, II 1829, III 1830, IV (Supplemente) 1830.

Thomas Simpson, The doctrine and application of fluxions. 2 v. London 1750; new ed. 1823.

Simon Lhuilier, Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs. Berlin 1786. 2. Aufl. lat. Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris. Tubingae 1795. 339 S.

S. Fr. Lacroix, Traité du calcul différentiel et intégral. 3 v. 4⁰. Paris 1797—1800. 2. Ausg. 1810—19. — Traité élémentaire du calcul différentiel et intégral. 2 v. 8⁰. Paris 1797. 9[t] éd. par J. A. Serret et Ch. Hermite. Paris 1881. Deutsch von J. Ph. Grüson, Berlin 1798—1800, u. a.

Ch. Bossut, Traité de calcul différentiel et de calcul intégral. Paris 1798. 2 vol. 600 u. 582 S.

J. L. Lagrange, Leçons sur le calcul des fonctions. Zuerst in Séances de l'École Normale 1801 u. Journ. Éc. Polyt. cah. XII, 1804; 2[e] éd. Paris 1806. Oeuvres X. Paris 1884. 455 p. 4⁰.

J. L. Boucharlat, Éléments de calcul différentiel et de calcul intégral. Paris 1813. 9[e] éd. par H. Laurent. Paris 1891.

A. L. Cauchy, Résumé des leçons données à l'École royale polytechnique sur le Calcul infinitésimal. I. Paris 1823. 158 S. 8⁰.

A. L. Cauchy, Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral. Réd. par Moigno. Paris 1840—44. 2 v.

J. L. Raabe, Die Differential- und Integralrechnung. Zürich. 3 Bde. 1839—47.

Fr. Autenheimer, Elementarbuch der Differential- und Integralrechnung, mit zahlreichen Anwendungen aus der Analysis, Geometrie, Mechanik, Physik usw. Weimar 1865; 3. Aufl. 1887; 5. Aufl. von A. Donadt. Leipzig 1901. x u. 602.

M. Sturm, Cours d'analyse de l'École Polytechnique. Paris 1857. Viele spät. Aufl. 8[e] éd. Publ. par Prouhet. 2 vol. Paris 1884; 12[e] éd. Par A. de Saint-Germain 1901.

Louis Navier, Résumé des lecons d'analyse données à l'École Polytechnique. 2 v. Paris 1840—41. Deutsch; Lehrbuch der Differential- and Integralrechnung. Mit Zusätzen von Liouville, verm. von Th. Wittstein. 2 Bde. 4. Aufl. Hannover 1875. 360 u. 394 S.

A. Harnack, Die Elemente der Differential- und Integralrechnung. Zur Einführung in das Studium dargestellt. Leipzig 1881, viii u. 409.

L. Kiepert, Grundriß der Differential- und Integralrechnung. I. T. Differentialrechnung. 9. Aufl. des gleichnamigen Leitfadens von M. Stegemann. Hannover 1901. xviii u. 750 S. II. T. Integralrechnung. 8. Aufl. 1903. xviii u. 660 S.

O. Schlömilch, Compendium der Höheren Analysis. 2 Bde. Braunschweig 1853 I, 5. Aufl. 1881. 566 S. II, 4. Aufl. 1895, 596 S.

J Bertrand, Traité de calcul différentiel et de calcul intégral. 2 v. Paris I, 1864. 836 S. 4⁰ u. II, 1870. 720 S.

C. Jordan, Cours d'analyse de l'École Polytechnique. 3 v. Paris 2[e] éd. I, 1893, xviii u. 612 S.; II, 1894, xviii u. 627 S.; III, 1896. xi u. 547 S.

A. Genocchi, Differentialrechnung und Grundzüge der Integralrechnung. Deutsch von G. Bohlmann und A. Schepp. Leipzig 1899. vii u. 409.

J. A. Serret, Cours de calcul différentiel et intégral. 2 v. 5. ed. Paris 1900. I xiii u. 617 S.; II xiii u. 904 S. Deutsch von A. Harnack. 2. Aufl. von

Bohlmann. 3 Bde. Leipzig. 3. Aufl. von G. Scheffers. I 1906, xvi u. 624 S. II 1907, xiv u. 386 S. III, 1. 1903, III, 2. 1904, xii u. 479 S.

W. Franz Meyer, Differential- und Integralrechnung, 2 Bde. Leipzig 1901, xviii u. 395, II, 1905, xvi u. 443.

H. Burkhardt, Elemente der Differential- und Integralrechnung. Leipzig 1907. ix u. 252.

Möglichst schnell in die für die Technik erforderlichen Kenntnisse aus der höheren Analysis sollen einführen:

W. Nernst und **A. Schoenflies,** Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften. Kurzgefaßtes Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, mit besonderer Berücksichtigung der Chemie. München. 4. Aufl. 1904. xii u. 370 S.

G. A. Gibson, An introduction to the calculus based on graphical methods. London 1904. xviii u. 225 S.

H. A. Lorentz, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung und der Anfangsgründe der analytischen Geometrie. Mit besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse der Studierenden der Naturwissenschaften. Übers. a. d. Holländ. von G. C. Schmidt. Leipzig 1900. vii u. 476 S.

G. Vivanti, Complementi di matematica ad uso dei chimici e dei naturalisti Milano, Hoepli 1903. x u. 381. 12⁰.

Eine strenge, dem Sinne der neueren Funktionstheorie entsprechende Einführung gibt:

O. Stolz, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. Leipzig. I. T. Reelle Veränderliche und Funktionen. 1893, x u. 460 S. II. T. Komplexe Veränderliche und Funktionen. 1896, ix u. 338 S. III. T. Die Lehre von den Doppelintegralen. 1899, viii u. 296 S.

E. Pascal, Lezioni di calcolo infinitesimale. P. I. Calcolo differenziale. 2ª ed Milano, Hoepli 1902. xii u. 311. 12⁰. P. II. Calcolo integrale. 1903. viii u. 329. — Esercizi e note critiche di calcolo infinitesimale. ib. 1895. xix u. 371 S. (Funktionentheoretische Grundlagen.)

§ 3. Übungen.

O. Schlömilch, Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis. I u. II Leipzig 1868—70. 4. Aufl. von R. Henke 1900. viii u. 448. 5. Aufl. von E. Nätsch. Leipzig 1904. viii u. 372 S.

M. F. Frenet, Recueil d'exercices sur le calcul infinitésimal. 6. éd. Paris 1904. 45 u. 533 S.

L. A. Sohncke, Sammlung von Aufgaben aus der Differential- und Integralrechnung. I. 6. Aufl. Halle 1903. I, xi u. 304. I. u. II. 5. Aufl. 1885.

H. Dölp, Aufgaben zur Differential- und Integralrechnung, nebst den Resultaten und den zur Lösung nötigen theoretischen Erläuterungen. 10. Aufl. von E. Netto. Gießen 1903. iii u. 216 S.

E. Brahy, Exercices méthodiques du calcul différentiel. 2. éd. Paris 1899. Exercices méthodiques du calcul intégral. Bruxelles 1895. viii u. 391.

F. Tißerand, Recueil complémentaire d'exercices sur le calcul infinitésimal. 2. éd. Paris 1896. xxiii u. 524 S.

A. Fuhrmann, Anwendungen der Infinitesimalrechnung in den Naturwissenschaften, im Hochbau und in der Technik. Teil I. Naturwissenschaftliche Anwendungen der Differentialrechnung. Lehrbuch und Aufgabensammlung. Berlin 1888. xii u. 148 S. 2. Aufl. 1900. xviii u. 239 S. II. Teil. Naturwissenschaftliche Anwendungen der Integralrechnung. 1890. xii u. 268 S. III. Teil. Bauwissenschaftliche Anwendungen der Differentialrechnung. 2 Hälften. 1898 u. 1899. xix u. xvi u. 348 S. IV. Teil. Bauwissenschaftliche Anwendungen der Integralrechnung. 1903. xiii u. 292 S. (Ist auf 6 Teile berechnet.)

Kapitel 2. Differential- und Differenzenrechnung.

§ 1. **Historisches. Prinzipien.** Für die Begründung der Differential- und Differenzenrechnung wichtige Schriften, außer den oben Kap. 1 § 2 (S. 94—96) genannten Lehrbüchern, sind folgende:

G. W. Leibniz, Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur: et singulare pro illis calculi genus. Acta Erud. **3**, 467—473, Lipsiae 1684. Abgedr. von K. F. Giesel. Pr. Leipzig 1884. 42 S.

Is. Newton, Method of fluxions and infinite series, with its application to the geometry of curved lines, ed. by J. Colson. London 1736 (verfaßt 1671).

J. L. Lagrange, Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables. Nouv. Mém. Ac. Berlin ann. 1772 [1774], 186—221. Oeuvres **3**, 441—476, 1869.

J. L. Lagrange, Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissants, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies. Paris 1797. 3e. éd. par J. A. Serret 1847; 4e. éd. 1881. 427 S. 4°. Deutsch von Ph. Grüson, Berlin 1798.

Brook Taylor, Methodus incrementorum directa et inversa. London 1715. Neue Facsimile-Ausg. Berlin 1862.

Colin Maclaurin, A treatise of fluxions. Edinb. 1742. 2 vol. Edinb. 1801.

L. M. N. Carnot, Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal. Paris 1797; 2e. éd. 1813; 4e. éd 1860. Deutsch von Hauff. Frankf. 1800.

L. Fr. A. Arbogast, Du calcul des dérivations et de ses usages dans la théorie des suites et dans le calcul différentiel. Straßburg 1800. 404 S. 4°.

J. Landen, The residual analysis, a new branch of the analytic art of very extensive use, both in pure mathematics and natural philosophy. Book I. London 1764.

J. Stirling, Methodus differentialis sive Tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum. London 1730. 4°.

W. Emerson, The method of increments. London 1763. 4°.

W. Emerson, The arithmetic of infinities, and the differential method illustrated by examples. London 1767. 8°.

S. F. Lacroix, Traité des différences et des séries. Paris 1800. 4°. 2d. éd. 1819.

R. Hoppe, Lehrbuch der Differentialrechnung und Reihentheorie. Mit strenger Begründung der Infinitesimalrechnung. Berlin 1865. 280 S.

Is. Todhunter, Treatise on the differential calculus. London. 8th ed. 1878.

P. Freyer, Studien zur Metaphysik der Differentialrechnung. Pr. Ilfeld 1883. 39 S. 4°.

O. Schlömilch, Theorie der Differenzen und Summen. Halle 1848.

G. Boole, A treatise on the calculus of finite differences. London. 3. ed. 1880. Deutsch von C. H. Schnuse. Braunschweig 1867.

L. Barbera, Introduzione allo studio del calcolo detto delle differenze. Bologna 1881.

A. A. Markoff, Differenzenrechnung. Russisch. St. Petersburg 1889—91. Übers. von Th. Friesendorff und E. Prümm. Mit e. Vorw. von R. Mehmke. Leipzig 1896. vi u. 194 S.

E. Pascal, Calcolo delle variazioni e calcolo delle differenze finite. Milano 1897. xii u. 330 S. (Reich an Literaturangaben.)

Dem. Seliwanoff, Lehrbuch der Differenzenrechnung. Leipzig 1904. iv u. 92 S. — Differenzenrechnung. Encyklop. d. m. Wiss. I, E, 1, 918—937. 1901. Exposé p. H. Andoyer. Ed. fr. I: 4, 47—127, 1906.

Den historischen Schriften in Kap. 1 (S. 94) sind hier hinzuzufügen:

G. Eneström, Differenskalkylens historia. I. Ups. Univ. Arsskr. 1879. (4) u. 71 S. (Geschichte der Vorarbeiten und der Entdeckung der Differenzenrechnung.)

O. Zucca, Cenni storici sulle origini del calcolo delle differenze finite. Genova 1888.

§ 2. **Spezielles.**

H. Becker, Die geometrische Entwickelung des Infinitesimalbegriffs im Exhaustionsbeweise bei Archimed, und ihre Bedeutung für die Differentialgeometrie und die Schule. Pr. Insterburg 1894. 26 S. 4°.

R. Hoppe, Theorie der independenten Darstellung der höheren Differentialquotienten. Leipzig 1845.

F. Bessell, Über die Entwicklung der höheren Differentiale zusammengesetzter und implizierter Funktionen. Diss. Jena 1872.

K. Bochow, Der Differentialquotient zu beliebigem Index. Diss. Halle 1885. (Viel Historisches.)

F. Buchwaldt, Ny methode for differentiation med hvilkesomhelst indices. Tidschr. f. Math. (3) **5,** 1—21, 95—96, 128, 1875; **6,** 41—56, 1876.

S. Pincherle, Sulle derivate ad indice qualunque. Mem. Ist. Bologna (5) **9,** 745—758. 1902.

F. Engel, Die höheren Differentialquotienten. Ber. Ges. Leipz. **54,** 17—51, 1902.

J. G. Butgers, Over differentialen van gebroken orde en haar gebruik bij de afleiding van bepaalde integralen. Diss. Utrecht 1904. 49 S. (Auch Historisches.)

M. G. Ricci et **T. Levi Cività,** Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications. Math. Ann. **54,** 125—201. 1900.

R. E. Moritz, Generalization of the differentiation process. Amer. J. **24,** 257—302. 1902.

D. Mirianow, Sur les bases du calcul de généralisation. Thèse. Genève 1900.

Alex. Macfarlane, Differentiation in the quaternion analysis. Proc. R. Ir. Ac. Dublin. (3) **6,** 199—215. 1900. — Vector differentiation. Bull. Phil. Soc. Washington **14,** 73—92. 1901.

V. Fischer, Vektordifferentiation und Vektorintegration. Leipzig 1904. iv u. 82 S.

O. Schlömilch, Theorema Taylorianum. Diss. Jena 1844.

E. Marloh, Geschichte des Restes der Taylorschen Reihe. Diss. Göttingen 1881.

A. Pringsheim, Zur Geschichte des Taylorschen Lehrsatzes. Bibl. math. (3) **1,** 433—479. 1900.

J. Dienger, Die Sätze von Bürmann und Lagrange. Prag 1868.

J. L. Lagrange, Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des séries. Hist. Mém. Ac. Berlin an. 1768, 251—326 [1770]. (Die Lagrangesche Reihe S. 275.)

§ 3. **Maxima und Minima.**

K. H. Schellbach, Mathematische Lehrstunden. Aufgaben aus der Lehre vom Größten und Kleinsten. Bearb. u. hrsg. von A. Bode und E. Fischer. Berlin 1860. iv u. 154 S.

H. C. E. Martus, Maxima und Minima. Ein geometrisches und algebraisches Übungsbuch. Berlin 1861. 2. Abdr. Hamburg 1903. 127 S.

W. Schrader, Allgemeine Methoden zur elementaren Bestimmung der Maxima und Minima. Pr. Halberstadt 1862.

H. Heilermann, Eine elementare Methode zur Bestimmung von größten und kleinsten Werthen, nebst vielen Aufgaben. Leipzig 1871. vii u. 104 S.

P. Wiecke, Lehrproben. Geometrische und algebraische Betrachtungen über Maxima und Minima. Berlin 1894. viii u. 180 S.

A. Maurer, Maxima und Minima. Aufgaben für die Prima höherer Lehranstalten. Berlin 1897. v u. 50 S.

A. Aubry, Étude élémentaire sur la théorie des maxima et minima, Progreso mat. (2) **2,** 41—49, 185—193, 233—251, 321—324. 1900. (Auch Historisches.)

Sim. Lhuilier, De relatione mutua capacitatis et terminorum figurarum, seu de maximis et minimis. Pars I. Varsoviae 1782. 4. — Polygonométrie et abrégé d'isopérimétrie élémentaire. Genève 1789. 4°.

J. Steiner, Einfache Beweise der isoperimetrischen Hauptsätze. Journ. f. Math. **18**, 281—296. 1838. — Sur le maximum et minimum des figures dans le plan, sur la sphère et dans l'espace en général. Journ. f. Math. **24**, 93—213. 1842.

E. Kötter, Über diejenigen Polyeder, die bei gegebener Gattung und gegebenem Volumen die kleinste Oberfläche besitzen. Journ. f. Math. **110**, 198—229. 1892.

L. Lindelöf, Recherches sur les polyèdres maxima. Acta Soc. Fenn. **24**, Nr. 8. 1898. 47 S.

L. Scheeffer, Theorie der Maxima und Minima einer Funktion von zwei Variabeln. Mitget. von A. Mayer. Ber. Ges. Leipz. 1886, 102—143.

O. Stolz, Die Maxima und Minima der Funktionen von mehreren Veränderlichen. Ber. Ak. Wien **99**, 495—510, 1890; **100**, 1167—1181, 1891; **102**, 85—87, 1893.

V. v. Dantscher, Zur Theorie der Maxima und Minima einer Funktion von zwei Veränderlichen. Math. Ann. **42**, 89—131, 1893.

Weitere Schriften über Maxima und Minima und über isoperimetrische Figuren siehe unter „Variationsrechnung“.

Kapitel 3. Integralrechnung.

§ 1. **Spezielles.** Die ersten Lehrbücher der Integralrechnung sind in Kap. 1 § 2 (S. 94—96) genannt worden. Wir führen hier einige für die Entwickelung der Integralrechnung wichtige Schriften an:

G. W. Leibniz, De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum. Acta Erud. 1686, 297ff. — Specimen novum analyseos pro scientia infiniti circa summas et quadraturas. Acta Erud. 1702.

Joh. Bernoulli, Solution d'un problème concernant le calcul intégral. Mém. Ac. sc. Paris 1702, 289; Opp. I, 393—400.

Roger Cotes, Harmonia mensurarum, sive Analysis et Synthesis per rationem et angulorum mensuras promotae; accedunt alia Opuscula mathematica. Ed. Rob. Smith. Cantabr. 1722. 4°.

D. C. Walmesley, Analyse des mesures, des rapports et des angles, ou Réduction des intégrales aux logarithmes et aux arcs de cercle. Paris 1748. 4°. (Ein Kommentar zum vorigen.)

A. de Moivre, Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis. London 1730.

J. le Rond d'Alembert, Recherches sur le calcul intégral. Mém. Ac. Berlin a. 1746, 182—224 [1748]. Suite ib. a. 1748, 249—291 [1750].

L. Euler, De reductione formularum integralium ad rectificationem ellipsis et hyperbolae. Nov. Comm. Ac. Petr. **10**, a. 1764, 3—50 [1766]. — Supplementum calculi integralis pro integratione formularum irrationalium. Acta Ac. Petr. **4**, a. 1781, P. I, 4—31 [1783].

A. M. Legendre, Sur les intégrations par arcs elliptiques. 2 Mém. Hist. Mém. Ac. sc. Paris a. 1786, 616 u. 644 [1788]. — Mémoire sur les transcendantes elliptiques. Paris 1793. — Exercices de calcul intégral sur divers ordres de transcendantes et sur les quadratures. 3 v. Paris 1811—19. — Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes. Paris. 2 v. et 3 suppl. 1825—1828.

P. Ferroni, De calculo integralium exercitationes mathematicae. Florent. 1792. 344 S. 4°.

A. L. Cauchy, Recherche d'une formule générale qui fournit la valeur de la plupart des intégrales connues et celle d'un grand nombre d'autres. Ann. math. Gergonne **16**, 1825/6, **17**, 1826/7.

J. Liouville, Premier mémoire sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique. Mém. prés. Ac. sc. Paris (2) **5,** 76—151. 1838.

L. Königsberger, Über Integrale transcendenter Funktionen. Journ. f. Math. **98**, 97—126. 1885. — Über die Reduktion von Integralen transcendenter Funktionen. Amer. J. **11**, 221—282. 1889.

Meier Hirsch, Integraltafeln, oder Sammlung von Integralformeln. Berlin 1810. Engl. Integral tables. London 1823.

F. Minding, Sammlung von Integraltafeln. Zum Gebrauche für den Unterricht an der Königl. Allg. Bauschule und dem Königl. Gewerbe-Institut. Berlin 1849. 186 S.

G. Petit Bois, Tafeln unbestimmter Integrale. Leipzig 1906. XII u. 154 S. (Sammlung von 2500 Integralen mit ihren Lösungen.)

§ 2. **Mehrfache Integrale.** Die erste Behandlung der Transformation des Doppelintegrals gab L. Euler, von dem auch der Name formula integralis duplicata herrührt:

L. Euler, De formulis integralibus duplicatis. Nov. Comm. Ac. Petrop. **14,** a. 1769, 72—103 [1770]; Instit. calc. int. **4**, 416.

A. M. Legendre, Mémoire sur les intégrales doubles. Hist. Mém. Ac. sc. Paris, a. 1788, 454—584 [1791].

C. G. J. Jacobi, Commentatio de transformatione integralis duplicis in formam simpliciorem. Königsberg 1832. — Varia theoremata de transformatione et determinatione integralium multiplicium. Journ. f. Math. **12**, 1—69. 1834. — De formatione et proprietatibus determinantium. ib. **22**, 285—319. 1841. De determinantibus functionalibus. ib. **22**, 319—360. 1841.

P. G. Lejeune-Dirichlet, Über eine neue Methode zur Bestimmung vielfacher Integrale. Abh. Ak. Berlin 1839, 61—79. Journ. de math. p. **4**, 164—168. 1841.

E. C. Catalan, Mémoire sur la réduction d'une classe d'intégrales multiples. Journ. de math. **4**, 323—344. 1841.

O. Schlömilch, Über die Entwicklung vielfacher Integrale. Z. Math. Phys. **1**, 75ff., 1856.

L. Kronecker, Vorlesungen über die Theorie der einfachen und vielfachen Integrale. Hrsg. von E. Netto. Leipzig 1894. X u. 346 S.

E. Neugebauer, Über die Transformation und Reduktion vielfacher Integrale durch simultane Substitutionen. Pr. Linz 1890.

F. J. Obenrauch, Zur Transformation und Reduktion von Doppelintegralen mittels elliptischer Koordinaten. Pr. Neutitschein. 1891|2. 56 S. gr. 8°. (Historisches über elliptische Koordinaten.)

C. Lorenz, Die eigentlichen dreifachen Integrale. Monatsh. f. Math. **13**, 3—118. 1902.

§ 3. **Bestimmte Integrale.** Für die Anfänge der Behandlung der bestimmten Integrale ist wichtig:

L. Euler, De inventione integralium, si post integrationem variabili quantitati determinatus valor tribuatur. Misc. Berol. **7**, a. 1743, 129—171.

Die von Legendre nach Euler benannten Integrale, die Gammafunktion und die Betafunktion, werden zur Bestimmung des allgemeinen Gliedes einer Reihe benutzt in den früheren Aufsätzen von

L. Euler, De progressionibus transcendentibus seu quarum termini algebraice dari nequeunt. Comm. Ac. Petrop. **5**, a. 1730—31, 36—57 [1738] und De summatione innumerabilium progressionum. ib. 91—105.

A. M. Legendre, Traité des fonctions elliptiques et des intégrales Eulériennes, avec des tables pour en faciliter le calcul numérique. Paris 1827. — Siehe auch die oben (in § 1 auf vor. S.) genannten Exercices.

J. Binet, Mémoires sur les intégrales définies eulériennes, et sur leur application à la théorie des suites ainsi qu'à l'évaluation des fonctions de grands nombres. Journ. Ec. Polyt. cah. 27, **16**, 1840.
H. Limbourg, Théorie de la fonction Gamma. Gand 1859.
A. Berger, Sur quelques applications de la fonction Gamma à la théorie des nombres. Nov. Act. Ups. (3) 1880, 1—87.
L. Bourget, Développement en séries des intégrales eulériennes. Ann. Ec. Norm. (2) **10**, 175—233. 1881. (Viel Historisches.)
G. Brunel, Monographie de la fonction Gamma. Mém. Soc. sc. ph. nat. Bordeaux. (3) **3**, 1886. 184 S. (Bibliographie und Geschichte.)
J. Eggenberger, Beiträge zur Darstellung des Bernoullischen Theorems, der Gammafunktion und des Laplaceschen Integrals. Mitt. Naturf. Ges. Bern 1893, 110—182. (Viel Historisches.)
H. Schenkel, Kritisch-historische Untersuchungen über die Theorie der Gammafunktionen und die Eulerschen Integrale. Bern 1895. 66 S.
J. H. Graf, Einleitung in die Theorie der Gammafunktion und der Eulerschen Integrale. Bern 1895. xxv u. 746.
N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Gammafunktionen. Leipzig 1906. x u. 746.
M. Godefroy, La fonction gamma. Théorie, histoire, bibliographie. Paris 1901. vii u. 94 S.

Die Untersuchungen von Gauß über die hypergeometrische Reihe (s. S. 91) führten auf eine Funktion $\Pi(x) = \Gamma(x+1)$.

A. Enneper, Über die Funktion Π von Gauß mit komplexem Argument. Inaug. Diss. Göttingen 1856. 32 S. 4°.

Die Literatur über hypergeometrische Funktionen siehe auch in der „Funktionentheorie" weiter unten.

G. Brunel, Bestimmte Integrale. Encykl. math. Wiss. II, 135—188, 1899.
G. F. Meyer, Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale zwischen reellen Grenzen. Mit vorzüglicher Berücksichtigung der von P. G. Lejeune Dirichlet gehaltenen Vorträge. Leipzig 1871. xviii u. 628 S.
P. G. Lejeune Dirichlet, Vorlesungen über die Lehre von den einfachen und vielfachen bestimmten Integralen. Hrsg. von G. Arendt. Braunschweig 1901. xxiii u. 476 S.
J. Thomae, Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale. Halle 1875.
D. Bierens de Haan, Réduction des intégrales définies générales. Amsterdam 1857. — Exposé de la théorie, des propriétés, des formules de transformation et des méthodes d'évaluation des intégrales définies. 3 Teile. Amsterdam 1860—62. 4°.
G. Dillner, Sur les intégrales définies des fonctions d'une variable complexe. Handl. Svenska Vet. Ak. **18**. Nr. 6. Stockholm 1881.
A. L. Cauchy, Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires. Mém. prés. Ac. sc. Paris (2) **1**, 599—799. 1825. Neudruck Bull. sc. math. **7**, 265—304, 1874; **8**, 43—55, 148—159, 1875. Deutsch von P. Stäckel. Klass. d. ex. Wiss. Nr. 112. Leipzig 1900. 80 S. 12°.
Ch. Hermite, Cours de la faculté des Sciences de Paris sur les intégrales définies, la théorie des fonctions d'une variable imaginaire et les fonctions elliptiques. Réd. p. M. Andoyer. 4e. éd. Paris 1891. 284 S. 4°.
D. Bierens de Haan, Tables d'intégrales définies. Verh. Ak. Vet. Amsterdam. I—IV. 1858. xvi u. 572 S. 4°.
C. F. Lindman, Observations sur les tables d'intégrales définies de M. Bierens de Haan. (Amst. 1858.) Bihang Ak. Vet. Stockh. **10**, 1885. 268 S.
D. Bierens de Haan, Nouvelles tables d'intégrales définies. I—III. Leiden 1867.
C. F. Lindman, Examen des nouvelles tables d'intégrales définies de M. Bierens de Haan (Amst. 1867). Handl. Ak. Vet. Stockh. **24**, Nr. 5, 1891. 231 S.

§ 4. **Mechanische Quadratur.**

C. F. Gauß, Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi. Comm. Soc. Gott. **3**, 1816. Werke III, 165.

C. G. J. Jacobi, Über Gauß' neue Methode, die Werte der Integrale näherungsweise zu finden. Journ. f. Math. **1**, 301—308, 1826.

D. Poisson, Mémoire sur le calcul numérique des intégrales définies. Mém. Inst. Ac. Paris (2) **6**, a. 1823, 571—602. Auch Paris 1827.

E. B. Christoffel, Über die Gaußsche Quadratur und eine Verallgemeinerung derselben. Journ. f. Math. **55**, 61—83, 1858.

K. Schellbach, Über mechanische Quadratur. Pr. Berlin 1877. 26 S. 4°; 2. Abdr. 1884.

R. Radau, Études sur les formules d'approximation qui servent à calculer la valeur d'une intégrale définie. Journ. de math. p. appl. (2) **6**, 283—336. 1879, und Paris 1881.

P. Mansion, Sur l'évalution approchée des aires planes. Ann. Soc. sc. Bruxelles. **5** B, 231—290. 1881.

B. Baillaud, Calcul numérique des intégrales définies. Mém. Soc. Toulouse (8) **5**, 161—190. 1883.

§ 5. **Mechanische Integration. Planimeter** und **Integraphen.**

J. M. Solin, Über graphische Integration. Abh. Ak. Prag (6) **5**, 1872.

J. Amsler, Über die mechanische Bestimmung des Flächeninhalts, der statischen Momente und der Trägheitsmomente ebener Figuren; insbesondere über einen neuen Planimeter. Schaffhausen 1856. — Vierteljhrsschr. Ges. Zürich **1**, 44—48. 1856.

A. Amsler-Laffon, Neue Planimeter-Constructionen. Ztschr. Instr.-Kunde 1884.

C. Nehls, Über graphische Integration und ihre Anwendung in der graphischen Statik. Leipzig. 2. Aufl. 1885.

J. Massau, Mémoire sur l'intégration graphique et ses applications. Avec appendice et atlas de 24 pl. Paris 1887 u. 1889. 731 u. 264 S. 4°.

A. Amsler, Über den Flächeninhalt und das Volumen durch Bewegung erzeugter Kurven und Flächen und über mechanische Integrationen. Schaffhausen 1880.

A. Amsler, Über mechanische Integrationen. Katalog d. math. Ausst. München 1892, 99—124. (Prinzipien, Geschichte, Theorie und Anwendung.)

E. Herpin, Instruction sur le planimètre polaire de Amsler de Schaffhausen. Nancy 1895. xii u. 61 S.

Br. Abdank-Abakanowicz, Les intégraphes, la courbe intégrale et ses applications. Étude sur un nouveau système d'intégrations mécaniques. Paris 1886. 156 S. — Deutsch von E. Bitterli. Leipzig 1889. viii u. 176 S.

Kapitel 4. Differentialgleichungen.

§ 1. **Einleitung. Anfänge der Theorie.** Betrachtungen von Differentialgleichungen, d. h. Gleichungen zwischen einer Funktion und ihrer Ableitung oder ihren Ableitungen, reichen bis in die Anfänge der Infinitesimalrechnung zurück. Newton integrierte Differentialgleichungen 1. O. durch eine Reihe, Joh. Bernoulli löste durch besondere Kunstgriffe spezielle Differentialgleichungen; er fand auch die Lösung der von seinem Bruder Jakob vorgelegten und nach diesem benannten „Bernoullischen Differentialgleichung". Nach ihm wurde die Theorie weiter entwickelt u. a. in folgenden Originalarbeiten:

L. Euler, Nova methodus innumerabiles aequationes differentiales secundi gradus reducendi ad aequationes differentiales primi gradus. Comm. Ac. Petrop. **3**, a. 1728, 124—137 [1732]. — De infinitis curvis ejusdem generis seu methodus

inveniendi aequationes pro infinitis curvis ejusdem generis. Comm. Ac. Petrop. 7, a. 1734—35, 174—183 [1740]; Additamentum ib. 184—200. — De integratione aequationum differentialium altiorum graduum. Misc. Berol. 7, 193—242, 1743. — Methodus aequationes differentiales altiorum graduum integrandi ulterius promota. Novi Comm. Ac. Petrop. 3, a. 1750—51, 3—35 [1753]. — De integratione aequationum differentialium. Novi Comm. Ac. Petrop. 8, a. 1760—61, 3—63 [1763].

Al. Cl. Clairaut, Trouver des courbes, dont la propriété consiste dans une certaine relation entre leurs branches. Mém. Ac. sc. Paris 1734. — Sur l'intégration ou la construction des équations différentielles du premier ordre. Mém. Ac. sc. Paris, a. 1740, 294 [1742].

J. le Rond d'Alembert, Recherches sur le calcul intégral. Hist. Mém. Ac. sc. Paris, a. 1769, 73 ff. [1772].

P. S. de Laplace, Recherches sur les solutions particulières des équations différentielles et sur les inégalités séculaires des planètes. Mém. Ac. sc. Paris, a. 1732, 343 ff. u. 651 ff.

J. L. Lagrange, Sur l'intégration des équations à différences partielles du premier ordre. Mém. Ac. Berlin, a. 1772, 353—372 [1774]. Deutsch von G. Kowalewski: Lagrange und Cauchy, Zwei Abhandlungen zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Leipzig. Klass. d. ex. Wiss. Nr. 113. 1900. 54 S.

J. L. Lagrange, Sur les intégrales particulières des équations aux différences partielles avec des remarques nouvelles sur la nature et sur l'intégration de ces sortes d'équations. Nouv. Mém. Ac. Berlin, a. 1774, 198—275 [1776].

G. Monge, Mémoire sur la détermination des fonctions arbitraires dans les intégrales de quelques équations aux différences partielles. Mém. Ac. Turin. 5, 1770—73, 16 u. 79. — Mémoire sur les fonctions arbitraires continues ou discontinues qui entrent dans les intégrales des équations aux différences finies. Mém. prés. Ac. sc. Paris 9, a. 1774, 345 [1780].

L. F. A. Arbogast, Mémoire pour déterminer la nature des fonctions arbitraires, introduites par l'intégration des équations aux différences partielles. St. Petersb. 1791. 96 S. 4°.

§ 2. **Lehrbücher.** Die Theorie der Differentialgleichungen findet man mehr oder weniger ausführlich behandelt in den Lehrbüchern der Integralrechnung (s. oben S. 94—96). Von speziellen Lehrbüchern der Differentialgleichungen seien hier folgende angeführt:

Jos. Petzval, Integration der linearen Differentialgleichungen mit konstanten und veränderlichen Koefficienten. 2 Bde. Wien 1851 u. 1859.

George Boole, A treatise on differential equations. Cambridge, London 1865; 3. ed. with supplementary volume 1872; 4. ed. London 1877.

L. Natani, Die höhere Analysis. Mit Berücksichtigung der Theorie der komplexen Größen. 3. Abhandlung. Berlin 1866.

S. Spitzer, Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen. Wien 1878.

P. M. H. Laurent, Théorie des équations différentielles simultanées et aux différences totales. 2 P. Paris 1873 u. 1874.

A. R. Forsyth, Theory of differential equations. Part I. Exact equations and Pfaffs problem. 2d ed. Cambridge 1888. xiii u. 340 S. Deutsch von H. Maser. Leipzig 1893. xii u. 378 S. — Part II. Ordinary equations not linear. Vol. II and III. Cambr. 1900. — Part III. Ordinary linear equations. [Vol. IV.] Cambr. 1902. xvi u. 534 S.

L. Königsberger, Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variabeln. Leipzig 1889. xvi u. 486 S.

W. W. Johnson, A treatise on ordinary and partial differential equations. New York 1880; 3. ed. 1893.

L. Schlesinger, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. 2 Bde.

Leipzig. I, 1895, XX u. 487 S. II, 1, 1897, XVIII u. 532 S. II, 2, 1898, XIV u. 446. (Größeres Kompendium mit historischen und bibliographischen Notizen.)

L. Schlesinger, Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen. Leipzig 1908. X u. 334.

L. Heffter, Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variabeln. Leipzig 1894. XV u. 258 S. (Lehrbuch zur Einführung, nach den Grundlagen von Fuchs.)

P. Painlevé, Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles, professées à Stockholm. Paris 1897. 19 u. 6 u. 589 S. lith.

J. M. Page, Ordinary differential equations. An elementary textbook; with an introduction to Lies theory of the groupe of one parameter. London 1897. XVIII u. 226.

F. Marotte, Les équations différentielles linéares et la théorie des groupes. Ann. Fac. Toulouse **12** H, 1—92. Thèse. Paris 1898. 97 S. 4°.

L. Schlesinger, Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variabeln. 2. Aufl. Leipzig 1904. 320 S.

J. Horn, Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. Leipzig 1905. X u. 391.

P. Painlevé, Gewöhnliche Differentialgleichungen; Existenz der Lösungen. Encykl. d. math. Wiss. II A 4 a, 189—229. Leipzig 1900.

E. Vessiot, Gewöhnliche Differentialgleichungen; Elementare Integrationsmethoden. Encykl. d. math. Wiss. II A 4 b, 294—399. 1900.

Für die Geschichte und Bibliographie der singulären Lösungen sind zu nennen:

K. M. Lindeberg, Historisk öfversigt af theorie för singulärna solutioner till ordinära differential eqvationer. Pr. Stockholm. Diss. Upsala 1875. (Historisches.)

P. Mansion, Notes bibliographiques sur les intégrales générales et les solutions singulières des équations différentielles et aux dérivées partielles. Ann. Soc. sc. Bruxelles **15**, 1891, A. 32—37 u. 60. (Bibliographie.)

Speziell die partiellen Differentialgleichungen behandeln folgende Lehrbücher:

J. Dienger, Integration der partiellen Differentialgleichungen. Stuttgart 1862.

B. Riemann, Die partiellen Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen. Vorlesungen, hrsg. von K. Hattendorf. Braunschweig 1869. 315 S. 3. Aufl. 1882.

H. Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Nach Riemanns Vorlesungen. 4. Aufl. 2 Bde. Leipzig 1901. I, XVII u. 506 S.; II, XII u. 527 S.

P. Mansion, Théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris 1875. 282 S. — Deutsch von H. Maser. Berlin 1892.

V. G. Imschenetzky, Sur l'intégration des équations aux différences partielles du premier ordre. Mém. de Kazan 1868. Trad. du russe par J. Hoüel. 2. éd. Paris 1873.

E. J. B. Goursat, Leçons sur l'intégration des équations aux différences partielles du premier ordre. Réd. par C. Bourlet. Paris 1891. 354 S. — Deutsch von H. Maser. Leipzig 1893. XII u. 416 S.

E. J. B. Goursat, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes. Paris 1896. VIII u. 226 S. T. I. Problème de Cauchy. Caractéristiques. Intégrales intermédiaires. T. II. La méthode de Laplace. Les systèmes en involution. La méthode de M. Darboux. Les équations de la première classe. Transformations des équations du second ordre. Généralisations diverses. Paris 1898. 344 S.

Ed. v. Weber, Vorlesungen über das Pfaffsche Problem und die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Leipzig 1900. XI u. 622 S.

Ét. Delassus, Leçons sur la théorie analytique des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris 1897. 88 S.

S. Lie, Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Bearb. u. hersg. von G. Scheffers. Leipzig 1891. 568 S.

Ed. v. Weber, Partielle Differentialgleichungen. Encykl. d. math. Wiss. II A, 5, 294—399. Leipzig 1900.

§ 3. Spezielles. Neuere Originalarbeiten.

J. Fr. Pfaff, Methodus generalis, aequationes differentiarum partialium, nec non aequationes differentiales vulgares, utrasque primi ordinis, inter quotcunque variabiles, complete integrandi. Abh. Ak. Berlin 1814/5, 76—136 [1818].

A. L. Cauchy, Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux différences partielles et à coefficients constants. Journ. Ec. Polyt. **12**, cah. 19, 1823.

C. G. J. Jacobi, Über die Reduction der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen irgend einer Zahl Variabeln auf die Integration eines einzigen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen. Journ. f. Math. **17**, 97—162, 1837. — Theoria novi multiplicatoris systemati aequationum differentialium vulgarium applicandi. ib. **27**, 199, 1844; **29**, 213 u. 333, 1845. Zus. 181 S. — Nova methodus, aequationes differentiales partiales primi ordinis inter numerum variabilium quemcumque propositas integrandi. Aus d. Nachlaß hersg. von A. Clebsch. Journ. f. Math. **60**, 1—181. 1862. — Vorlesungen über Dynamik. Hrsg. von A. Clebsch. Berlin 1866. Werke, Supplbd. Berlin 1884.

A. Mayer, Über die Jacobi-Hamiltonsche Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Math. Ann. **3**, 435—452, 1871. — Über die Integration simultaner partieller Differentialgleichungen der ersten Ordnung mit derselben unbekannten Funktion. ib. **4**, 88—96, 1871. — Über unbeschränkt integrable Systeme von linearen totalen Differentialgleichungen und die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen. ib. **5**, 448—470, 1872.

S. Lie, Über eine neue Integrationsmethode partieller Differentialgleichungen erster Ordnung. Nachr. Ges. Wiss. Gött. 1872, 321—326. — Begründung einer Invariantentheorie der Berührungstransformation. Math. Ann. **8**, 215—303, 1874. — Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Math. Ann. **10**, 245—296. 1875, u. **11**, 464—557, 1876.

S. v. Kowalevsky, Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Journ. f. Math. **80**, 1—32, 1875.

L. Fuchs, Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Koefficienten. Pr. Berlin 1865. Journ. f. Math. **66**, 121—161, 1866; **68**, 354—386, 1868.

L. W. Thomé, Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. Journ. f. Math. **74**, 193—218, 1872; **75**, 265—291; **76**, 273—291, 1873; **78**, 223—245, 1874; **81**, 1—32, 1875; **83**, 89—111, 1877; **91**, 78—198, 341—346, 1881; **95**, 44—98, 1883, **96**, 185—281, 1884.

J. Tannery, Propriétés des intégrales des équations différentielles linéaires à coefficients variables. Ann. Ec. Norm. (2) **4**, 113—182, 1875.

G. Floquet, Sur la théorie des équations différentielles linéaires. Ann. Ec. Norm. (1) **8**, Suppl., 3—132, 1879. Auch Paris 1879.

L. Fuchs, Über die Werte, welche die Integrale einer Differentialgleichung erster Ordnung in singulären Punkten annehmen können. Monatsber. Ak. Berlin 1884, 279—300.

G. Frobenius, Über den Begriff der Irreductibilität in der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Journ. f. Math. **76**, 236—271, 1873. — Über die Integration der linearen Differentialgleichungen durch Reihen. ib. 214—235. 1873.

L. Königsberger, Allgemeine Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen. Leipzig 1882. 246 S.

P. Dubois-Reymond, Beiträge zur Integration der partiellen Differentialgleichungen mit drei Variabeln. I (einz.) (Die Theorie der Charakteristiken.) Leipzig 1864.

V. G. Imschenetsky, Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Trad. du russe par J. Hoüel. Arch. Math. Phys. **50**, 278—474. 1869.

J. Graindorge, Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles des deux premiers ordres. Mém. Soc. Liège (2) **5**. Paris 1872.

G. Darboux, Mémoires sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Mém. prés. Ac. sc. Paris **27**, 1883.

J. H. Poincaré, Sur l'intégration algébrique des équations différentielles du 1. ordre et du 1. degré. Rend. circ. mat. Pal. **5**, 161—191, 1891; **11**, 193—239, 1897.

Aloys Mayr, Der integrierende Faktor und die particulären Integrale. Würzburg 1868.

A. Lafon, Sur l'intégration des équations différentielles de la mécanique. Thèse. Paris 1854.

J. H. Poincaré, Sur les équations aux dérivées partielles de la physique mathématique. Amer. Journ. **12**, 211—294, 1890.

J. H. Poincaré, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. T. I. Solutions périodiques. Non-existence des intégrales uniformes. Solutions asymptotiques. Paris 1892. 385 S. T. II. Méthodes de MM. Newcomb, Gyldén, Lindstedt et Bohlin. ib. 1893. VIII u. 479 S. T. III. Invariants intégraux. Solutions périodiques du deuxième genre. Solutions doublement asymptotiques. ib. 1899. IV u. 414 S.

J. König, Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln. Math. Ann. **24**, 465—537, 1884.

Ch. M. Mason, Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. Diss. Göttingen. 1903. IV u. 75. gr. 8°.

A. Sommerfeld, Randwertaufgaben in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Encykl. d. math. Wiss. II A 7 c, 2, I, 504—570. 1900.

§ 4. Einige besondere Differentialgleichungen.

Jac. Riccati, Animadversiones in aequationes differentiales secundi gradus. Acta Erud. Suppl. VIII, 1722.

L. Euler, Constructio aequationis differentialis $ax^n\,dx = dy + y^2\,dx$. (Riccatianae.) Comm. Ac. Petrop. **6**, a. 1732—33, 231—246 [1739].

P. Helmling, Über die Integration der allgemeinen Riccatischen Gleichung und der von ihr abhängigen Differentialgleichungen. Leipzig 1879. 43 S. 4°.

J. W. L. Glaisher, On Riccati's equation and its transformation, and on some definite integrals which satisfy them. Phil. Trans. London **172**, 759—828. 1882. (Auch Literatur.)

L. Euler, De integratione aequationis differentialis $\frac{m\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{n\,dy}{\sqrt{1-y^4}}$. Novi Comm. Ac. Petrop. **6**, a. 1756—57, 37—57 [1761]. — Observationes de comparatione arcuum irrectificabilium. ib. 58—84. — Consideratio formularum, quarum integratio per arcus sectionum conicarum absolvi potest. Novi Comm. Ac. Petrop. **8**, a. 1760—61, 129—149 [1763]. — De reductione formularum integralium ad rectificationem ellipsis et hyperbolae. Novi Comm. Ac. Petrop. **10**, a. 1764, 3—50 [1766]. — Integratio aequationis $\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$. Novi Comm. Ac. Petrop. **12**, a. 1766—67, 316 [1768]. — Evolutio generalior formularum comparatione curvarum inserventium. ib. 42—86.

R. Sturm, Über den integrierenden Faktor der elliptischen Differentialgleichung. Math. Ann. **21**, 446—455. 1883.

Ch. Hermite, Sur l'intégration de l'équation différentielle de Lamé. Journ. f. Math. **89**, 9—18. 1880.

E. E. Kummer, De generali quadam aequatione differentiali 3. ordinis. Pr. Liegnitz 1834. Abgedr. Journ. f. Math. **100,** 1—9, 1886. — Über die hypergeometrische Reihe. Journ. f. Math. **15,** 39 u. 127. 1835. 92 S.

E. Goursat, Sur l'équation différentielle linéaire, qui admet pour intégrale la série hypergéométrique. Ann. Ec. Norm. (2) **10,** Suppl. 3—142. 1881. — Mémoire sur les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur. Ann. Ec. Norm. (2) **12,** 261—287, 395—430. 1883. — Recherches sur les intégrales algébriques de Kummer. Journ. math. p. appl. (4) **3,** 255—305. 1887.

F. Brioschi, Sulle equazioni differenziali del tetraedro, dell' ottaedro e dell' icosaedro. Ann. di mat. p. appl. (2) **10,** 101—128. 1881.

A. Wangerin, Reduktion der Potentialgleichung für gewisse Rotationskörper auf eine gewöhnliche Differentialgleichung. Preisschr. Jablon. Ges. Leipzig 1875. 32 S. 4°.

Fr. Pockels, Über die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ und deren Auftreten in der mathematischen Physik. Leipzig 1891. xii u. 399 S.

Die Literatur einiger anderer Differentialgleichungen wird in der allgemeinen Funktionentheorie und in der Theorie besonderer transzendenter Funktionen gegeben werden.

Kapitel 5. Variationsrechnung.

§ 1. **Historisches. Einleitung. Ältere Originalarbeiten.** Die Anfänge der Variationsrechnung reichen bis auf Newton und Leibniz zurück. Der Briefwechsel Leibniz' mit Johann Bernoulli wurde für die Entwickelung der Methode von Bedeutung; noch wichtiger sind die veröffentlichten Lösungen des isoperimetrischen Problems. Es handelt sich in der Variationsrechnung um eine Methode, größte und kleinste Werte (Extrema) zu bestimmen von Funktionen, die nicht unmittelbar gegeben sind. Die Probleme der Isoperimetrie und der Brachistochrone waren es, an denen sich diese Methode entwickelte.

Jac. Bernoulli, Analysis magni problematis isoperimetrici. Acta Erud. 1701, 213.

L. Euler, Problematis isoperimetrici in latissimo sensu accepti solutio generalis. Comm. Ac. Petrop. **6,** a. 1732—33, 123—155 [1739]. — Curvas maximi minimive proprietate gaudentium inventio nova et facilis. Comm. Ac. Petrop. **8,** a. 1736, 159—190 [1741]. — Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti. Lausannae et Genevae 1744. 320 S. 4°. Teilweise in deutscher Übersetzung hrsg. von P. Stäckel in „Abhandlungen über Variationsrechnung. I. T. Abhandlungen von Joh. Bernoulli (1696), Jac. Bernoulli (1697) und Leonhard Euler (1744)." Ostw. Klass. d. ex. Wiss. Nr. 46. Leipzig 1894. 144 S. kl. 8°.

J. L. Lagrange, Recherches sur la méthode des maxima et minima. Misc. Taur. **1,** 1759, 18—35. — Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et minima des formules intégrales indéfinies. Mél. Turin **2,** a. 1760—61, 173 [1762]. (Deutsch s. unten.)

L. Euler, Elementa calculi variationum. Novi Comm. Ac. Petrop. **10,** a. 1764, 51—92 [1766]. — Analytica explicatio methodi maximorum et minimorum. ib. 94—134.

J. L. Lagrange, Observations sur la méthode des variations. Mél. Turin **4,** a. 1766—69, 163—187 [1770]. — Deutsch von P. Stäckel: Abhandlungen über Variationsrechnung. T. II. Abhandlungen von Lagrange (1762, 1770), Legendre (1786) und C. G. J. Jacobi (1837). Ostw. Klass. d. ex. Wiss. Nr. 47. Leipzig 1894. 110 S. kl. 8°.

L. Euler, Institutionum calculi integralis III. Appendix de calculo variationum.



Petrop. 1769. Deutsch: Integralrechnung III, Übers. von J. Salomon. Anhang 379—486. Wien 1830. — Methodus nova ac facilis calculum variationum tractandi. Novi Comm. Ac. Petrop. **16**, a. 1771, 551—580 [1772].

Die Geschichte der Variationsrechnung behandeln folgende Schriften:

H. Gräffe, Commentatio historiam calculi variationum complectens, inde ab origine calculi differentialis atque integralis usque ad nostra tempora. Gotting. 1825.

K. F. Giesel, Geschichte der Variationsrechnung. I. Pr. Torgau 1857.

A. P. E. Guiraudet, Aperçu historique au sujet des problèmes auxquels s'applique le calcul des variations jusqu'aux travaux de Lagrange. Thèse Paris 1856. — Aperçu historique sur l'origine et le progrès du calcul des variations. Lille 1862.

Is. Todhunter, A history of the calculus of variations during the 19th century Cambridge 1861.

G. Eneström, Framställning af striden om det isoperimetriska problemet. Upsala 1876. 77 S.

L. Anton, Geschichte des isoperimetrischen Problems, eine geschichtliche Darstellung der Variationsrechnung von Bernoulli bis Lagrange. Diss. Leipzig 1888. 77 S.

A. Kneser, Euler und die Variationsrechnung. Vortrag. Festschrift zur Feier des 200. Geburtstages Leonhard Eulers. Leipzig 1907, 21—60. Abh. z. Gesch. d. math. Wiss. Heft XXV.

§ 2. Lehrbücher.

G. W. Strauch, Theorie und Anwendung des sogenannten Variationskalküls. Zürich. 2. Aufl. 1854.

L. L. Lindelöf et **F. N. M. Moigno,** Leçons de calcul des variations. Paris 1861.

J. H. Jellett, An elementary treatise on the calculus of variations. Dublin 1855 Deutsch von Schnuse. Braunschweig 1859.

L. Natani, Die Variationsrechnung. Berlin 1866.

J. Dienger, Grundriß der Variationsrechnung. Braunschweig 1867.

E. Pascal, Calcolo delle variazioni e calcolo delle differenze finite. Milano 1897. XII u. 330. (Auch Geschichte.) Deutsch: Variationsrechnung, von Ad. Schepp. Leipzig 1899. VI u. 146 S.

A. Kneser, Lehrbuch der Variationsrechnung. Braunschweig 1900. XVI u. 311 S. — Variationsrechnung. Encykl. d. math. Wiss. II, 1, 591—625, 1904.

E. Zermelo und **H. Hahn,** Weiterentwicklung der Variationsrechnung in den letzten Jahren. Encykl. d. m. Wiss. II, 626—641, 1904.

H. Hancock, Lectures on the calculus of variations. [The Weierstrassian Theory.] Cincinnati 1904. XVI u. 292 S. 8°.

§ 3. Spezielles.

A. M. Ampère, Recherches sur l'application des formules générales du calcul des variations aux problèmes de Mécanique. Mém. prés. Ac. sc. **1**, 493—523. Paris 1806.

D. Poisson, Mémoire sur le calcul des variations. Mém. de l'Inst. (2) **12**, 223—332. Paris 1833.

C. G. J. Jacobi, Zur Theorie der Variationsrechnung und der Differentialgleichungen Journ. f. Math. **17**, 68—83. 1837.

P. F. Sarrus, Recherches sur le calcul des variations. Pièce pour le concours sur la question relative aux maxima et minima des intégrales multiples. Mém. prés. Ac. sc. (2) **10**, 1—128. Paris 1848.

K. Schellbach, Probleme der Variationsrechnung. Journ. f. Math. **41**, 293—363, 1851.

O. Hesse, Über die Kriterien der Maxima und Minima der einfachen Integrale. Journ. f. Math. **54**, 227—273, 1857.

A. Clebsch, Über die Reduktion der zweiten Variation auf ihre einfachste Form. Journ. f. Math. **55**, 254—273, 1858.
F. Minding, Über die Transformationen, welche in der Variationsrechnung zur Nachweisung größter und kleinster Werte dienen. Journ. f. Math. **55,** 300—309, 1858.
A. Clebsch, Über die zweite Variation vielfacher Integrale. Journ. f. Math. **56,** 123—148, 1859.
R. Lipschitz, Beiträge zur Theorie der Variation der einfachen Integrale. Journ. f. Math. **65**, 26—41, 1866.
Ad. Mayer, Beiträge zur Theorie der Maxima und Minima der einfachen Integrale. Leipzig 1866. viii u. 86 S.
Is. Todhunter, Researches in the calculus of variations, principally on the theory of discontinuous solutions. London 1871. 278 S.
Ad. Mayer, Die Lagrangesche Multiplikationsmethode und das allgemeinste Problem der Variationsrechnung bei einer unabhängigen Variabeln. Ber. Ges. Leipzig **47**, 129—144, 1895.
A. Kneser, Beiträge zur Theorie und Anwendung der Variationsrechnung. I. Math. Ann. **55**, 86—107, 1901; II. ib. **56**, 169—232. 1902.

B. Funktionentheorie.

Kapitel 1. Allgemeines.

§ 1. **Einleitung.** Der Begriff der Funktion entwickelte sich zugleich mit der Koordinatengeometrie, die von Fermat und Descartes bei Beginn des 17. Jahrhunderts geschaffen wurde. Von einer gegenseitigen Abhängigkeit zweier veränderlichen Größen ist wiederholt die Rede bei Leibniz, Joh. I. Bernoulli, Jacob I. Bernoulli u. a. am Ende des 17. und Anfange des 18. Jahrhunderts. Joh. I. Bernoulli und Leonhard Euler definierten die Funktion als einen aus Veränderlichen und Konstanten zusammengesetzten Ausdruck. Durch seine Introductio in analysin infinitorum 1748 wurde Euler der Begründer der Analysis, als einer selbständigen Wissenschaft. Nach ihm waren Cauchy, Riemann und Weierstraß die Hauptförderer dieser neuen Disziplin.

§ 2. **Geschichte und Bibliographie.** Außer den Werken über Geschichte der Mathematik im allgemeinen sind für die Geschichte und Bibliographie der Theorie der Funktionen insbesondere folgende Schriften zu Rate zu ziehen:

A. Brill und **M. Nöther,** Die Entwickelung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit. Jhrsber. d. Dtsch. Math.-Ver. **3**, 107—566, 1892—94.
P. Stäckel, Integration durch imaginäres Gebiet. Ein Beitrag zur Geschichte der Funktionentheorie. Bibl. math. (3) **1**, 109—128, 1900. — Beiträge zur Geschichte der Funktionentheorie im achtzehnten Jahrhundert. Bibl. math. (3) **2**, 111—121, 1901.
A. Sachse, Versuch einer Geschichte der Darstellung willkürlicher Funktionen einer Variabeln durch trigonometrische Reihen. Abh. z. Gesch. d. math. Wiss. Heft III. Leipzig 1880. 43 S. (s. § 3, S. 91.)
B. Riemann, Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe. Habil. Schrift Göttingen 1854. Abh. Gött. Ges. **15**, 1867. 40 S.
J. Bertrand, Rapport sur les progrès les plus récents de l'analyse mathématique. Paris 1867.



F. Casorati, Teorica delle funzioni di variabile complesse. I (einz.) Pavia 1868. (Die Einleitung 1—143 ist rein historisch.) Darüber E. Beltrami, Articolo bibliografico. Giorn. mat. p. appl. 7, 29—41. 1869.

H. Burkhardt, Entwicklungen nach oszillierenden Funktionen. Bericht, erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Leipzig 1901—1908. Jhrsb. d. Dtsch. Math.-Ver. **10**, 1—1804. (Darstellung willkürlicher Funktionen durch Reihen, die nach oszillierenden Funktionen fortschreiten, und den Anwendungen auf mechanische und physikalische Probleme.)

A. Pringsheim, Grundlagen der allgemeinen Funktionenlehre. Encykl. d. math. Wiss. **2**, 1—53. 1899.

S. Pincherle, Pour la bibliographie de la théorie des opérations distributives. Bibl. math. (2) **13**, 13—18, 1899.

L. Königsberger, Zur Geschichte der Theorie der elliptischen Transcendenten in den Jahren 1826—1829. Leipzig 1879. 104 S.

A. Enneper, Elliptische Funktionen. Theorie und Geschichte. Akademische Vorträge. Halle a. S. 1876. 2. Aufl. von Felix Müller. Halle a. S. 1890. XIX u. 598 S.

G. Bellacchi, Introduzione storica alla teoria delle funzioni ellittiche. Firenze 1894. IV u. 316 S.

H. Hancock, The historical development of Abelian functions up to the time of Riemann. Rep. Brit. Ass. 1897, 246—286.

J. V. Pexider, Übersicht über die Literatur des Abelschen Theorems. Bibl. math. (3) **4**, 52—64, 1903.

R. Weth, Zur Entwicklungsgeschichte des Funktionsbegriffes. Diss. Basel 1891.

A. Hurwitz, Über die Entwickelung der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen in neuerer Zeit. Verh. intern. Math. Kongr. **1**, 81—112. 1897.

§ 3. Ältere und neuere Lehrbücher.

L. Euler, Introductio in analysin infinitorum. 2 v. 4⁰. Lausannae 1748. Deutsch von Michelsen. 3 Teile. Berlin 1788—91. I. T. Dtsch. von H. Maser. Berlin 1885. XII u. 320. (Enthält im I. Teile eine elementare Funktionenlehre.)

J. L. Lagrange, Leçons sur le calcul des fonctions. Séances Éc. Norm. 1801; 2ᵉ éd. Paris 1806. Oeuvres X, Paris 1884. Oeuvres X. Deutsch von A. L. Crelle, Berlin 1823.

A. L. Cauchy, Cours d' analyse de l'École polytechnique. I. Analyse algébrique. Paris 1821. — Deutsch von B. Huzler, Königsberg 1828; von C. Itzigsohn, Berlin 1885. XII u. 398.

C. H. Berger, Étude sur les fonctions des variables imaginaires d'après Cauchy. Thèse. Montpellier 1863.

F. Grelle, Elemente der Theorie der von reellen Veränderlichen abhängigen Funktionen. Leipzig 2. Aufl. 1881. 268 S. Neudruck 1885.

J. Hoüel, Théorie élémentaire des quantités complexes. Paris 1874. 586 S.

F. Casorati, Teorica delle funzioni di variabili complesse. Pavia P. I (einz.) 1868. 471 S. (Schon oben § 2 für die Geschichte genannt.)

G. Durège, Elemente der Theorie der Funktionen einer komplexen veränderlichen Größe. Mit besonderer Berücksichtigung der Schöpfungen Riemanns bearbeitet. Leipzig 1864; 4. Aufl. 1893. X u. 300 S. Engl. von G. E. Fischer und J. J. Schwatt. Piladelphia 1896. 288 S.

J. Thomae, Abriß einer Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen und der Thetafunktionen. Halle a. S. 1870; 3. Aufl. 1890. 144 S. — Elementare Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Halle a. S. 1880; 2. Aufl. 1898. VIII u. 150 gr. 4⁰.

M. Marie, Théorie des fonctions des variables imaginaires. I—III. Paris 1874—76.

R. Lipschitz, Lehrbuch der Analysis. 2 Bde. Bonn 1877 u. 1880. 594 u. 734 S.

P. du Bois-Reymond, Die allgemeine Funktionentheorie. I (einz.). (Metaphysik und Theorie der mathematischen Grundbegriffe; Größe, Grenze, Argument und Funktion.) Tübingen 1882. XIV u. 292 S.

O. Rausenberger, Lehrbuch der Theorie der periodischen Funktionen einer Variabeln mit einer endlichen Anzahl wesentlicher Diskontinuitätspunkte, nebst einer Einleitung in die allgemeine Funktionentheorie. Leipzig 1884. VIII u. 476 S.

J. Tannery, Introduction à la théorie des fonctions d'une variable. Paris 1886. 2. éd. I. Nombres irrationnels, ensembles, limites, fonctions élémentaires, dérivées. Paris 1904. IX u. 422 S.

O. Biermann, Theorie der analytischen Funktionen. Leipzig 1887. X u. 452 S.

M. Dini, Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali. Pisa 1878. — Deutsch von J. Lüroth und Ad. Schepp. Leipzig 1892. XVIII u. 554 S. (Auch Literaturverzeichnis.)

J. Harkneß and **F. Morley,** Theory of functions. London 1893. IX u. 507 S.

L. Bianchi, Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche. Anno 1898—99. Pisa 1899. P. I. Funzioni monodrome di variabile complessa. 326 S. P. II. Funzioni ellittiche. 480 S.

A. R. Forsyth, The theory of functions of a complexe variable. Cambridge 1893. 2[d]. ed. 1900. XXIV u. 782 S.

S. Pincherle, Lezioni sulla teoria delle funzioni analitiche. Raccolti per cura del Dr. A. Bottari. Bologna 1900. XVIII u. 566. 4⁰.

G. Vivanti, Teoria delle funzioni analitiche. Milano, Hoepli. 1901. VIII u. 431 S. 12⁰. Dtsch. Umarb. von A. Gutzmer. Leipzig 1906. VI u. 512.

E. T. Whittaker, A course of modern analysis. An introduction to the general theory of infinite series and of analytic functions; with an account of the principal transcendental functions. Cambridge 1902. XVI u. 378 S.

L. J. Petersen, Forelaesninger over functionsteori. I—III. Kjöbenhavn 1895. — Vorlesungen über Funktionentheorie. Kopenhagen 1898. VI u. 328 S.

H. Burkhardt, Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Leipzig 1897. 2. Aufl. 1903. XII u. 227 S.

G. Vivanti, Lezioni sulla teoria delle funzioni analitiche. Reggio Calabria. Lith. 1896. 435 S.

R. Fricke, Kurzgefaßte Vorlesungen über verschiedene Gebiete der höheren Mathematik mit Berücksichtigung der Anwendungen. Analytisch-funktionentheoretischer Teil. Leipzig 1900. IX u. 520 S.

Ed. A. Fouët, Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques. I. Paris 1902. 330 S. II. (Fonctions en général. Fonctions analytiques; Leurs modes de définition et de représentation. Théorèmes d'existence. Étude des fonctions analytiques au point de vue de Cauchy, de Weierstraß, de Riemann.) 1904. XI u. 299 S.

G. Robin, Théorie nouvelle des fonctions, exclusivement fondée sur l'idée de nombre. Publ. p. L. Raffy. Paris 1903. VI u. 215 S.

W. F. Osgood, Allgemeine Theorie der analytischen Funktionen a) einer und b) mehrerer komplexen Größen. Encykl. d. math. Wiss. II, 2, 1—114. 1902.

§ 4. Spezielle Gebiete der Funktionentheorie. Besondere Probleme.

V. Puiseux, Recherches sur les fonctions algébriques. Journ. de math. p. appl. **15**, 1850 u. **16**, 1851. — Deutsch von H. Fischer. Halle 1861. 143 S.

M. Hamburger, Über die Entwickelung algebraischer Funktionen in Reihen. Ztschr. Math. Phys. **16**, 461—491. 1871.

B. Riemann, Allgemeine Voraussetzungen und Hilfsmittel für die Untersuchung von Funktionen unbeschränkt veränderlicher Größen. Journ. f. Math. **54**, 101—104. 1857. — Lehrsätze aus der Analysis situs für die Theorie der Integrale von zweigliedrigen vollständigen Differentialen. ib. 105—110. — Bestimmung einer Funktion einer veränderlichen komplexen Größe durch Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen. ib. 111—114.

C. Neumann, Das Dirichletsche Prinzip in seiner Anwendung auf die Riemannschen Flächen. Leipzig 1865. 80 S.



B. Riemann, Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen komplexen Größe. Göttingen 1851. 2. Abdruck 1867. 32 S.
F. Klein, Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale. Eine Ergänzung der gewöhnlichen Darstellungen. Leipzig 1882. 82 S.
C. Guichard, Théorie des points singuliers essentiels. Paris 1883. 98 S. 4°.
E. Schering, Das Anschließen einer Funktion an algebraische Funktionen in unendlich vielen Stellen. Abh. Ges. Gött. **27**, 1880. 62 S.
R. Dedekind und **H. Weber,** Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen. Journ. f. Math. **92**, 181—291. 1882.
K. Weierstraß, Abhandlungen aus der Funktionenlehre. Berlin 1886. 262 S.
P. de Bois-Reymond, Bemerkungen über $\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. Journ. f. Math. **103**, 204—229. 1888.
P. Appell et **Ed. Goursat,** Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales. Étude des fonctions analytiques sur une surface de Riemann. Paris 1895. x u. 530 S.
P. E. A. Riquier, Sur les principes de la théorie générale des fonctions. Ann. Ec. Norm. (3) **8**, 59—86, 141—172. 1891.
K. Hensel und **G. Landsberg,** Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale. Leipzig 1902. 707 S.
E. Netto, Rationale Funktionen einer Veränderlichen; ihre Nullstellen. Encykl. der math. Wiss. I, 227—254. 1899. — Rationale Funktionen mehrerer Veränderlichen. ib. 255—282. 1899.
W. Wirtinger, Algebraische Funktionen und ihre Integrale. Encykl. d. math. Wiss. II, B, 2. **2**, 2, 115—175. Leipzig 1901.
R. Fricke und **F. Klein,** Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen. 2 Bde. Leipzig. I. Die gruppentheoretischen Grundlagen. 1897. xiv u. 634 S. II. Die funktionentheoretischen Ausführungen und die Anwendungen. 1. Hälfte: Engere Theorie der automorphen Funktionen. 1901. 282 S.
H. Poincaré, Théorie des groupes fuchsiens. Acta math. **1**, 1—62. 1882. — Mémoire sur les fonctions fuchsiennes. ib. 193—294. 1883. — Mémoire sur les groupes kleinéens. Acta math. **3**, 49—92. 1883. — Les fonctions fuchsiennes et l'équation $\Delta u = e^u$. Journ. de Math. (5) **4**, 137—230. 1898. — Sur les propriétés du potentiel et sur les fonctions abéliennes. Acta math. **22**, 89—178. 1898.
F. Klein, Neue Beiträge zur Riemannschen Funktionentheorie. Math. Ann. **21**, 141—218. 1883.
E. Ritter, Die eindeutigen automorphen Formen vom Geschlecht Null; eine Revision und Erweiterung der Poincaréschen Sätze. Diss. Göttingen 1892 u. Math. Ann. **41**, 1—82. 1892.
E. Ritter, Die Stetigkeit der automorphen Funktionen bei stetiger Abänderung des Fundamentalbereichs. I. T. Symmetrische Fundamentalberichte. Math. Ann. **45**, 473—544, 1894. II. T. Allgemeine Fundamentalbereiche. ib. **46**, 200—248, 1895.
Em. Borel, Leçons sur la théorie des fonctions. (Exposé sur la théorie des ensembles.) Paris 1898. ix u. 136 S. — Leçons sur les fonctions entières. Paris 1900. vi u. 124 S. — Leçons sur les fonctions méromorphes. Réd. p. L. Zoretti. Paris 1903. vi u. 119 S. — Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes. Paris 1905. viii u. 158 S.
O. Stolz und **J. A. Gmeiner,** Einleitung in die Funktionentheorie. Leipzig 1904. vi u. 242 S. — 2. Aufl. I. Abt. 1904. II. Abt. 1905. 598 S.
J. Ch. Fields, Theory of the algebraic functions of a complex variable. Berlin 1906. 186 S.
M. Pasch, Über einige Punkte der Funktionentheorie. Math. Ann. **30**, 132—154. 1887. (Grundlehren der Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen.)

L. Königsberger, Beweis der Unmöglichkeit der Existenz eines anderen Funktionaltheorems als des Abelschen. Festschrift Heidelberg. Journ. f. Math. **100**, 121—136; **101**, 1—72. 1887.

K. Weierstraß, Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen. Abh. Ak. Berlin 1876, 11—60.

G. Mittag-Leffler, Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes d'une variable indépendante. Acta math. **4**, 1—79, 1884. — Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction homogène. Acta math. **23**, 43—61, 1899; **24**, 183—244, 1900; **26**, 353—392, 1902; **29**, 101—182, 1905.

E. Borel, Sur les séries de polynomes et de fractions rationnelles. Acta math. **24**, 309—382. Add. ib. 383—388. 1901.

P. Painlevé, Sur les lignes singulières des fonctions analytiques. Ann. Fac. Toulouse **2**; 130 S. 1888.

J. Hadamard, Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor. Journ. de math. p. appl. (4) **8**, 101—186. 1892. Thèse. Paris 1892. 86 S. 4°. — La série de Taylor et son prolongement analytique. Paris 1901. 102 S.

E. Borel, Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor. Études sur les propriétés de la fonction entière et en particulier d'une fonction considérée par Riemann. Mém. cour. Paris 1902. 132 S. 4°.

H. Padé, Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles. Ann. Éc. Norm. (3) **9**, Suppl. 3—93. 1892. Thèse. Paris 1892. 93 S. 4°.

A. Paraf, Sur le problème de Dirichlet et son extension au cas de l'équation linéaire générale du second ordre. Ann. Fac. Toulouse **6** H, 1—75. Thèse. Paris 1892. 75 S. 4°.

C. Scheffers, Verallgemeinerung der Grundlagen der gewöhnlichen komplexen Funktionen. I. II. Ber. Ges. Leipzig. **45**, 828—848, 1893; **46**, 120—134, 1894.

E. Picard et **G. Simart,** Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes. I. Paris 1897. vi u. 246. II, 1. 1899. iv u. 206.

K. Hensel, Über eine neue Theorie der algebraischen Funktionen zweier Variabeln. Acta math. **23**, 339—416. 1900.

K. Hensel, Zur Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen und der Abelschen Integrale. Math. Ann. **54**, 437—497. 1901.

P. Cousin, Sur les fonctions de n variables complexes. Acta math. **19**, 1—62, 1895.

E. Picard, Mémoire sur les fonctions entières. Ann. Éc. Norm. (2) **9**, 147—166, 1880.

E. W. Barnes, A memoir of integral functions. Phil. Trans. Lond. **194** (A), 411—500, 1902. — On the classification of integral functions. Trans. Cambr. **19**, 322—355, 1903.

E. Lindelöf, Mémoire sur la théorie des fonctions entières de genre fini. Acta Soc. Fenn. **31**. 1902. iv u. 79 S. 4°.

A. Pringsheim, Elementare Theorie der ganzen transzendenten Funktionen von endlicher Ordnung. Math. Ann. **58**, 257—342. 1905.

P. Boutroux, Sur quelques propriétés des fonctions entières. Acta math. **28**, 97—224. 1904.

R. Mattson, Contributions à la théorie des fonctions entières. Diss. Upsala 1905. 96 S.

G. Vivanti, Lezioni sulla teoria delle funzioni modulari. Reggio Calabria 1903. 264 S. (lith.).

O. Blumenthal, Über die Modulfunktionen von mehreren Veränderlichen. Math. Ann. **56**, 509—548, 1903; **58**, 497—529, 1904.

F. Hartogs, Beiträge zur elementaren Theorie der Potenzreihen und der eindeutigen analytischen Funktionen zweier Veränderlicher. Diss. München 1904. — Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Ver-

änderlicher, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten. Habil. Schr. München 1905. 88 S.; Math. Ann. **62**, 1—88. 1906.

G. Faber, Über die zusammengehörigen Konvergenzradien von Potenzreihen mehrerer Veränderlicher. Habil. Schr. Karlsruhe 1905; Math. Ann. **61**, 289—324. 1906.

D. Hilbert, Über das Dirichletsche Prinzip. Göttingen 1901. 27 S. Math. Ann. **59**, 161—186, 1904. Journ. f. Math. **129**, 63—67, 1905.

O. D. Kellogg, Zur Theorie der Integralgleichungen und des Dirichletschen Prinzips. Diss. Göttingen 1902. 43 S.

L. Silla, Il principio di Dirichlet e il problema dei valori al contorno. Giorn. di mat. **40**, 37—104, 1902. (Geschichte und Literatur.)

D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Gött. Nachr. 1904, 49—91, 213—259: 1905, 307—338; 1906, 157—227.

§ 5. **Komplexe Größen. Quaternionen, Äquipollenzen.** Die Theorie der komplexen Größen spielt in verschiedenen Gebieten der Analysis eine wichtige Rolle. Daher haben wir Schriften über dieselbe mehrfach in früheren Gebieten angeführt, in der Algebra, der niederen und höheren Arithmetik und in der Funktionentheorie. Es sollen hier als Ergänzung die wichtigeren Schriften über höhere komplexe Größen, über die geometrische Darstellung der komplexen Größen und über Quaternionen genannt werden sowie über Äquipollenzen.

F. Study, Theorie der gemeinen und höheren komplexen Größen. Encykl. d. math. Wiss. **1**, 147—183. 1898.

C. Wessel, Om Directionens analytiske Betegning, et Forsög anvendt fornemmelig til plane og sphaeriske Polygoners Oplösning. Nye Saml. Danske Selsk. Skrifter **5**, 469—518, 1799. — Essai sur la représentation analytique de la direction. Publié avec préfaces de H. Valentiner et T. N. Thiele par l'Académie R. d. sc. de Danemark à l'occasion du centenaire de sa présentation à l'Académie le 10. mars 1797. Copenhage 1897. xiv u. 60.

R. Argand, Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires. Paris 1806. 2e. éd. suivie d'un Appendice contenant des Extraits des Annales de Gergonne. Par M. J. Hoüel. 1874.

C. F. Gauß, Anzeige zur „Theoria residuorum biquadraticorum, Commentatio secunda", Gött. 1831. Werke II, 174.

F. Vallès, Études philosophiques sur la science du calcul, Paris 1841. — Des formes imaginaires en algèbre. 3 P. Paris 1869—72.

H. Scheffler, Über das Verhältnis der Arithmetik zur Geometrie, insbesondere über die geometrische Bedeutung der imaginären Zahlen. Braunschweig 1846.

M. W. Drobisch, Über die geometrische Konstruction der imaginären Größen. Ber. Sächs. Ges. **2**, a. 1848, 171—178 [1849].

A. L. Cauchy, Mémoire sur les quantités géométriques. Exercices d'analyse et de physique mathématique. IV. Paris 1847.

K. G. C. v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage. Nürnberg 1856—60.

O. Stolz, Die geometrische Bedeutung der komplexen Elemente in der analytischen Geometrie. Math. Ann. **4**, 416—441, 1871.

F. August, Untersuchungen über das Imaginäre in der Geometrie. Pr. Berlin 1872. 28 S. 4°.

O. Frege, Über eine geometrische Darstellung der imaginären Größen in der Ebene. Diss. (Göttingen). Jena 1873.

M. Marie, Réalisation et usage des formes imaginaires en géométrie. Paris 1891.

Z. G. de Galdeano, El concepto del imaginarismo en la ciencia matematica. Zaragoza 1894. 32 S. (Auch Historisches.)

E. Study, Kürzeste Wege im komplexen Gebiet. Math. Ann. **60**, 321—377. 1905.
G. Scheffers, Isogonalkurven, Äquitangentialkurven und komplexe Zahlen. Math. Ann. **68**, 491—530. 1905.
H. Hankel, Theorie der komplexen Zahlensysteme, insbesondere der gemeinen imaginären Zahlen und der Hamiltonschen Quaternionen nebst ihrer geometrischen Darstellung. Leipzig 1887. 196 S. (Geschichte und Literatur.)
K. Weierstraß, Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten komplexen Größen. Gött. Nachr. 1884, 395—419.
R. Dedekind, Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten komplexen Größen. Gött. Nachr. 1885, 141—159. — Erläuterungen zur Theorie der sogenannten allgemeinen komplexen Größen. Gött. Nachr. 1887, 1—7.
B. Berloty, Théorie des quantités complexes à n unites principales, Thèse. Paris 1886. 125 S. (Historisches.)
J. Petersen, Über n-dimensionale complexe Zahlen. Gött. Machr. 1887, 489—502.
A. Krüger, Lehrhuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen. Stuttgart 1891. viii u. 166.
Th. Molien, Über Systeme höherer komplexer Zahlen. Math. Ann. **41**, 83—156. 1892.
H. E. Hawkes, On hypercomplex number systems. Trans. Amer. Math. Soc. **3**, 312—330. 1902.

Die Darstellung der komplexen Größen der Ebene wurde in England der Keim zur Entdeckung der Quaternionen.

W. Rowan Hamilton, Lectures on quaternions. Dublin 1853. 736 S. — Elements of quaternions. London 1866. 762 S. — Elemente der Quaternionen. Dtsch. von P. Glan. Leipzig. 2 Bde. 1882—84. I. Theorie der Quaternionen. 746 S. II. Anwendungen. 436 S.
P. G. Tait, An elementary treatise on quaternions. 2d. ed. Cambridge 1873. 296 S. 3. ed. 1890. — Elementares Handbuch der Quaternionen. Übers. von G. v. Scherff. Leipzig 1880. 332 S. — Traité élémentaire des quaternions. Fr. von G. Plarr. 2 v. Paris I. 1882. II. 1884.
P. Kelland and **P. G. Tait,** Introduction to quaternions, with numerous examples. London 1873. 227 S. 2. Aufl. 1882; 3. Aufl. 1904.
J. Hoüel, Éléments de la théorie des quaternions. Paris 1874. 298 S.
G. Dillner, Versuch einer neuen Entwickelung der Hamiltonschen Methode, genannt „Calculus of quaternions". Math. Ann. **11**, 168—199, 1877.
J. Odstrčil, Kurze Anleitung zum Rechnen mit den (Hamiltonschen) Quaternionen. Halle 1879. 79 S.
K. W. Unverzagt, Über die Grundlagen der Rechnung mit Quaternionen. Pr. Wiesbaden 1881.
C. A. Laisant, Introduction à la méthode des quaternions. Paris 1881.
D. Padeletti, Principii della teoria dei quaternioni elementarmente esposti. Giorn. mat. Battaglini **20**, 1—48, 1882.
Fr. Gräfe, Vorlesungen über die Theorie der Quaternionen, mit Anwendung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung. Leipzig 1883. iv u. 164.
H. W. L. Hime, The outlines of quaternions. London 1894. xvi u. 190.
P. Molenbroek, Theorie der Quaternionen, Leiden 1891. 284 S. — Anwendung der Quaternionen auf die Geometrie. Leiden 1893. xv u. 253.
A. Macfarlane, Principles of the algebra of physics. Proc. Amer. Ass. 1891, 65—117. — The imaginary of algebra. Proc. Amer. Ass. 1892, 33—55. — A report on recent progress in the quaternion analysis. Proc. Amer. Ass. **51**, 305—326. 1902. (Historisch.) — Bibliography of quaternions and allied systems of mathematics. New York a. Dublin 1904. 86 S. — Vector analysis and quaternions. New York 1906.
C. J. Joly, Manuel of quaternions. London 1905. 348 S.

K. W. Unverzagt, Theorie der goniometrischen und der longimetrischen Quaternionen, zugleich als Einführung in die Rechnung mit Punkten und Vectoren. Wiesbaden 1876. 312 S.

Die geometrische Darstellung der imaginären Größen wurde in Italien unabhängig durch G. Bellavitis gefunden, der darauf seine Theorie der Äquipollenzen begründete.

G. Bellavitis, Calcolo delle equipollenze. Padova 1835. — Méthode des équipollences. Ann. Ist. Lomb.-Ven. **7**, 1837. — Sur la méthode des équipollences. Bull. bibl. Terquem. **1**, 60—62, 1855. — Exposition de la méthode des équipollences. Trad. p. C. A. Laisant. Paris 1874. 183 S. — Saggio sull'algebra degli immaginarii. Venezia 1861

C. A. Laisant, Théorie et application des équipollences. Paris 1887. 299 S.

§ 6. **Funktionalrechnung. Iteration.** Die Funktionalrechnung oder die Rechnung mit Symbolen ist derjenige Zweig der Analysis, welcher die sogenannten Funktionaloperationen behandelt, deren Objekte und Resultate Funktionen einer oder mehrerer Veränderlichen sind. Den Keim dieser Rechnung finden wir bei Leibniz.

G. Leibniz, Symbolismus memorabilis calculi algebraici et infinitesimalis in comparatione potentiarum et differentiarum. Misc. Berol. **1**, 160—165. 1710.

L. Lagrange, Sur une nouvelle espèce de calcul, relatif à la différention et à l'intégration des quantités variables. Nouv. Mém. Ac. Berlin a. 1772, 186—221 [1774].

A. M. de Lorgna, Théorie d'une nouvelle espèce de calcul fini et infinitésimal. Mém. Ac. Turin **3**, 409 [1787].

J. Ph. Grüson, Le calcul d'exposition. Nouv. Mém. Ac. Berlin a. 1798, 151; a. 1799—1800, 157. — Calcul d'exposition. Berlin 1802.

L. J. A. Arbogast, Du calcul des dérivations. Straßburg 1800.

M. Servois, Essai sur un nouveau mode d'exposition des principes du calcul différentiel. Ann. math. Gergonne **5**, 93, 1814.

R. Murphy, On the theory of analytical operations. Phil. Trans. London 1837, 179.

R. Carmichael, Treatise of the calculus of operations. London 1855. xii u. 170. Deutsch von C. H. Schnuse. Braunschweig 1857.

G. Koenigs, Recherches sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles. Ann. Ec. Norm. (3) **1**, Suppl. 1—41. 1884. — Nouvelles recherches sur les équations fonctionnelles. Ann. Ec. Norm. (2) **2**, 385—404. 1885.

E. Schröder, Über Algorithmen und Calculn. Arch. Math. Phys. (2) **5**, 225—278, 1887.

G. Oltramare, Mémoire sur les principes généraux du calcul, généralisation. C. A. Ass. Fr. Toulouse 1887, 285—305. — Essai du calcul de généralisation. Paris 1893. 132 S. autogr.

S. Pincherle, Mémoire sur le calcul fonctionnel distributif. Math. Ann. **49**, 325—382, 1897.

S. Pincherle e **U. Amaldi,** Le operazioni funzionali distributivi e le loro applicazioni all'analisi. Bologna 1901. xii u. 490.

S. Pincherle, Funktionaloperationen und -Gleichungen. Encycl. d. math. Wiss. II, A, **11**, 761—817. Leipzig 1906.

M. Fréchet, Sur quelques points du calcul fonctionnel. Thèse. Paris 1906.

Wir schließen hieran die Literatur über iterierte Funktionen.

E. Schröder, Über iterierte Funktionen. Math. Ann. **3**, 286—322, 1870.

F. Farkas, Sur les fonctions itératives. J. de math. (3) **10**, 101—108, 1884.

J. Fegerl, Über die unendlich oft iterierten Functionen. Pr. Mährisch-Ostrau 1893.

C. Isenkrahe, Das Verfahren der Functionswiederholung, seine geometrische Veranschaulichung und algebraische Anwendung. Pr. Leipzig 1897, 114 S.

J. E. Böttcher, Beiträge zur Theorie der Iterationsrechnung. Diss. Leipzig 1898. 78 S.
O. Spieß, Die Grundbegriffe der Iterationsrechnung. Mitt. d. Ges. Bern 1902, 106—137. Auch Basel 1902. 34 S.

Kapitel 2. Besondere elementare Funktionen.

§ 1. **Fakultäten.** In den Lehrbüchern der Elementar-Mathematik, der algebraischen Analysis, der Funktionentheorie und der Trigonometrie werden vielfach elementare algebraische und transzendente Funktionen behandelt. In diesem Kapitel wollen wir eine Anzahl Schriften über einige besondere elementare Funktionen, deren Theorie von besonderer Wichtigkeit ist, hervorheben. Wir beginnen mit den analytischen Fakultäten, die zuerst von Vandermonde 1772 untersucht wurden. Den Namen hat Kramp 1799 eingeführt.

A. L. Crelle, Versuch einer allgemeinen Theorie der analytischen Fakultäten. Berlin 1823. — Mémoire sur la théorie des puissances, des fonctions angulaires et des facultés analytiques. Journ. f. Math. **7**, 253 u. 314. 120 S. 1831. — Auch Sep. Berlin 1831.
W. Schaeffer, De facultatibus. Diss. Berlin 1837.
K. Weierstraß, Über die analytischen Fakultäten. Pr. Deutsch-Krone 1843.
P. Tate, Treatise on factorial analysis. 2. ed. London 1848.
M. Ohm, Über die Behandlung der Lehre der reellen Faktoriellen und Fakultäten, nach einer Methode der Einschließung in Grenzen. Journ. f. Math. **39**, 23—41. 1950. — Die Lehre von den endlichen Differenzen und Summen und der reellen Faktoriellen und Fakultäten, sowie die Theorie der bestimmten Integrale. Nürnberg 1851.
L. Schläfli, Sur les factorielles. Journ. f. Math. **43**, 1—22. 1852 u. **47**, 179—183, 1854.
O. Schlömilch, Über die independente Bestimmung der Koefficienten unendlicher Reihen und der Fakultäten-Koefficienten insbesondere. Arch. Math. Phys. **18**, 306—327, 1852.
L. Öttinger, Theorie der analytischen Fakultäten, nebst ihrer Anwendung auf Analysis, Kreisfunktionen und bestimmte Integrale. Freiberg i. B. 1854.
F. Gambardella, Sui coefficienti delle facoltà analitiche. Giorn. di mat. Battaglini **11**, 49—61, 85—97, 1873.
M. Mägelin, Über Fakultätenkoeffizienten. Diss. Halle 1882.
P. Harmuth, Über die Darstellung von ganzzahligen Faktoriellen und Potenzen durch Produkte gemischter Zahlen. Pr. Berlin 1898. 8 S.

§ 2. **Trigonometrische, logarithmische und Exponentialfunktionen.**

Die Anfänge der Exponentialrechnung reichen in das 17. Jahrhundert zurück. Der Erste, welcher eine Theorie der elementaren transzendenten Funktionen, der Exponentialgrößen, der Logarithmen und der trigonometrischen Funktionen entwickelte, war L. Euler, Introductio in analysia infinitorum, 1748; I, Kap. 6. Schon vor Euler hatte Cotes den Zusammenhang zwischen den trigonometrischen Funktionen und der Exponentialfunktion mit imaginärem Argument entdeckt.

P. G. Jolly, De Euleri meritis de functionibus circularibus. Heidelberg 1834.

L. Euler, De summis serierum reciprocarum ex potestatibus numerorum naturalium ortarum dissertatio altera. Misc. Berol. **7**, 172—192, 1743.
L. Euler, Sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires. §§ 1—34. Opera posth. I, 269—281 [1862].
Joh. I. Bernoulli, Principia calculi exponentialium seu percurrentium. Acta Erud. Lips. Mart. 1697. 125 ff. Opera I, 179—187.
J. H. Lambert, Sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques. Hist. Mém. Ac. Berlin a. **1761**, 265 ff. [1765].
P. Ferroni, Magnitudinum exponentialium, logarithmorum et trigonometriae sublimioris theoria nova methodo pertractata. Florent 1782. 66 u. 612 S. 4°.
J. Pasquich, Anfangsgründe einer neuen Exponentialrechnung. Arch. r. ang. Math. **8**, 386—424, 1798.
J. Brag, Praecipuorum functionum trigonometricarum per analysin infinitorum expositio. I—III. Lundae 1840. 24 S. 4°.
P. H. Fleury, Nouvelle théorie des logarithmes. Paris 1873.
M. A. C. Berlin, Om geometriska representationen af logarithmer och de enklaste trigonometriska funktioner af en komplex variabel. Diss. Lund 1869.
H. C. R. Méray, Théorie analytique du logarithme réperien et de la fonction exponentielle. Ann. Fac. sc. Toulouse IV Q, 1—35, 1890. Auch Paris 1890.
Ch. Hermite, Sur la fonction exponentielle. C. R. Ac. Paris **77**, 18—24, 74—79, 226—233, 285—293, 1873. Paris 1874. Journ. f. Math. **76**. 303 u. 342.
F. Lindemann, Über die Ludolphsche Zahl. Sitzgsber. Ak. Berl. 1882, 679—682. — Über die Zahl π. Math. Ann. **20**, 213—225. 1882.
K. Weierstraß, Zu Lindemanns Abhandlung: „Über die Ludolphsche Zahl". Sitzgsber. Ak. Berlin 1884, 1067—1086.
D. Hilbert, Über die Transzendenz der Zahlen e und π. Math. Ann. **43**, 216—219, 1893.
A. Hurwitz, Über die Transzendenz der Zahl e. Math. Ann. **43**, 220—221. 1893.
P. Gordan, Transzendenz von e und π. Math. Ann. **43**, 222—224. 1893.
F. Mertens, Über die Transzendenz der Zahlen e und π. Ber. Ak. Wien **105**, 839—955. 1896.
A. Pringsheim, Über die ersten Beweise der Irrationalität von e und π. Stzgsber. Ak. München **28**, 325—337. 1898. (Geschichte.)
R. Götting, Die Funktionen Kosinus und Sinus beliebiger Argumente in elementarer Darstellung. Berlin 1881. 66 S.
H. Schapira, Theorie allgemeiner Kofunktionen und einige ihrer Anwendungen auf die Algebra, Analysis, Geometrie und Mechanik. 3 Bde. Leipzig 1890.
A. S. Chessin, On the analytic theory of circular functions. Amer. J. Math. **19**, 217—258. 1897.

§ 3. Hyperbolische Funktionen. Parabolische Logarithmen. Die Anfänge der Lehre von den hyperbolischen Funktionen oder Hyperbelfunktionen finden sich in

Vinc. Riccati, Opuscula ad res physicas et mathematicas pertinentia. Bologna I, 1757. (S. 45 u. 68.)

Die erste Theorie gab J. H. Lambert. Siehe die oben in § 2 genannte Abhandlung und:

J. H. Lambert, Observations trigonométriques. Mém. Ac. Berlin a. 1768, 327—356 [1770]. — Zusätze zu den logarithmischen und trigonometrischen Tabellen. Berlin 1770. Taf. XXXII, S. 176—181.
C. Gudermann, Theorie der Potenzial- und cyklisch-hyperbolischen Funktionen mit Tafeln. Journ. f. Math. **4**, 287—296, 1829; **6**, **1**, 162, 311 (158 S.) 1830. Auch sep. Berlin 1830.
J. A. Grunert, Grundzüge der Theorie der hyperbolischen Funktionen und der

Anwendung derselben zur Ausziehung der Wurzeln und zur Auflösung der Gleichungen. Arch. Math. Phys. **38**, 48—76, 1862.

W. Gronau, Tafeln für sämtliche trigonometrische Funktionen der hyperbolischen und cyklischen Sektoren. Danzig 1863. — Theorie und Anwendungen der hyperbolischen Funktionen. Danzig 1865.

A. Forti e **Mossotti,** Tavole dei logaritmi delle funzioni circolari ed iperboliche. Pisa 1863. Torino 1870. Ed. 3ª Torino 1877.

M. Azzarelli, Trattato elementare delle funzione iperboliche. Atti Acc. N. Linc. **24**, 112—137. 1871.

G. Dötsch, Über die hyperbolischen Funktionen und deren Beziehungen zu den Kreisfunktionen. Neue Ausg. Nürnberg 1873.

C. A. Laisant, Essai sur les fonctions hyperboliques. Paris 1874; Mém. Soc. sc. Bordeaux **10**, 233—328. 1875.

M. Roggatz, Einige Anwendungen der Theorie der hyperbolischen Funktionen. Diss. Göttigen 1876.

S. Günther, Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunktionen, teilweise auf Grund freier Bearbeitung von Laisants „Essai sur les fonctions hyperboliques“ und Fortis „Tavole logaritmiche“. Halle 1881. 440 S. (Geschichte und Literatur.)

P. Mansion, Précis de la théorie des fonctions hyperboliques. Paris 1884. 32 S.

E. H. v. d. Heyden, Elementare Anwendungen der Hyperbelfunktion. Pr. Essen 1886.

L. Hübner, Ebene und räumliche Geometrie des Maßes in organischer Verbindung mit der Lehre von den Kreis- und Hyperbelfunktionen, neu dargestellt. Leipzig 1888. 340 S.

A. Forti, Nuove tavole delle funzioni iperboliche aventi per argomento il loro doppio settore, precedute da nozioni principali della teoria, da cenni monografici ed applicazioni. Roma 1893. LIII u. 299.

J. Mac Mahon, Hyperbolic functions. New York 1906.

C. Hellwig, Beiträge zur Theorie derjenigen Funktionen, welche die Verallgemeinerung der hyperbolischen und cyklischen Kosinus und Sinus darstellen. Arch. Math. Phys. **35**, 186—200, 1860.

R. Nicomedi, Intorno ad alcune funzioni più generali delle funzioni iperboliche. Giorn. di mat. Battaglini **15**, 193—234, 1877.

J. Gf. Brendel, Commentatio de logarithmis parabolicis. I—II. Göttingen 1751. 4⁰.

J. Gf. Brendel, Opusculum mathematici et medici argumenti. Pars I, Gotting. 1769.

J. Booth, A memoir on the trigonometry of the parabola and the geometrical origin of logarithms. London 1856.

J. Booth, A treatise on some new geometrical methods containing essays on tangential coordinates, pedal coordinates, reciprocal polars, the trigonometry of the parabola, the geometric origin of logarithms, the geometrical properties of elliptic integrals and other kindred subjects. I. London 1873.

S. Günther, Parabolische Logarithmen und Parabolische Trigonometrie. Eine vergleichende Untersuchung. Leipzig 1882. 98 S. (Geschichte und Literatur.)

§ 4. **Bernoullische Funktionen. Eulersche Funktionen.** Die ersten Untersuchungen über die Bernoullische Funktion machten Raabe und Schläfli.

L. Schläfli, Praktische Integration. (Um d. J. 1840 geschrieben.) Posth. Mitt. Ges. Bern. 1900, 83—103.

J. L. Raabe, Die Jacob Bernoullische Funktion. Zürich 1848.

L. Saalschütz, Studien zu Raabes Monographie über die Jacob Bernoullische Funktion. Zsch. Math. Phys. **42**, 1—13, 1897.

L. Schendel. Die Bernoullischen Funktionen und das Taylorsche Theorem

nebst einem Beitrage zur analytischen Geometrie der Ebene in trilinearen Koordinaten. Jena 1876.

J. W. Glaisher, On the definite integral connected with the Bernoullian function. Messenger (2) **26**, 152—182; **27**, 20—98. 1897.

Fr. Rogel, Theorie der Eulerschen Funktionen. Ber. Ges. Prag 1896. Nr. 2, 45 S. — Note zur Entwicklung nach Eulerschen Funktionen. Ber. Ges. Prag 1896. Nr. 43, 11 S. — Die Entwicklung nach Bernoullischen Funktionen. Ber. Ges. Prag 1896. Nr. 31, 48 S.

H. Renfer, Die Definitionen der Bernoullischen Funktion und Untersuchung der Frage, welche von denselben für die Theorie die zutreffendste ist. Diss. Bern 1900. 100 S. u. 4 Taf.

M. Henneberger, Beiträge zur Theorie der Integrale der Bernoullischen Funktionen. Bern 1903. 67 S.

M. Krause, Zur Theorie der ultra-bernoullischen Zahlen und Funktionen Ber. Ges. Leipz. **54**, 139—205. 1902.

F. Wicke, Über ultrabernoullische und ultraeulerische Zahlen und Funktionen und deren Anwendung auf die Summation von unendlichen Reihen. Diss. (Jena.) Leipzig 1905. 66 S.

J. Beaupin, Sur les fonctions d'ordre supérieur de Kinkelin. Mém. cour. et sav. étr. Ac. Belg. **59**, 1903. 67 S.

§ 5. **Hypergeometrische Funktionen.** Die für die Theorie der hypergeometrischen Funktionen grundlegende Arbeit von Gauß über die Reihe $1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \cdots$ haben wir in der Theorie der Reihen (Abschn. V, Kap. 3, § 3, S. 91) angeführt. Ihr folgte die zweite Abhandlung von

C. F. Gauß, Determinatio seriei nostrae per aequationem differentialem secundi ordinis. Posth. Werke III, 207 ff.

E. Papperitz, Über die historische Entwickelung der hypergeometrischen Funktionen. Verh. Ges. Isis. Dresden 1889. 13 S.

L. Jecklin, Historisch-kritische Untersuchung über die Theorie der hypergeometrischen Reihe bis zu den Entdeckungen von E. E. Kummer. Diss. Bern 1901. 87 S.

Siehe auch die in der Theorie der bestimmten Integrale (Abschn. VI A, Kap. 3, § 3) genannten Arbeiten von M. Godefroy, Enneper u. a.

E. E. Kummer, Über die hypergeometrische Reihe $1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \cdots$ Journ. f. Math. **15,** 39 ff. u. 127 ff. 92 S. 1836.

R. Blindow, Über die hypergeometrische Reihe mit komplexen Werten ihrer Argumente. 2 T. Fraustadt 1855 u. 1856.

C. G. J. Jacobi, Untersuchungen über die Differentialgleichungen der hypergeometrischen Reihen. Posth. Journ. f. Math. **56**, 149—165, 1859.

L. Sohncke, De aequatione differentiali seriei hypergeometricae. Diss. Königsberg 1866.

B. Riemann, Beiträge zur Theorie der durch die Gaußsche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Funktionen. Abh. Ges. Gött. 1857.

H. A. Schwarz, Über diejenigen Fälle, in welchen die Gaußsche hypergeometrische Reihe eine algebraische Funktion ihres vierten Elementes darstellt. Journ. f. Math. **75**, 292—335, 1873.

J. Thomae, Elementare Behandlung der hypergeometrischen Reihe. Ztschr. f. Math. Phys. **26**, 314—333, 1881.

E. Goursat, Sur l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale la série hypergéométrique. Thèse. Paris 1881. — Mémoire sur les fonctions

hypergéométriques d'ordre supérieur. Ann. Éc. Norm. (2) **12**, 261—287, 395—430, 1883.
C. Appell, Sur les fonctions hypergéométriques de deux variables. J. de math. (3) 8, 173—217, 1882.
J. Horn, Über die Konvergenz der hypergeometrischen Reihe zweier und dreier Variabeln. Diss. Leipzig 1889.
C. Schellenberg, Neue Behandlung der hypergeometrischen Funktion auf Grund ihrer Definition durch das bestimmte Integral. Diss. Göttingen 1892. 68 S. gr. 8°.
G. Lauricella, Sulle funzione ipergeometriche a più variabili. Rend. Circ. mat. Palermo **7**, 111—158, 1893.
S. Pincherle, Delle funzioni ipergeometriche e di varie questioni ad essi attenenti. Giorn. di mat. **32**, 209—291, 1894.
F. Klein, Über die hypergeometrische Funktion. Vorlesung. Ausg. von E. Ritter. Göttingen 1894. vi u. 571. (Lith.)
E. Ritter, Über die hypergeometrische Funktion mit einem Nebenpunkt. Math. Ann. **48**, 1—36, 1896.
J. Beaupain, Sur les fonctions hypergéométriques de seconde espèce et d'ordre supérieur. Mém. cour. et sav. étr. Ac. Belg. **64**. 46 u. 47 S. 4°. — Sur les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur. Mém. sav. étr. Ac. Belg. **56**, 1898. 52 S.
Hj. Mellin, Über die fundamentale Wichtigkeit des Satzes von Cauchy für die Theorie der Gamma- und hypergeometrischen Funktionen. Acta Soc. Fenn. **21**, No. 1. 1896. 115 S.
W. Heymann, Über hypergeometrische Funktionen, deren letztes Element speziell ist, nebst einer Anwendung auf Algebra. Pr. Chemnitz 1898. 44 S. 4°.

§ 6. **Transzendente Gleichungen. Keplers Problem.** Leibniz nannte (Acta Erud. 1686) transzendente Größen solche, die auf Probleme führen, „quae omnem aequationem algebraicam transcendunt". Transzendente Gleichungen sind solche, welche transzendente Funktionen enthalten. In der Theorie der elementaren transzendenten Funktionen und in der Trigonometrie werden spezielle transzendente Gleichungen wiederholt gelöst. Für die allgemeine Theorie sind folgende Werke von Bedeutung.

A. F. Möbius, De peculiaribus aequationum trigonometricarum affectibus. Leipzig 1815.
M. A. Stern, Über die Auflösung von transzendenten Gleichungen. Gekr. Preisschr. Journ. f. Math. **22**, 1—61. Berlin 1841. Franz. von Lévy. Paris 1858. 85 S.
C. H. Schnuse, Die Theorie und Auflösung der höheren algebraischen und transzendenten Gleichungen theoretisch und praktisch bearbeitet. Braunschweig 1850.
S. Spitzer, Auflösung transzendenter Gleichungen. Denkschr. Ak. Wien **3**, 155—162. 1852 u. Wien 1852.
A. Deschmann, Auflösung von transcendenten Gleichungen und Anwendung derselben auf einige geometrische Beispiele. Pr. Cilli 1877.
E. Laguerre, Sur quelques équations transcendantes. C. R. **94**, 160—163. 1882.
P. Cazzaniga, Sulle equazioni trascendenti. Padova 1885.

Das berühmte Keplersche Problem, bei dem es sich um Beziehungen zwischen einem Kreisbogen und seiner Sehne handelt, wird in zahlreichen Schriften behandelt, von denen wir folgende nennen:

C. P. Burger, De solutione problematis Kepleriani. Diss. Leiden 1851.
C. T. Anger, Über das Keplersche Problem. Danzig 1856.

G. Streit, De problematis Kepleriani solutionibus. Diss. Greifswald 1861.
J. W. L. Glaisher, On the solution of Keplers problem. Monthly Not. Astr. Soc. Lond. **37**, 445—458. 1877.
Th. v. Oppolzer, Über die Auflösung des Keplerschen Problems. Wien 1885.
J. J. Åstrand, Hilfstafeln zur leichten und genauen Auflösung des Keplerschen Problems. Mit einer Einleitung von H. Bruns. Leipzig 1890. 110 S. 8°.
A. Martone, Sul problema di Kepler. Bologna 1890.
L. Volderauer, Zum Keplerschen Problem. Pr. Wien 1898. 83 S.
T. Levi-Cività, Sopra la equazione di **Kepler.** Rend. Acc. Lincei Roma **13**, 260—268, 1904.

Kapitel 3. Elliptische Funktionen.

§ 1. **Einleitung. Historisches. Fundamentalarbeiten.** Die Keime der Theorie der elliptischen Funktionen liegen in der Beschäftigung mit den elliptischen Integralen. So werden die Integrale genannt, in denen Quadratwurzeln aus Polynomen 3. oder 4. Grades auftreten, weil der Bogen der Ellipse sich durch ein solches Integral darstellen läßt. Solche Integrale nannte noch Legendre „elliptische Funktionen". Die wichtigsten Schriften Eulers, der diese Integrale zu einer gleichen Bedeutung in der Analysis brachte, wie sie die zyklometrischen Funktionen und die Logarithmen seit lange hatten, sowie die seines Nachfolgers Legendre sind in der „Integralrechnung" angeführt. Erst mit der Entdeckung der doppelten Periodizität der elliptischen Funktionen durch Abel und Jacobi im ersten Viertel des 19. Jahrhunderts beginnt die Theorie der „elliptischen Funktionen".

N. H. Abel, Recherches sur les fonctions elliptiques. Journ. f. Math. **2**, 101 bis 180, 1827; Suite: **3**, 160—189, 1828. Théorèmes sur les fonctions elliptiques. Journ. f. Math. **4**, 194—199, 1828. — Précis d'une théorie des fonctions elliptiques. ib. 236 u. 309, zus. 72 S. — Recherches sur les fonctions elliptiques. Second Mémoire. (Christiania, 27. Aug. 1828.) Acta math. **26**, 3—42, 1902. — S. auch Oeuvres complètes I.
C. G. J. Jacobi, Extrait de deux lettres. Astr. Nachr. **4**, Nr. 123, Sept. 1827. — Demonstratio theorematis ad theoriam functionum ellipticarum spectantis. Astr. Nachr. **6**, Nr. 127, Dez. 1827.
C. G. J. Jacobi, Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum. Regiom. 1829.
C. G. J. Jacobi, Addition au mémoire de M. Abel sur les fonctions elliptiques. Vol. II, p. 101. Journ. f. Math. **3**, 85, 1828. — Notices sur les fonctions elliptiques. ib. **3**, 192—195, 303—310, 403—404, 1828; **4**, 185—193, 1829. — De functionibus ellipticis commentatio prima et altera. ib. **4**, 371—390; **6**, 397—403, 1830. — S. auch Gesammelte Werke I.

Die Geschichte und Literatur ist in den oben (Kap. 1, § 2) genannten Werken von F. Casorati, G. Bellacchi, L. Königsberger u. a. zu finden.

§ 2. **Lehrbücher.**

P. F. Verhulst, Traité élémentaire des fonctions elliptiques, ouvrage destiné à faire suite aux traités élémentaires de calcul intégral. Bruxelles 1841. 316 S.
M. Briot et **M. Bouquet,** Théorie des fonctions doublement périodiques et en particulier des fonctions elliptiques. Paris 1859. 342 S. 8°. — Deutsch von Fischer. Halle 1862. — 2. éd. Théorie des fonctions elliptiques. Paris 1875. 700 S. 4°.

O. J. Broch, Théorie élémentaire des fonctions elliptiques. Christiania 1867. 281 S.

H. Durège, Theorie der elliptischen Funktionen. Leipzig 1861. 5. Aufl. von L. Maurer. Leipzig 1908. viii u. 436.

K. H. Schellbach, Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Thetafunktionen. Berlin 1864. x u. 440.

Ch. Hermite, Théorie des fonctions elliptiques et ses applications à l'arithmétique. 2. P. Paris 1863. (Anhang zu Lacroix, Traité élémentaire de calcul différentiel et intégral.) Deutsch von L. Natani. Berlin 1863. 143 S.

L. Königsberger, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Funktionen, nebst einer Einleitung in die allgemeine Funktionenlehre. 2 Bde. Leipzig, 1874. I, viii u. 431; II, vii u. 219.

J. Thomae, Abriß einer Theorie der complexen Funktionen und der Thetafunktionen einer Veränderlichen. Halle 1870. 2. Aufl. 1873.

A. Enneper, Elliptische Funktionen, Theorie und Geschichte. Akademische Vorträge. Halle 1875. — 2. Aufl., bearbeitet von Felix Müller. Halle 1890. xix u. 598.

A. Cayley, An elementary treatise on elliptic functions. Cambridge 1876. 2. ed. 1895. 390 S.

H. Laurent, Traité élémentaire des fonctions elliptiques. Paris 1880. 2. éd. 1882.

K. Bobek, Einleitung in die Theorie der elliptischen Funktionen. Leipzig 1884. xii u. 275.

De Sparre, Cours sur les fonctions elliptiques. Ann. Soc. sc. Bruxelles **10** B, 129—200, 1886; **11** B, 200—292, 1887; **12** B, 1—90, 1888.

G. H. Halphen, Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications. 3 v. Paris. I. 1886. 492 S. II. 1888. 659 S. III. (Fragments. Posth.) 1891. xvii u. 272.

J. Tannery et **J. Molk,** Éléments de la théorie des fonctions elliptiques. 4 v. Paris I, 1893. viii u. 246. II, 1896. 360 S. III, 1898. viii u. 267. IV, 1902. ix u. 303.

A. C. Dixon, The elementary properties of the elliptic functions. With examples. London 1893. viii u. 142.

Th. Pepin, Introduction à la théorie des fonctions elliptiques d'après les oeuvres posthumes de Gauß. Mem. Acc. Pontif. N. Linc. Rom (2) **9**, 1—129. 1893.

E. Pascal, Teoria delle funzioni ellittiche. Manuale Hoepli. Milano 1895. xii u. 227. kl. 8°.

P. Appell et **Émile Lacour,** Principes de la théorie des fonctions elliptiques et applications. Paris 1897. ix u. 421.

M. Krause, Theorie der doppeltperiodischen Funktionen einer veränderlichen Größe. 2 Bde. Leipzig I. 1895. xiii u. 328. II. 1897. xii u. 306.

P. Appell et **É. Lacour,** Principes de la théorie des fonctions elliptiques et applications. Paris 1897. ix u. 421.

L. Lévy, Précis élémentaire de la théorie des fonctions elliptiques, avec tables numériques et applications. Paris 1898. viii u. 237.

C. Henry, Abrégé des fonctions elliptiques. Paris 1895. 126 S.

B. Riemann, Vorlesungen über elliptische Funktionen. Mit Zusätzen hrsg. von H. Stahl. Leipzig 1899. viii u. 144. Bemerkungen dazu. Zsch. Math. Phys. **45**, 216—228. 1900.

H. Burkhardt, Elliptische Funktionen. Leipzig 1899. xvi u. 374.

G. Vivanti, Lezioni sulla teoria delle funzioni ellittiche. Messina 1900. 313 S. (lith.)

J. Harkness, Elliptische Funktionen. Leipzig 1909. (Unter der Presse.)

§ 3. Spezielles. Formeln und Tafeln. Anwendungen.

J. A. Serret, Mémoire sur la représentation géométrique des fonctions elliptiques et ultraelliptiques. Mém. près. p. div. sav. Ac. sc. Paris (2) **11**, 103—160. 1851.

G. Lamé, Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes et sur les surfaces isothermes. Paris 1857.

H. Gyldén, Entwicklung einiger Verbindungen elliptischer Funktionen. Mém. St. Pétersb. **16**, 1—131, 1871.
H. Bruns, Über die Perioden der elliptischen Funktionen 1. und 2. Gattung. Dorpat 1875.
D. André, Développements en série des fonctions elliptiques et de leurs puissances. Ann. Éc. Norm. (2) **6**, 265—328, 1877.
W. Scheibner, Zur Reduktion elliptischer Integrale in reeller Form. 2. Abh. Leipzig 1879 u. 1880.
J. Farkas, Généralisation du logarithme et de l'exponentielle. Budapest 1879.
W. Scheibner, Zur Reduktion elliptischer, hyperelliptischer und Abelscher Integrale. Ber. Ges. Leipz. **41**, 31—56. Math. Ann. **34**, 473—493, 1889. — Über den Zusammenhang der Thetafunktionen mit den elliptischen Integralen. Ber. Ges. Leipz. **41**, 86—109, 245—276. Math. Ann. **34**, 494—543. 1889.
A. G. Greenhill, Pseudoelliptic integrals and their dynamical applications. Proc. Lond. Math. Soc. **25**, 195—304. 1894.
J. J. Hutchinson, On the reduction of hyperelliptic functions ($p = 2$) to elliptic functions by a transformation of the second degree. Diss. Göttingen 1897. 40 S. 8⁰.
A. Söderblom, Sur la fonction elliptique fondamentale $s = \varphi(u; g_2, g_3)$. Nova Acta Ups. (3) **17**: 2, 1896. 56 S. [1898].
A. Harprecht, De computatione functionum ellipticarum, quarum moduli sunt reales. Diss. Berlin 1862.
E. Meißel, Tafeln über elliptische Funktionen. Iserlohn 1860.
J. Thomae, Sammlung von Formeln, welche bei Anwendung der elliptischen und Rosenhainschen Funktionen gebraucht werden. Halle 1876. 37 S. 4⁰. — Sammlung von Formeln und Sätzen aus dem Gebiete der elliptischen Funktionen nebst Anwendungen. Leipzig 1905. iv u. 44. gr. 4⁰.
K. P. T. Bohlin, Tables des fonctions elliptiques. Stockholm 1900. 73 S.
H. A. Schwarz, Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen. Nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn K. Weierstraß bearb. u. hrsg. 2. Ausg. 1. Abt. (einz.) Berlin 1893. xii u. 96. — Frz. von Padé. Paris 1894.

Was die zahlreichen Anwendungen der elliptischen Funktionen betrifft, so finden sich historische Notizen über dieselben sowie viele Literaturangaben in dem oben (in § 2) genannten Werke von Enneper, 2. Aufl. bearb. von Felix Müller 1890, S. 524—571. Hier nennen wir:

Felix Müller, Studien über Mac Laurins geometrische Darstellung elliptischer Integrale. Pr. Berlin 1875.
H. Kleiber, Ableitung eines Systems von Formeln für die elliptischen Funktionen und ihr Zusammenhang mit der sphärischen Trigonometrie. 2 Pr. Königsberg 1880 u. 1881.
A. Allégret, Mémoire sur la représentation des transcendantes par des arcs de courbes. Ann. Éc. Norm. (2) **2**, 149—200, 1873.
L. Kiepert, De curvis quarum arcus integralibus ellipticis primi generis exprimuntur. Diss. Berlin 1870.
A. Clebsch, Über diejenigen Kurven, deren Koordinaten sich als elliptische Funktionen eines Parameters darstellen lassen. Journ. f. Math. **64**, 210 bis 370, 1865.
H. Picquet, Application de la représentation des courbes dn troisième degré à l'aide des fonctions elliptiques. Journ. Éc. Polyt. cah. **54**, 31—100, 1885.
C. G. J. Jacobi, Über die Anwendung der elliptischen Transcendenten auf ein bekanntes Problem der Elementargeometrie. Journ. f. Math. **3**, 376—389, 1828.
F. J. Richelot, Über die Anwendung einiger Formeln aus der Theorie der elliptischen Funktionen auf ein bekanntes Problem der Geometrie. Journ. f. Math. **38**, 353—372, 1848.

J. Rosanes und **M. Pasch**, Über das einem Kegelschnitt umschriebene und einem andern einbeschriebene Polygon. Journ. f. Math. **64**, 126—166, 1865.

M. Simon, De relationibus inter constantes duarum linearum secundi ordinis, ut sit polygonum alteri inscriptum, circumscriptum alteri. Diss. Berlin 1867.

H. Léauté, Études géométriques sur les fonctions elliptiques de première espèce. Journ. Éc. Polyt. cah. **66**, 65—99, 1879.

R. Noske, Die kürzesten Linien auf dem Ellipsoid. 2 Pr. Königsberg in Pr. 1886 u. 1887. (Literaturangaben.)

G. Holzmüller, Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften und der konformen Abbildungen, verbunden mit Anwendungen auf mathematische Physik. Leipzig 1882. (Literaturangaben.)

C. Brandenburger, Anwendungen der elliptischen Funktionen auf durch algebraische Funktionen vermittelte konforme Abbildungen. Diss. Zürich 1899. 49 S. 8°.

Ch. Hermite, Sur quelques conséquences arithmétiques des formules de la théorie des fonctions elliptiques. Bull. Ac. sc. St. Pétersbourg **29**. Acta math. **5**, 297—330. 1884. — Sur quelques applications des fonctions elliptiques. I. Paris 1885.

C. J. F. Joubert, Sur la théorie des fonctions elliptiques et ses applications à la théorie des nombres. Paris 1860.

P. J. Nasimow, Anwendung der Theorie der elliptischen Funktionen auf die Theorie der Zahlen. Moskau 1885. (Russisch.)

H. Weber, Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen. Braunschweig 1891.

W. Biermann, Problemata quaedam mechanica functionum ellipticarum ope soluta. Diss. Berlin 1865.

A. G. Greenhill, The applications of elliptic functions. London 1892. xi u. 357. — Frz. Les fonctions elliptiques et leurs applications, von Grieß. Paris 1895. xviii u. 574.

E. Mathy, Applications des fonctions elliptiques à la mécanique, à la géométrie et à la physique. Gand. 1903. 49 S. 4°.

§ 4. Transformation. Multiplikation. Modulfunktionen.

John Landen, An investigation of a general theorem for finding the length of any conic hyperbola, by means of two elliptic arcs, with some other new and useful theorems deduced therefrom. Phil. Trans. Lond. 1775, 283 ff. — Mathematical Memoirs I, 32 ff. London 1780.

N. H. Abel, Solution d'un problème général concernant la transformation des fonctions elliptiques. Astr. Nachr. **5**, 365—388, Nr. 138. 1828. — Addition au mémoire sur les fonctions elliptiques. Astr. Nachr. **7**, 33—44, Nr. 147. 1829.

L. A. Sohncke, Aequationes modulares pro transformatione functionum ellipticarum. Journ. f. Math. **16**, 97—130. 1834.

C. Gudermann, Theorie der Modularfunktionen und der Modularintegrale. Berlin 1824.

G. Eisenstein, Beiträge zur Theorie der elliptischen Funktionen. Journ. f. Math. **30**, 185—210, 1845; **39**, 160—179, 224—274, 275—287, 1850.

H. E. Schröter, De aequationibus modularibus. Diss. Königsberg 1854.

Felix Müller, De transformatione functionum ellipticarum. Diss. Berlin 1867.

F. J. Richelot, Die Landensche Transformation in ihrer Anwendung auf die Entwicklung der elliptischen Funktionen. Königsberg 1868.

L. Königsberger, Die Transformation, die Multiplikation und die Modulargleichungen der elliptischen Funktionen. Leipzig 1868. vii u. 196.

P. Mansion, Théorie de la multiplication et de la transformation des fonctions elliptiques. Gand 1870.

W. Göring, Untersuchungen über die Teilwerte der Jacobischen Thetafunktionen und die im Gaußschen Nachlasse mitgeteilten Bezeichnungen derselben. Math. Ann. **8**, 311—386, 1874.

L. Kiepert, Zur Transformationstheorie der elliptischen Funktionen. Journ. f. Math. **87**, 199—216; **88**, 205—212, 1879; **95**, 218—233, 1883. — Über Teilung und Transformation der elliptischen Funktionen. Math. Ann. **26**. 369—454, 1884. — Über die Transformation der elliptischen Funktionen bei zusammengesetztem Transformationsgrade. Math. Ann. **32**, 1—135, 1888. — Über gewisse Vereinfachungen der Transformationsgleichungen in der Theorie der elliptischen Funktionen. Math. Ann. **37**, 368—398, 1889. — Über die komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen. I. Math. Ann. **39**, 145—178, 1891.

L. Kronecker, Zur Theorie der elliptischen Funktionen. Monatsber. Ak. Berlin 1885, 701—780. (Zur Transformationstheorie.)

H. Weber, Zur Theorie der elliptischen Funktionen. Acta math. **6**, 329—416, 1885; **11**, 333—390, 1888. (Transformation und Zahlentheorie.)

G. Pick, Über die komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen. Math. Ann. **25**, 433—447, 1885; ib. **16**, 219—230, 1886.

L. Sylow, Sur la multiplication complexe des fonctions elliptiques. Journ. de math. p. appl. (4) **3**, 109—254, 1887.

G. H. Stuart, Complex multiplication of elliptic functions. Quart. J. **20**, 18—57, 221—234, 1884.

A. G. Greenhill, Complex multiplication of elliptic functions. Quart. J. **22**, 119—150, 174, 1887. — Complex multiplication moduli of elliptic functions. Proc. Lond. Math. Soc. **19**, 301—364, 1888. (Literaturangaben.) Frz. Übers. Ann. Éc. Norm. (3) **11**, 165—248, 1894. — Table of complex multiplication moduli. Proc. Lond. Math. Soc. **21**, 403—422, 1890.

A. G. Greenhill, The transformation and division of elliptic functions. Proc. Lond. Math. Soc. **27**, 403—486, 1896.

J. de Séguier, Formes quadratiques et multiplication complexe. Deux formules fondamentales d'après Kronecker. Berlin 1894. VIII u. 339.

P. Bonaventura, Sulle formule generali di moltiplicazione complessa delle funzioni ellittiche. Ann. Scuola Norm. Pisa **7**, 1895. 55 S.

O. Bolza, Die kubische Involution und die Dreiteilung und Transformation 3. Ordnung der elliptischen Funktionen. Math. Ann. **50**, 68—102, 1897.

C. H. Kummel, The quadric transformation of elliptic integrals, combined with the algorithm of the arithmetico-geometric mean. Bull. Soc. Washington **7**, 102—121, 1885.

J. König, Zur Theorie der Modulargleichungen der elliptischen Funktionen. Heidelberg 1873.

M. Krause, Zur Transformation der Modulargleichungen der elliptischen Funktionen. Heidelberg 1873.

A. Cayley, A memoir on the transformation of elliptic functions. Phil. Trans. Lond. **164**, 397—456, 1874. Addition **169**, 419—425, 1878.

H. J. Smith, Notes on the theory of elliptic transformation. Mess. of math. (2) **12**, 49—99, 1882; **13**, 1—49, 1883.

R. Dedekind, Schreiben an Herrn Borchardt über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen. Journ. f. Math. **83**, 262—292, 1877.

A. Hurwitz, Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunktionen und Theorie der Multiplikatorgleichungen erster Stufe. Diss. Leipzig u. Math. Ann. **18**, 528—592, 1881.

F. Klein, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen; Ausgearb. u. vervollst. von R. Fricke. Leipzig. 2 Bde. I, 1890. XX u. 764. II, 1892, XV u. 712.

Kapitel 4. Hyperelliptische und Abelsche Funktionen.

§ 1. Grundlegende Schriften.

N. H. Abel, Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de

fonctions transcendantes. Mém. prés. Ac. sc. Paris (2) **7**, 176—264. Paris 1841. Oeuvres, 2. éd. I, 145—211.

C. G. J. Jacobi, Considerationes generales de transcendentibus Abelianis. Journ. f. Math. **9**, 394—403, 1832. — De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis, quibus theoria transcendentium Abelianarum innititur. Journ. f. Math. **13**, 55—78, 1835. — Dtsch. Übers. von A. Witting, hrsg. von H. Weber. Ostw. Klass. Nr. 64. Leipzig 1895. 40 S.

A. Göpel, Theoriae transcendentium Abelianarum primi ordinis adumbratio levis. Journ. f. Math. **35**, 277—312, 1847. — Dtsch. Übers. von A. Witting, hrsg. von H. Weber. Ostw. Klass. Nr. 67. Leipzig 1895. 60 S.

G. Rosenhain, Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes qui sont les inverses des intégrales ultraelliptiques de la première classe. Mém. sav. étr. Ac. sc. Paris **2**, 361 ff. 1850. — Dtsch. Übers. von A. Witting, hrsg. von H. Weber. Ostw. Klass. Nr. 65. Leipzig 1895. 94 S.

C. Weierstraß, Beiträge zur Theorie der Abelschen Integrale. Pr. Braunsberg 1849. — Zur Theorie der Abelschen Funktionen. Journ. f. Math. **47**, 289—306, 1854. — Theorie der Abelschen Funktionen. Journ. f. Math. **52**, 285—380, 1856.

B. Riemann, Theorie der Abelschen Funktionen. Journ. f. Math. **54**, 115—155, 1857 u. Berlin 1858.

§ 2. Lehrbücher und zusammenfassende Darstellungen.

F. E. Prym, Neue Theorie der ultraelliptischen Funktionen. Diss. Berlin 1863. 2. Aufl. 1885.

C. Neumann, Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale. Leipzig 1865. 514 S. 2. Aufl. 1884. xiv u. 472.

J. Thomae, Theorie der ultraelliptischen Funktionen und Integrale 1. und 2. Gattung. Halle 1865.

A. Clebsch und **P. Gordan,** Theorie der Abelschen Funktionen. Leipzig 1866. 333 S.

H. Weber, Theorie der Abelschen Funktionen vom Geschlecht $p = 3$. Berlin 1876.

L. Königsberger, Vorlesungen über die Theorie der hyperelliptischen Integrale. Leipzig 1878. 170 S.

Ch. Briot, Théorie des fonctions abéliennes. Paris 1870.

F. Schottky, Abriß einer Theorie der Abelschen Funktionen von drei Variabeln. Leipzig 1880. 162 S.

A. Cayley, A Memoir on the Abelian and Thetafunctions. Amer. Journ. math. **5**, 137—180, 1882; **7**, 101—166, 1885. (Vorlesungen.)

A. R. Forsyth, A Memoir on the theta-functions, particularly those of two variables. Phil. Trans. London **173**, 1882. — On Abels theorem and Abelian functions. Phil. Trans. London **174**, 323—368, 1883.

F. Schottky, Zur Theorie der Abelschen Funktionen von vier Variabeln. Journ. f. Math. **102**, 304—352, 1888. — Über spezielle Abelsche Funktionen vierten Ranges. ib. **103**, 185—203, 1888.

H. Burkhardt, Grundzüge einer allgemeinen Systematik der hyperelliptischen Funktionen erster Ordnung. Nach Vorlesungen von F. Klein. Math. Ann. **35**, 198—296. 1889.

F. Klein, Zur Theorie der Abelschen Funktionen. Math. Ann **36**, 1—83. 1890. (Einführung.)

F. Schottky, Theorie der elliptisch-hyperelliptischen Funktionen von vier Argumenten. Journ. f. Math. **108**, 147—178, 193—255, 1891.

G. Humbert, Sur les fonctions abéliennes singulières. Journ. de math. (5) **5**, 233—350, 1899; **6**, 279—386, 1900.

A. Krazer und **F. Prym,** Neue Grundlagen einer Theorie der allgemeinen Thetafunktionen. Kurz zusammengefaßt und hrsg. von A. Krazer. Leipzig 1892. xii u. 134.

W. Wirtinger, Untersuchungen über Thetafunktionen. Leipzig 1895. viii u. 125.

H. Stahl, Theorie der Abelschen Funktionen. Leipzig 1896. x u. 354.

H. F. Baker, Abels theorem and the allied theory including the theory of the theta-functions. Cambridge 1897. xx u. 684.
Ad. Krazer, Lehrbuch der Thetafunktionen. Leipzig 1903. xxiv u. 509.
H. Stahl, Die Abelschen Funktionen von drei Variabeln. Journ. f. Math. **130**, 153—196, 1905.
G. Vivanti, Lezioni sulla teoria degli integrali abeliani. Reggio Calabria 1901. 392 S. (lith.)
E. B. Christoffel, Vollständige Theorie der Riemannschen ϑ-Funktion. Math. Ann. **54**, 347—399, 1901.
G. Rost, Theorie der Riemannschen Thetafunktion. Leipzig 1901. iv u. 66. 4°.

§ 3. **Spezielle Untersuchungen.**

G. Roch, De theoremate quodam circa functiones Abelianas. Diss. (Halle) Leipzig 1864.
J. C. Bouquet, Mémoire sur la théorie des intégrales ultra-elliptiques. Mém. prés. Ac. sc. Paris (2) **21**. 675—683, 1875.
A. Pringsheim, Zur Theorie der hyperelliptischen Funktionen, insbesondere derjenigen dritter Ordnung. Habil.-Schr. München 1877.
G. Hettner, Reduktion der Integrale einer besonderen Klasse von algebraischen Differentialen auf hyperelliptische Integrale. Diss. Berlin 1877.
J. Thomae, Über eine spezielle Klasse Abelscher Funktionen. Halle 1877. 57 S. — Über eine spezielle Klasse Abelscher Funktionen vom Geschlecht 3. Halle 1879.
L. Königsberger, Reduktion des Transformationsproblems der hyperelliptischen Integrale. Math. Ann. **13**, 540—545, 1878. — Über die Reduktion hyperelliptischer Integrale auf elliptische. Journ. f. Math. **85**, 273—294, 1878.
A. v. Morstein, Die ultraelliptischen Integrale 1. Gattung, 2. Ordnung und ihre Umkehrung. Pr. Königsberg 1880.
A. v. Miller-Hauenfels, Die Dualfunktionen und die Integrale der elliptischen und hyperelliptischen Differentiale. Graz 1880.
Ch. Hermite, Sur la réduction des intégrales hyperelliptiques. Paris 1883.
J. Hanel, Reduktion hyperelliptischer Funktionen auf elliptische. Diss. Breslau 1882.
O. Bolza, Über die Reduktion hyperelliptischer Integrale 1. Ordnung u. 1. Gattung auf elliptische. Diss. Göttingen 1886. 39 S.
H. Stahl, Über die Behandlung des Jacobischen Umkehrproblems der Abelschen Integrale. Diss. Berlin 1882. 40 S.
Fr. Prym, Untersuchungen über die Riemannsche Thetaformel und die Riemannsche Charakteristikentheorie. Leipzig 1882. 112 S.
A. Krazer, Theorie der zweifach unendlichen Thetareihen auf Grund der Riemannschen Thetaformel. Leipzig 1882. 66 S.
G. E. A. Brunel, Étude sur les relations algébriques entre les fonctions hyperelliptiques de genre 3. Paris 1883. 62 S. 4°.
B. Baumert, Über die ultraelliptischen Integrale der 3. Ordnung. 2 Pr. Striegau 1887 u. 1889.
J. Schröder, Über den Zusammenhang der hyperelliptischen Sigma- und Thetafunktionen. Diss. Göttingen 1890.
R. C. Rowe, Memoir on Abels theorem. Phil. Trans. London **173**, 713—750, 1882. (Im wesentlichen Reproduktion der Abhandlung Abels a. d. J. 1841.)
H. Poincaré, Sur les fonctions abéliennes. Amer. math. Journ. **8**, 289—343, 1886. — Remarques diverses sur les fonctions abéliennes. Journ. de math. (5) **1**, 219—314, 1895. Acta math. **26**, 43—98, 1902.
F. Nölke, Übersicht über die Theorie der Abelschen Funktionen zweier Variabeln. Diss. Marburg 1903. 30 S.
C. Jordan, Sur les périodes des fonctions inverses des intégrales des différentielles algébriques. Thèse. Paris 1860.
M. Henoch, De Abelianarum functionum periodis. Diss. Berlin 1867. 20 S. 4°.

F. Casorati, Le relazioni fondamentali tra moduli di periodicità degli integrali abeliani di prima specie. Ann. di mat. (2) **3**, 1869.

L. Milewski, De abelianarum functionum periodis per aequationes differentiales definiendis. Diss. Berlin 1876.

E. Ullrich, Die Periodizitätsmoduln der hyperelliptischen Normalintegrale, 3. Gattung. Diss. Heidelberg 1884.

F. Casorati, Les fonctions d'une seule variable à un nombre quelconque de périodes. Milano 1885. 15 S. 4°.

J. Lüroth, Über die kanonischen Perioden der Abelschen Integrale. Abh. Ak. München **16**. I, 1885; II, 1887.

R. Fuchs, Über die Periodizitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale als Funktionen eines Verzweigungspunktes. Diss. Berlin 1897. 24 S. Journ. f. Math. **119**, 1—24.

F. J. Richelot, Commentatio de integralibus abelianis primi ordinis. Königsberg 1834. 30 S. 4°. — De transformatione et computatione integralium abelianarum primi ordinis. Berlin 1837. — Commentatio de functionum ultraellipticarum valoribus, quibus pro complementis argumentorum atque indicum dimidiis induuntur. Regiom. 1845. 52 S. 4°. — Nova theoremata de functionum Abelianarum cuiusque ordinis valoribus. Journ. f. Math. **29**, 52 S. 1869.

Ch. Hermite, Sur la théorie de la transformation des fonctions abéliennes. C. R. **40**, 1855; Paris 1856.

L. Königsberger, Über die Transformation der Abelschen Functionen erster Ordnung. Journ. f. Math. **55**, 335—361, 1858; **64**, 17—43, 1865. — Über die Transformation des zweiten Grades für die Abelschen Funktionen erster Ordnung. Journ. f. Math. **67**, 58—78, 1867. — Über die Transformation dritten Grades und die zugehörigen Modulargleichungen der Abelschen Funktionen erster Ordnung. Journ. f. Math. **67**, 97—114, 1867.

J. T. Meyer, De transformatione functionum ultraellipticarum. Diss. Königsberg 1866.

H. Weber, Über das Additionstheorem der Abelschen Funktionen. Journ. f. Math. **70**, 193—211, 1869.

E. Kossak, Das Additionstheorem der ultraelliptischen Funktionen erster Ordnung. Diss. Göttingen 1871.

T. E. Dorn, Über eine Transformation 2. O., welche das elliptische Integral mit imaginärem Modul auf ein ultraelliptisches mit reellen Moduln reduziert. Diss. Königsberg 1871.

H. Weber, Über die Transformationstheorie der Thetafunktionen, insbesondere derer von 3 Veränderlichen. Ann. di mat. (2) **9**, 126—166, 1878.

M. Roberts, A tract on the addition of the elliptic and hyperelliptic integrals. Dublin. 2d ed. 1883.

M. Krause, Die Transformation der hyperelliptischen Funktionen erster Ordnung. Nebst Anwendungen. Leipzig 1886. vii u. 276.

P. M. Pokrowsky, Sur la transformation des intégrales et des fonctions hyperelliptiques de la 1re classe. (Russisch) Sbornik Moskau Math. Samml. **15**, 397—572, 1891.

P. Appell, Sur les intégrales de fonctions à multiplicateurs et leur application au développement des fonctions abéliennes en séries trigonométriques. (Preisschr.) Acta math. **13**, 1—174, 1890.

H. Burkhardt, Untersuchungen aus dem Gebiete der hyperelliptischen Modulfunktionen. I. Math. Ann. **36**, 371—434, 1890; II. ib. **38**, 161—224, 1891; III. ib. **41**, 313—343, 1892.

C. W. Borchardt, Über das arithmetisch-geometrische Mittel. Journ. f. Math. **58**, 127—234, 1861. — Über das arithmetisch- geometrische Mittel aus 4 Elementen. Monatsber. Ak. Berlin 1876, 611—621.

A. Brill, Über diejenigen Kurven, deren Koordinaten sich als hyperelliptische Funktionen eines Parameters darstellen lassen. Journ. f. Math. **65**, 269—283, 1866.

H. Rohn, Transformation der hyperelliptischen Funktionen $p = 2$ und ihre Bedeutung für die Kummersche Fläche. Habil.-Schr. Leipzig 1879.
O. Staude, Geometrische Deutung des Additionstheorems der hyperelliptischen Integrale und Funktionen 1. O. im System der konfokalen Flächen 2. Grades. Habil.-Schr. Breslau 1883. Math. Ann. **22**, 1—69, 145—176.
W. Reichardt, Darstellung der Kummerschen Fläche durch hyperelliptische Funktionen. Diss. Leipzig 1887. Nova Acta Leop. **50**, 375—483.
A. Ohnesorge, Hyperelliptische Integrale und Anwendung auf Probleme der Mechanik. Pr. Berlin 1889. 24 S.

Kapitel 5. Kugelfunktionen und verwandte Funktionen.

§ 1. **Kugelfunktionen.** Probleme der Mechanik gaben zuerst gegen Ende des 18. Jahrhunderts Veranlassung, sich mit den Kugelfunktionen zu beschäftigen. Legendre und Laplace führten sie fast gleichzeitig in die Analysis ein.

A. M. Legendre, Sur l'attraction des sphéroïdes homogènes. Mém. math. phys. prés. Ac. sc. Paris **10**, a. 1785, 419ff.
P. F. Laplace, Théorie des attractions des sphéroïdes et de la figure des planètes. Mém. math, phys. prés. Ac. sc. Paris a. 1782, 119ff. [1785].
A. M. Legendre, Exercices de calcul intégral sur divers ordres de transcendantes et sur les quadratures. II. Paris 1817.

Eine Übersicht über die Entwicklung der Theorie findet sich bei:

A. Wangerin, Theorie der Kugelfunktionen und der verwandten Funktionen, insbesondere der Laméschen und Besselschen. (Theorie spezieller durch lineare Differentialgleichungen definierter Funktionen.) Encykl. d. math. Wiss. II A **10**, 695—759, Leipzig 1904.

Für die weitere Ausbildung der Kugelfunktionen nennen wir:

C. G. J. Jacobi, Über eine besondere Gattung algebraischer Funktionen, die aus der Entwicklung der Funktion $(1 - 2xz + z^2)^{\frac{1}{2}}$ entstehen. Journ. f. Math. **2**, 223—226, 1827. — Über die Entwicklung des Ausdrucks $(a^2 - 2\varphi\, a a' + a'^2)^{\frac{1}{2}}$. Journ. f. Math. **26**, 81—87, 1843.
P. G. Lejeune-Dirichlet, Sur les séries dont le terme général dépend de deux angles, et qui servent à exprimer des fonctions arbitraires entre des limites données. Journ. f. Math. **17**, 35—56, 1837.
E. Heine, Theorie der Anziehung eines Ellipsoids. Journ. f. Math. **42**, 70—81, 1851.
G. Bauer, Von den Koeffizienten der Reihen von Kugelfunktionen einer Variabeln. Journ. f. Math. **56**, 101—121, 1859.
P. A. Hansen, Über die Entwicklung der Größe $(1 - 2\alpha H + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ nach den Potenzen von α. Abh. Ges. Leipzig **1**, 127—130, 1852.
F. G. Mehler, Über die Entwicklung einer Function von beliebig vielen Variabeln nach Laplaceschen Functionen höherer Ordnung. Journ. f. Math. **66**, 161—176, 1866.
E. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen. Theorie und Anwendungen. Berlin 1861. 382 S. 2. Aufl. I. Bd. Theorie der Kugelfunktionen. 1878. 484 S. II. Bd. Anwendungen der Kugelfunktionen. 1881. 380 S.
G. Sidler, Die Theorie der Kugelfunktionen. Bern 1861. 71 S. 4°.
F. Neumann, Beiträge zur Theorie der Kugelfunktionen. Leipzig 1878. 156 S. 4°.
C. Neumann, Über die nach Kreis-, Kugel- und Zylinderfunktionen fortschreitenden Entwicklungen, unter durchgängiger Anwendung des Du Bois-Reymondschen Mittelwertsatzes. Leipzig 1881. VIII u. 140.
F. Neumann, Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen. Hrsg. von C. Neumann. Leipzig 1887.

P. G. Lejeune-Dirichlet, Über die im umgekehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte. Hrsg. von Grube. Leipzig 1876. 2. Aufl. 1887.
E. Didon, Études de certaines fonctions analogues aux fonctions X_n de Legendre. Thèse. Paris 1858.
N. M. Ferrers, An elementary treatise on spherical harmonics and subjects connected with them. London 1877. 2^d ed. 1881.
J. Frischauf, Vorlesungen über Kreis- und Kugelfunktionenreihen. Leipzig 1897.
W. E. Byerly, Harmonic functions. New York 1906.

§ 2. Besselsche, Lamésche, Zylinder- und Kegelfunktionen.

G. Fourier. Théorie analytique de la chaleur. 1822. 369 ff.
D. Poisson, Sur la distribution de la chaleur dans les corps solides. Journ. Éc. Polyt. cah. **19**, 1822. 349 ff.
F. W. Bessel, Untersuchung des Teils der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht. Abh. Ak. Berlin, a. 1824, 1—52 [1826].
C. G. J. Jacobi, Formula transformationis integralium definitorum. Journ f. Math. **14**, 1—26, 1836.
C. Neumann, Über die Besselschen Funktionen. Ein Analogon zur Theorie der Kugelfunktionen. Leipzig 1867, 72 S.
E. Lommel, Studien über die Besselschen Funktionen. Leipzig 1868. 135 S.
E. Heine, Die Fourier-Besselsche Funktion. Journ. f. Math. **69**, 128—142, 1868.
H. Hankel, Die Zylinderfunktionen erster und zweiter Art. Math. Ann. **1**, 467—501, 1869.
G. Lamé, Mémoire sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température. Journ. de math. **2**, 147—183, 1837. — Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes et les surfaces isothermes. Paris 1857. — Leçons sur la théorie analytique de la chaleur. Paris 1861.
E. Heine, Über die Laméschen Funktionen. Journ. f. Math. **56**, 79—85, 1859. — Einige Eigenschaften der Laméschen Funktionen. ib. **56**, 87—99, 1859. — Die Laméschen Funktionen verschiedener Ordnungen. ib. **60**, 252—303. 1862. — Die speziellen Laméschen Funktionen erster Art von beliebiger Ordnung. ib. **62**, 110—131, 1863.
J. W. Strutt, Lord Rayleigh, Notes on Bessels functions. Phil. Mag. (4) **44**, 328—344, 1872.
A. Gray and **G. B. Mathews,** A treatise on Bessels functions and its applications to physics. London 1895. x u. 292.
J. H. Pratt, A treatise on attractions, Laplace functions and the figure of the earth. 2^d ed. Cambridge 1860—61; 3^d ed. 1865; 4th ed. 1871.
Js. Todhunter, An elementary treatise on Laplace functions, Lamés functions and Bessels functions. London 1875. 348 S.
J. H. Graf und **E. Gubler,** Einleitung in die Theorie der Besselschen Funktionen. I. II. Bern 1898, vi u. 142 S. 1900, viii u. 156 S.
E. Meißel, Tafeln der Besselschen Funktionen J_x^0 und J_x^1 von $k = 0$ bis $k = 15{,}5$. Abh. Ak. Berlin 1888. 23 S.
Niels Nielsen, Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen. Leipzig 1904. xiv u. 408.
F. G. Mehler, Über eine mit den Kugel- und Zylinderfunktionen verwandte Funktion und ihre Anwendung in der Theorie der Elektrizitätsverteilung. Pr. Elbing 1870. 30 S. 4°.

Dritter Teil.

Geometrie.

Abschnitt I. Reine, elementare und darstellende Geometrie.

Kapitel 1. Grundlagen der Geometrie.

§ 1. **Parallelentheorie.** Die Schriften über die neueren Anschauungen vom Raume, welche mit denen über die Grundlagen der Geometrie verwandt sind, haben wir schon oben Teil II, Abschn. I, § 5 (s. S. 51) angeführt. Die Zweifel an der Beweisbarkeit des XI. Euklidischen Axioms von den Parallelen aus den übrigen Axiomen waren der Anstoß zur Untersuchung der Grundlagen der Geometrie. Schon 1733 schrieb Saccheri seine Schrift: Euclides ab omni naevo vindicatus. Über die Geschichte der Theorie der Parallelen belehrt uns:

P. Stäckel und **Fr. Engel,** Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß. Eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie. Leipzig 1895. x u. 325. (Hier ist die betreffende Literatur möglichst vollständig zusammengestellt.) Eine Fortsetzung bilden:

R. Bonola, Index operum ad geometriam absolutam spectantium. J. Bolyai in Memoriam. Festschrift d. Ungar. Univ. zu Klausenburg. Leipzig 1903, S. 81—154. (900 Titel.)

Fr. Engel und **P. Stäckel,** Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie. 2 Bde. Leipzig. I. Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij, zwei geometrische Abhandlungen. 1. T. Die Übersetzung. 2. T. Anmerkungen. Lobatschefskijs Leben und Schriften. xvi u. iv u. 476. 1899. II. Wolfgang und Johann Bolyai, geometrische Untersuchungen. (In Vorbereitung.)

Eine kritische Übersicht über Originalarbeiten enthalten mehrere Dissertationen von

C. J. D. Hill, Conatuum theoriam linearum parallelarum stabiliendi praecipuorum brevis recensio. Lundae (1835—1850). 74 S. 4⁰.

Von wichtigen Originalarbeiten seien noch genannt:

A. M. Legendre, Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles ou le théorème sur la somme des trois angles du triangle. Mém. Ac. Paris **12**, 367—471, 1833.

C. Flye Sainte-Marie, Études analytiques sur la théorie des parallèles. Paris 1871.

M. Dehn, Die Legendreschen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck. Leipzig 1900. 38 S.

J. Hoüel, Essai critique sur les principes fondamentaux de la Géométrie élémentaire, ou Commentaire sur les 32 premières propositions des Éléments d'Euclide. Paris 2e éd. 1883.

W. Reinecke, Die Grundlagen der Geometrie nach Kant und neueren Autoren. I. T. Diss. Halle a. S. 1903. 57 S.
W. Killing, Einführung in die Grundlagen der Geometrie. Paderborn. I. 1893. x u. 357. II. 1898. vi u. 361.
B. A. W. Russel, An essay on the foundations of geometry. Cambridge 1897. 201 S. Frz. von A. Cadenat. Paris 1901. x u. 274.
O. Hölder, Anschauung und Denken in der Geometrie. Ak. Antrittsvorlesung. Leipzig 1900. 75 S. 8°.
J. F. Bonnel, Les atomes et les hypothèses dans la géométrie. Paris 3e éd. 1899. 200 S.
D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie. Leipzig. 2. Aufl. 1904. vi u. 175. (Einfaches und vollständiges System von Axiomen der Geometrie.) Frz. von L. Laugel. Ann. Éc. Norm. (3) **17**, 103—209, und Paris 1900. 114 S. 4°.

§ 2. Nichteuklidische Geometrie.

Joannes Bolyai de Bolya, Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens, a veritate aut falsitate axiomatis XI. Euclidei, a priori haud unquam decidenda, independentem, adjecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica. Ed. nova. Leipzig 1903. 40 S.
J. Bolyai, La science absolue de l'espace, indépendante de la vérité ou de la fausseté de l'axiome XI d'Euclide (que l'on ne pourra jamais établir, a priori). Suivi de la quadrature géométrique du cercle dans le cas de la fausseté de l'axiome XI. Trad. par J. Hoüel. 2e tir. Paris 1895.
Wolfgang Bolyai de Bolya, Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae elementaris ac sublimioris methodo intuitiva evidentiaque huic propria introducendi, cum appendice triplici. Ed. sec. I. Conspectus arithmeticae generalis. Leipzig 1897. xii u. 679.
A. Karagiannides, Die nichteuklidische Geometrie vom Altertum bis zur Gegenwart. Berlin 1893. 44 S.
R. Bonola, Sulla teoria delle parallele e sulla geometria non-euclidea. Bologna 1900. 80 S. 8°.
R. Bonola, La geometria non-euclidea. Esposizione storico-critica del suo sviluppo. Bologna 1906. vi u. 213. Deutsch von Liebmann. Leipzig 1908.
R. Bonola, Bibliografia sui fondamenti della geometria in relazione alla geometria non-euclidea. Boll. bibl. sc. mat. **3**, 2—3, 33—60, 70—73, 1900; **5**, 33—41, 65—71, 1902.
N. J. Lobatchefsky, Sur les principes de la Géométrie. Courrier de Kazau 1828 et 1829. Nouveaux principes de Géométrie avec une théorie complète des parallèles. Mém. Univ. Kazan 1835 ch. 1, 1836 ch. 2 et 3, 1837, ch. 1, 1838, ch. 1. 470 S. (Russisch). — Géométrie imaginaire. J. f. Math. **17**, 295—320, 1837.
N. J. Lobatschefsky, Pangéometrie (Kazan 1856). Übers. u. hrsg. von H. Liebmann. Ostw. Kl. 150. Leipzig 1903. 95 S. 12°.
N. J. Lobatschewsky, Pangéométrie ou précis de géométrie fondée sur la théorie générale et rigoureuse des parallèles (1835). Réimpression fac-similé. S. 279—340. Paris 1905.
Lobatschefskijs imaginäre Geometrie und Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale. A. d. Russ. von H. Liebmann. Abh. z. Gesch. d. Math. Heft 19. 1904. 192 S. u. Leipzig 1904. xi u. 188.
E. Beltrami, Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea. Giorn. di mat. **6**, 285—315, 1868. — Interprétation de la géométrie non-euclidienne. Trad. par J. Hoüel Ann. Ec. Norm. **6**, 251—288. Paris 1868.
H. Liebmann, Nichteuklidische Geometrie. Leipzig 1905. Sammlung Schubert. viii u. 248.
J. Frischauf, Absolute Geometrie nach Johann Bolyai bearbeitet. Leipzig 1872. xii u. 96.
J. Hoüel, Essai critique sur les fondements de la Géométrie. Paris 1867. 96 S. Mém. Soc. Bordeaux. 1872.

J. Frischauf, Elemente der absoluten Geometrie. Leipzig 1876. XI u. 142.
F. Klein, Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Pr. Erlangen 1872. 48 S. u. Math. Ann. **43**, 63—100, 1900. Ital. von G. Fano, Ann. di mat. (2) **17**, 301—343, 1899.
F. Klein, Nichteuklidische Geometrie. Autographierte Vorlesungshefte. Leipzig. I, 1889/90. 364 S. II, 1890. 238 S.
W. Killing, Die nichteuklidischen Raumformen in analytischer Behandlung. Leipzig 1885. XI u. 264.
R. Beez, Über euklidische und nichteuklidische Geometrie. Pr. Plauen 1888.
G. Fano, Lezioni di geometria non-euclidea. Roma 1898.
É. Gérard, Sur la géométrie non-euclidienne. Thèse. Paris 1892.
J. H. Poincaré, Les géométries non-euclidiennes. Paris 1891.
P. Mansion, Premières principes de métagéométrie ou géométrie générale. Mathesis (2) **6**, Suppl. IV. 47 S. = Revue néoscolastique **3**, 143—170, 242—259. Louvain 1896.
P. Mansion, Mélanges de géométrie euclidienne et non-euclidienne. Bruxelles 1898. 24 u. 14 S. 8°.
P. Barbarin, Géométrie non-euclidienne. Paris 2e éd. 1907. 80 S.
K. Th. Vahlen, Abstrakte Geometrie. Untersuchungen über die Grundlagen der euklidischen und nichteuklidischen Geometrie. Leipzig 1905. XII u. 302.
L. Schlesinger, Vorlesungen über absolute (nichteuklidische) Geometrie. Leipzig. (In Vorbereitung.)

Die Schriften über mehr-dimensionale Geometrie bringen wir in einem Kapitel der analytischen Geometrie, ebenso die Untersuchungen über Analysis situs und Topologie sowie über Ausdehnungslehre.

Kapitel 2. Elementare Planimetrie.

§ 1. **Geschichte der elementaren Planimetrie.** Indem wir auf die oben (1. Teil, Abschn. I, S. 1—6) angeführten größeren Geschichtswerke, welche auch die Entwicklung der ebenen Planimetrie enthalten, verweisen, führen wir hier einige spezielle, die Geschichte der Planimetrie behandelnde Schriften an.

Mich. Chasles, Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie. Paris 1837; 3e éd. 1889. (2) u. 851 S. — Deutsch: Geschichte der Geometrie, von Sohncke. Halle 1839. (Betrifft nur zum Teil Elementargeometrisches).
R. Klimpert, Geschichte der Geometrie, für Freunde der Mathematik gemeinverständlich dargestellt. Stuttgart 1888. 160 S. 8°. — Ital. Storia della geometria ad uso dei dilettanti di matematica e degli alunni delle scuole secondarie. Traduz. con note ed appunti di P. Fantasin. Bari 1901. 324 u. 10 S.
Em. Weyr, Über die Geometrie der alten Ägypter. Wien 1884. 35 S.
C. A. Bretschneider, Die Geometrie und die Geometer vor Euklides. Ein historischer Versuch. Leipzig 1870. IV u. 184.
G. J. Allman, Greek geometry from Thales to Euclid. Dublin 1889. 237 S. gr. 8°.
M. Cantor, Euklid und sein Jahrhundert. Mathematisch-historische Skizze. Leipzig 1867. 72 S. Ital. von G. B. Biadego, Bull. bibl. stor. **5**, 1—64. Note ib. 65—74, 1873.
M. Cantor, Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmeßkunst. Leipzig 1875. 237 S.
R. Rothlauf, Die Mathematik zu Platons Zeiten und seine Beziehungen zu ihr. Diss. Jena 1878.
J. L. Heiberg, Philologische Studien zu griechischen Mathematikern. Leipzig. I. II. 1886, 44 S., III. 1881, 28 S., IV. 1884, 35 S. — Literargeschichtliche



Studien über Euklid. Leipzig 1882. IV u. 224. — Mathematisches zu Aristoteles. Abh. z. Gesch. d. math. Wiss. **18**, 1904, II u. 196.

P. Tannery, La géométrie grecque. Comment son histoire nous est parvenu et ce que nous en savons. I. P. (seule). Histoire générale de la géométrie élémentaire. Paris 1887. 187 S. Eine Sammlung von Aufsätzen aus Darboux Bull. bibl.

J. Gow, A short history of Greek mathematics. Cambridge 1884. 323 S.

Gino Loria, Le scienze esatte nell' antica Grecia. Modena. L. I. I geometri greci precursori di Euclide. 1893. 168 S. L. II. Il periodo aureo della geometria greca. 1895. 236 S.

Gino Loria, Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche. Torino 1888. 2ª ed. 1896. xx u. 346. Deutsch: Die hauptsächlichsten Theorien der Geometrie in ihrer früheren und heutigen Entwickelung. Von Fritz Schütte. Leipzig 1888. 132 S.

Die Geschichte einzelner Probleme siehe in Kap. 4 (Spezielles).

§ 2. **Zur Methodik der elementaren Planimetrie.** Die größeren Werke über mathematische Methodenlehre fanden Aufnahme in dem I. Teile, Abschn. II (S. 53 ff.). Es erübrigt, einige Schriften über die Methoden der elementaren Geometrie hier nachzutragen.

G. S. Ohm, Grundlinien zu einer zweckmäßigen Behandlung der Geometrie als höheren Bildungsmittels. Erlangen 1818.

G. Lamé, Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie. Paris 1818. Réimpr. facs. 1903. XII u. 124. 8⁰.

L. N. Carnot, De la corrélation des figures de géométrie. Paris 1801. 2ᵈ éd. 1806.

Rob. Kosack, Beiträge zu einer systematischen Entwicklung der Geometrie aus der Anschauung. Pr. Nordhausen 1852.

L. Glaser, Ein Beitrag zur Methodik des geometrischen Unterrichts. Worms 1861.

J. Parthe, Zur Methodik des Unterrichts in der geometrischen Anschauungslehre. Pr. Brünn 1874.

H. Börner, Geometrische Propädeutik. Pr. Ruhrort 1876.

G. Veronese, Dei principali metodi in geometria. Verona e Padova 1882.

O. Strack, Die Propädeutik der Geometrie. Karlsruhe 1883.

C. W. Baur, Die heuristische Methode und Reform der euclidischen Elementargeometrie. Tübingen 1884.

K. Kraus, Methodik des Unterrichts in der Geometrie und im geometrischen Zeichnen. Wien 1895. 212 S.

D. E. Smith, The teaching of elementary mathematics. New York 1900. XV u. 312.

G. Bellavitis, Considerazioni sulla geometria pura. Mem. Ist. Ven. **17**, 189—253, 1893.

§ 3. **Ältere und neuere Lehrbücher der Planimetrie.** Bereits im ersten Teile, Abschnitt III (S. 12) sind unter den Ausgaben der mathematischen Klassiker auch die Elemente Euklids genannt. Wir fügen hier einige hinzu. Die erste Ausgabe in griechischer Sprache ist:

Εὐκλείδου στοιχείων βιβλ. ιε. Euclidis elementorum geometricorum libri XV, cum Commentario Procli in primum librum, graece ed. Simon Grynaeus. Basileae 1533 fol.

Viele Auflagen erlebte:

Euclidis Elementorum libri XV, accessit XVI. de solidorum regularium comparatione, omnes perspicuis demonstrationibus accuratisque scholiis illustrati authore Christophoro Clavio. Romae 2 v. 1574. I 2 u. 321. II 2 u. 100 S.



Eine neuere griechische Ausgabe, die vor der Heibergschen (s. S. 12) erschienen ist, verdient genannt zu werden:

Euclidis Elementa ex optimis libris in usum tironum graece edita ab E. F. August. 2 Prts. Berolini 1826, 1839.

Von den überaus zahlreichen englischen Ausgaben sei genannt:

Euclid, The elements. With notes and appendix and exercises by J. Todhunter. New revised and enlarged edition, by S. L. Loney. London 1899. VIII u. 332 u. 132 S. 12⁰.

Auch eine italienische:

E. Betti e **F. Brioschi,** Gli elementi di Euclide. Con note, aggiunte ed esercizi ad uso dei ginnasi e de' licei. 32ª ristampa. Firenze 1898. VIII u. 60. 16⁰.

Eine vollständige Bibliographie Euklids ist:

P. Riccardi, Saggio di una bibliografia Euclidea. Mem. Acc. Ist. Bologna. (4) **8**, 1887, 399—523; (4) **9**, 1888, 319—343; (5) **1**, 1890, 25—84; (5) **3**, 1893, 637—694.

Bibliographisches enthält auch:

M. Simon, Euklid und die sechs planimetrischen Bücher. Mit Benutzung der Textausgabe von Heiberg. Abh. z. Gesch. d. math. Wiss. Heft XI. Leipzig 1901. VII u. 141 S.

Zur Erläuterung der 6 ersten Bücher der Elemente dienen:

Ch. F. Pfleiderer, Akademische Schriften Heft 1—5. Scholien zum 1.—6. Buch der Elemente. Stuttgart 1826—27.

Von älteren, historisch wichtigen Lehrbüchern der elementaren Geometrie seien nur folgende angeführt:

P. Ramus, Arithmeticae libri duo, geometriae septem et viginti. Basil. 1569. Geometria. Paris 1577. Auch Hannover 1604. Ins Holländische übers. von D. H. Houtman, mit Kommentar von W. Snellius. Amsterdam 1622.

Andr. Tacquet, Elementa geometriae planae et solidae. Quibus accedunt selecta ex Archimede theoremata. Antwerp. 1654.

Al. Cl. Clairaut, Éléments de géométrie. Paris 1741. Dtsch. von J. Reimer Hamburg 1790.

de La Chapelle, Institutions de géométrie. Paris 1746. 4ᵉ éd. 1765. (Ein sehr beliebtes Lehrbuch.)

Th. Simpson, The elements of geometry, with their application to the construction of geometrical problems. London 1747. 2ᵈ ed. 1760. 5ᵗʰ ed. 1800.

Abel Bürja, Der selbstlehrende Geometer, oder deutliche Anweisung zur Meßkunst, worin sowohl des Euklids Geometrie als auch die geradlinige und sphärische Trigonometrie, nebst einer Anweisung zum Nivellieren und Landmessen enthalten ist. 2 T. Berlin 1787; auch 1802, 1823—24. (Ein beliebtes Lehrbuch.)

J. H. van Swinden, Grondbeginsels der Meetkunde. Amsterd. 1790. 586 S. 2. Aufl. 1816. Deutsch: Anfangsgründe der Meßkunde, von C. F. A. Jacobi. Jena 1834.

Adr. M. Legendre, Éléments de géométrie et de trigonométrie. Paris 1794. 29ᵉ éd. par Blanc 1889. Deutsch: Die Elemente der Geometrie und der ebenen und sphärischen Trigonometrie, von A. L. Crelle. Berlin 1822; 4. Ausg. 1844. (Ein vorzügliches, sehr verbreitetes Lehrbuch, das auch mehrfach ins Englische, Italienische, Schwedische, Spanische übersetzt wurde.)

Sylv. Fr. Lacroix, Éléments de géométrie. Paris 1794. 25ᵉ éd. p. Prouhet 1897. Dtsch. von Ideler. Berlin 1826.

A. L. Crelle, Lehrbuch der Elemente der Geometrie, Goniometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, vorzüglich zum Selbstunterricht. 2 Bde. Berlin 1825—1826.

C. L. A. Kunze, Lehrbuch der Geometrie. I. Planimetrie. Jena 1842. 2. Aufl. 1851.

Ausgezeichnet durch Berücksichtigung des historischen Elementes sind die Lehrbücher von

F. Kruse, Elemente der Geometrie. I (einz.) Geometrie der Ebene. Berlin 1875. XII u. 320.

R. Baltzer, Die Elemente der Mathematik. II. Planimetrie, Stereometrie, Trigonometrie. Leipzig. 6. Aufl. 1883. 387 S. Italienisch: Elementi di matematica. Trad. da L. Cremona. 5ª ed. Genova 1900.

E. Rouché et **Ch. de Comberousse,** Traité de géométrie. 7ᵉ éd. par E. Rouché. P. I. Géométrie plane. P. II. Géométrie dans l'espace; courbes et surfaces usuelles. Paris 1900. LVI u. 1116 S. 8°.

Die neueren Lehrbücher der elementaren Geometrie begannen vor ungefähr drei Jahrzehnten dem kritischen Zuge Rechnung zu tragen, der die Entwickelung der Mathematik im 19. Jahrhundert überhaupt kennzeichnet. Die besseren Lehrbücher, ältere in ihren neueren Auflagen, berücksichtigen die neueren Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie. Ein Verzeichnis dieser Lehrbücher würde ganze Bände füllen; für die Zwecke unsres „Führers durch die mathematische Literatur" genügt es, einige der beliebtesten und bekanntesten Lehrbücher der Elementargeometrie hier zu nennen.

J. K. Becker, Die Elemente der Geometrie auf neuer Grundlage streng deductiv dargestellt. Berlin 1877.

J. Frischauf, Elemente der Geometrie. Leipzig 1877. 164 S.

O. Rausenberger, Die Elementargeometrie des Punktes, der Geraden und der Ebene, systematisch und kritisch behandelt. Leipzig 1887. VI u. 236.

O. Schlömilch, Grundzüge einer wissenschaftlichen Darstellung einer Geometrie des Maßes. Ein Lehrbuch. Leipzig. I. T. 1. Heft. Planimetrie. 7. Aufl. 1888. VI u. 163.

Hubert Müller, Die Elemente der Planimetrie. Ein Beitrag zur Methodik des geometrischen Unterrichts. Metz. 7. Aufl. 1899. IV u. 84.

Hubert Müller, Leitfaden der ebenen Geometrie, mit Benutzung neuerer Anschauungsweisen für die Schule. Leipzig. I. T. Heft 1. Die geradlinigen Figuren und der Kreis. Mit Übungen. 3. Aufl. 1889. VIII u. 69 u. 49 S. Heft 2. Anhang: Erweiterungen zu T. I und Einleitung in die neuere Geometrie. Mit Übungen. 2 Aufl. 1878. 36 u. 34 S. II. T. Die Kegelschnitte und die Elemente der neueren Geometrie. 1875. IV u. 111 S.

H. Lieber und **F. v. Lühmann,** Leitfaden der Elementar-Mathematik. 3 Teile. Neu bearb. von C. Müsebeck. Berlin 1902. VII u. 155, VIII u. 194, VII u. 180 S.

J. Henrici und **P. Treutlein,** Lehrbuch der Elementar-Geometrie. 3 T. Leipzig. I, 3. Aufl. 1897, VIII u. 144. II, 2. Aufl. 1896, IX u. 248. III, 2. Aufl. 1901, XII u. 192 S.

F. G. Mehler, Hauptsätze der Elementar-Mathematik. Mit einem Vorwort von Schellbach. 21. Aufl. Berlin 1898. X u. 266. 22. Aufl. 1908.

M. Focke und **M. Kraß,** Lehrbuch der Geometrie. I. T. Planimetrie. Münster 11. Aufl. 1894. VIII u. 155.

B. Féaux, Lehrbuch der ebenen Planimetrie. Paderborn. 9. Aufl. von Fr. Busch. 1904. VIII u. 216.

G. Holzmüller, Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik. 3 Teile. Leipzig. I, 4. Aufl. 1904. XII u. 319. II, 2. Aufl. 1897. VII u. 291. III, 2. Aufl. 1903, XIV u. 370.

Koppes Geometrie zum Gebrauche an höheren Unterrichtsanstalten. I. Planimetrie. Essen. Ausg. für Gymnasien. 19. Aufl. von J. Diekmann. 1902. Ausg. f. Realanstalten. I, 21. Aufl. 248 S.; II, 19. Aufl. 1904, IV u. 270 S. 7. Aufl. d. neuen Bearbeitung; von K. Knops. 1906.

F. J. Brockmann, Lehrbuch der elementaren Geometrie. Leipzig. 2 T. I. Die Planimetrie. 3. Aufl. 1887, IX u. 201 S.

F. Haller von Hallerstein, Lehrbuch der Elementar-Mathematik. 11. Aufl. von B. Hülsen. II. T. Geometrie. Berlin 1906. VIII u. 552 S. gr. 8⁰. I. Die ebene Geometrie oder Planimetrie (1—212). II. Die ebene Trigonometrie (213—300), III. Die körperliche Geometrie oder Stereometrie (301—403), IV. Die sphärische Trigonometrie (404—456), V. Die Grundlehren der analytischen Geometrie (457—552).

T. L. Wittstein, Planimetrie. 15. Aufl. Hannover 1891. VII u. 211.

Heinr. Müller, Die Elementar-Planimetrie. Leipzig 1891. VIII u. 188 S. Neue Aufl. 1904.

J. Menger, Grundlehren der Geometrie. Ein Leitfaden für den Unterricht in der Geometrie und im geometrischen Zeichnen an Realschulen. Mit vielen Konstruktions- und Rechnungsaufgaben. Wien. 7. Aufl. 1904. IV u. 127.

F. Hočevar, Lehrbuch der Geometrie nebst einer Sammlung von Übungsaufgaben für Obergymnasien. Wien. 5. Aufl. 1904. IV u. 298.

F. Hočevar, Lehr- und Übungsbuch der Geometrie für Untergymnasien. Wien. 6. Aufl. 1902. II u. 122.

H. Fenkner, Lehrbuch der Geometrie. I. T. Ebene Geometrie. Berlin. 4. Aufl. 1903. VIII u. 224.

H. Andoyer, Cours de géométrie. Préc. d'une préface de J. Tannery. Paris 1894. XI u. 487.

Ch. de Comberousse, Cours de Mathématiques. T. II. Géométrie élémentaire, plane et dans l'espace, trigonométrie rectiligne et sphérique. Paris 4ᵉ éd. 1904.

E. Rouché et **Ch. de Comberousse,** Éléments de géométrie. 7ᵉ éd. Paris 1904. XLI u. 652 S.

E. Lebon, Géométrie élémentaire, comprenant la géométrie plane et la géométrie dans l'espace. Paris 1900. 461 S. 16⁰.

F. J. (Brunhes), Éléments de géométrie, comprenant les notions sur les courbes usuelles, un complément sur le déplacement des figures et de nombreux exercices. Paris 11ᵉ éd. 1902. XII u. 525. 16⁰.

P. Simon, Traité de géométrie élémentaire. Paris. I. 1903. II. 1904. 452 S. 8⁰.

J. Hadamard, Leçons de géométrie élémentaire. I. Géométrie plane. 2ᵉ éd. Paris 1906. XVI u. 309.

C. Vacquant et **A. Macé de Lépinay,** Cours de géométrie élémentaire. Paris 7ᵉ éd. 1904. 919 S.

A. Grévy, Éléments de géométrie. (Cl. 4ᵉ et 3ᵉ A.) 5ᵉ éd. Paris 1904. 172 S. 16⁰. (Cl. 2ᵈ et 1ᵉ A et B) ib. 136 S. 16⁰. (Cl. 2ᵈ et 1ᵉ D) 3ᵉ éd. 1904. 120 S. 16⁰.

L. Carton, Éléments de géométrie. Paris 6ᵉ éd. 1904. 316 S.

Eysséric et **Pascal,** Éléments de géométrie et notions sur les courbes usuelles. Paris 23ᵉ éd. 1904. 526 S.

G. Veronese, Elementi di geometria. Con la collabor. di P. Gazzaniga. 3ᵃ ed. Verona-Padova 1904. I, XXIV u. 124; II, IV u. 220.

G. M. Testi, Elementi di geometria ad uso delle scuole tecniche. 5ᵃ ed. Livorno 1901. VII u. 205 S. 16⁰.

A. Faifofer, Trattato di geometria intuitiva, ad uso delle scuole tecniche e normali. 31ᵃ ed. Venezia 1899. 165 S. 16⁰. Frz. von F. Talanti. Paris 1903. 584 S. 16⁰.

S. Pincherle, Geometria pura elementare. Milano 6ᵃ ed. 1903. VI u. 175. Man. Höpli.

G. Riboni, Elementi di geometria, corr. da una raccolta di circa mille esercizi per cura di D. Gambioli. 5ᵃ ed. Bologna. 1903. VIII u. 505. 16⁰.

G. Lazzeri e **A. Bassani,** Elementi di geometria. 2ᵃ ed. Livorno 1898. XVI u. 380.

A. Sannia ed **E. d'Ovidio,** Elementi di geometria. I. ad uso dei ginnasi. 12ᵃ ed. Napoli 1906. VI u. 200.

G. Scotti, Elementi di geometria intuitiva. Torino 4ᵃ ed. 1904. 139 S.

F. Enriques e **U. Amaldi,** Elementi di geometria ad uso delle scuole secondarie superiori. Bologna 2ᵃ ed. 1904. 567 S. 16⁰.

Ortega y Sala, Geometria. Con ejercicios. Madrid 10. ed. 1903. I, XXIII u. 695. II, 283 S.
Th. F. Holgate, Elementary geometry, plane and solid, for use in high-schools and academies. New York, London 1901, XI u. 440.
C. H. Allcock, Theoretical geometry for beginners. I, II. London 1903. IX u. 135, VIII u. 123.
S. Barnard and **J. M. Child,** A new geometry for schools. London 1903. XXVI u. 514.
C. Godfrey and **A. W. Siddons,** Elementary geometry: Practical and theoretical. Cambridge 1903. XI u. 355.
H. S. Hall and **F. H. Stevens,** A school geometry. London 1904. XIV u. 442 u. XII.
R. Lachlan and **W. C. Fletscher,** The elements of geometry. London 1903. XII u. 207.
B. Niewenglowski et **L. Gerard,** Cours de géométrie élémentaire. Paris 1903. I. Géométrie plane. XVI u. 163. II. Géométrie dans l'espace. 122 S.
Rawdon Roberts, A new geometry for beginners; theoretical and practical. London 1903. 87 S.
A. T. Warren, Experimental and theoretical course of geometry. Oxford 1903. VIII u. 248.
B. Niewenglowski et **L. Gerard,** Leçons de géométrie élémentaire. Paris 1907. I. Géométrie plane. XX u. 251. II. Géométrie dans l'espace. 263 S.

Für den propädeutischen Unterricht in der Geometrie und das geometrische Zeichnen sind folgende Schriften zu nennen:

F. v. Močnik, Geometrische Anschauungslehre für Untergymnasien. Bearb. von J. Spielmann. I. Abt. 26. Aufl. Wien-Prag 1901. 76 S.
F. v. Močnik, Geometrische Formenlehre und Anfangsgründe der Geometrie für Realschulen. Bearb. von J. Spielmann. 18. Aufl. Wien 1900. IV u. 158.
G. Zizmann, Geometrische Formenlehre. Jena. 2. Aufl. 1869.
H. Müller, Über den ersten planimetrischen Unterricht. 2 Pr. Charlottenburg 1889 u. 1890.
G. Holzmüller, Vorbereitende Einführung in die Raumlehre. Für den Anfangsunterricht. Leipzig 1904. X u. 123.
G. Müller, Zeichnende Geometrie. Stuttgart. 6. Aufl. 1900. XII u. 172.
O. Meyer, Der geometrische Zeichenunterricht in Quinta. Pr. Schwetz. VI u. 8. 1885.
H. Börner, Geometrischer Anschauungs- und Zeichenunterricht für die Quinta höherer Lehranstalten. Pr. Elberfeld 1887. 31 S.
J. H. Kronauer, Die Anfangsgründe des geometrischen Zeichnens. Zürich. 2. Aufl. 1846.
C. W. Scharpf, Die geometrische Formenlehre in Verbindung mit dem geometrischen Zeichnen. Ulm. 3. Aufl. 1852.
C. F. Hertter, Zeichnende Geometrie. Für die planimetrische Repetition mit besonderer Berücksichtigung des geometrischen Zeichnens. Stuttgart 1882.

§ 4. **Aufgaben und Übungen aus der Planimetrie. Geometrographie.** Ein großer Teil der im vorigen Kapitel genannten Lehrbücher enthält neben der Theorie auch Übungen und Aufgaben. Im folgenden sollen noch einige spezielle Aufgabensammlungen aus der Planimetrie erwähnt werden.

Mth. Stewart, Propositiones geometricae more veterum demonstratae ad geometriam antiquam illustrandam et promovendam idoneae. Edinb., London 1763.
J. H. van Swinden, Theoremata geometrica. Accedunt problematum geometricorum libri quinque. Amstoled 1786. 14 Bog. 8°.
Meyer Hirsch, Sammlung geometrischer Aufgaben. 2 Teile. Berlin 1805 u. 1807.

G. Lamé, Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie. Paris 1818. Neue Ausg. 1904.
W. A. Diesterweg, Geometrische Aufgaben nach der Methode der Griechen. I. Berlin 1825. II. Elberfeld 1828.
W. A. Diesterweg, Zur geometrischen Analysis. Vorwort, Lehrsätze und Aufgaben. Bonn 1834.
H. Graßmann, Geometrische Analyse. Stettin 1847.
C. Adams, Geometrische Aufgaben mit besonderer Rücksicht auf geometrische Konstruktion. 2 T. Winterthur 1847 u. 1849.
F. Luke, Geometrische Aufgaben nach der Methode der Alten. I. T. Planimetrische Aufgaben. Thorn 1845.
L. Wöckel, Die Geometrie der Alten in einer Sammlung von 848 Aufgaben mit einer neuen, die Selbsttätigkeit des Schülers sowohl, als die Erinnerung an das früher Gelernte stets in Anspruch nehmenden Art der Auflösung und mit Beweisen. 3. Aufl. Nürnberg 1853.
J. Petersen, Methoden und Theorien zur Auflösung geometrischer Konstruktionsaufgaben. Übers. von A. v. Fischer-Benzon. Kopenhagen 1879. 106 S. Frz. von O. Chemin. Paris 3e éd. 1901.
F. J. Brockmann, Materialien zur Dreieckskonstruktionen nebst Anwendung auf fast vierhundert Aufgaben. 2. Aufl. Leipzig 1888. VI u. 88 S.
F. J. Brockmann, Planimetrische Konstruktionsaufgaben. Eine Vorschule zu d. Verf. Materialien. Enthaltend 501 Aufgaben nebst deren Lösungen. Leipzig 1889. VI u. 103.
F. J. Brockmann, Versuch einer Methodik zur Lösung planimetrischer Konstruktionsaufgaben. Mit zahlreichen Beispielen. Leipzig 1889. VI u. 111.
A. Luke, Sammlung planimetrischer Aufgaben über das Dreieck. 2 T. Halle 1881.
G. de Longchamps, Essai sur la géométrie de la règle et de l'équerre. Paris 1890.
H. Lieber und **Fr. v. Lühmann,** Geometrische Konstruktaufgaben. Berlin, 11. Aufl., 1898.
W. Adam, Geometrische Analysis und Synthesis. Potsdam. 2. Aufl. 1893.
A. Hoffmann, Sammlung planimetrischer Aufgaben. Paderborn. 5. Aufl. 1895.
C. A. Laisant, Recueil de problèmes de mathématiques. Géométrie et géométrie descriptive, à l'usage des classes de mathématiques élémentaires. Paris 1893. X u. 206. (Planimétrie Nr. 1—686, Stéréométrie 687—802, Géométrie descriptive 803—813, Théorie élém. des sections coniques 649 bis 686.)
E. F. Borth, Die geometrischen Konstruktionsaufgaben, für den Schulgebrauch methodisch geordnet und mit Anleitung zum Auflösen derselben versehen. Leipzig 13. Aufl. 1904. XII u. 167.
J. Ghersi, Metodi facili per risolvere i problemi di geometria elementare. Milano. Manueli Höpli 1899. XI u. 190 u. 64. 12°.
E. R. Müller, Lehrbuch der planimetrischen Konstruktionsaufgaben, gelöst durch geometrische Analysis. Stuttgart. I, 1890, XII u. 235; II, 1891, VI u. 160; III, 1893, V u. 86; IV, 1894, VIII u. 68.
K. Fuß, Sammlung von Konstruktions- und Rechenaufgaben aus der Planimetrie und Stereometrie. Nürnberg. 3. Aufl. 1902. VIII u. 252.
B. Gambioli, Raccolta di esercizi di geometria. Milano 1894.
P. Simon, Guide méthodique de résolution des problèmes en géométrie élémentaire. Paris 2e éd. 1902. 272 S. 12°.
K. Schwering, 100 Aufgaben aus der niederen Geometrie, nebst vollständigen Lösungen. Freiburg 2. Aufl. 1899. XI u. 168.
G. Lemaire, Méthodes de résolution et de discussion des problèmes de géométrie. Paris 1904. 227 S.
W. D. Egger, Practical exercises in geometry. London 1903. XII u. 287. 12°.
A. B. Morgan, Exercises in theoretical and practical geometry. London 1903. 96 S.

J. Alexandroff, Problèmes de géométrie élémentaire groupés d'après les méthodes à employer pour leur résolution. Traduits du Russe sur la 6e éd. p. D. Aitoff. Paris 1898. xi u. 154.

Die Kunst, Konstruktionen der Elementargeometrie mit möglichster Einfachheit und Genauigkeit auszuführen, wird nach E. Lemoine „Geometrographie" genannt, eine Auffassung, der es nicht an Kritik und an Einwendungen gefehlt hat. Die größte Einfachheit wird bestimmt durch die kleinste Zahl von sogenannten elementaren Zeichenoperationen.

E. Lemoine, De la mesure de la simplicité dans les constructions géométriques. Mathesis **8**, 217—222, 241—244, 1888.

E. Lemoine, La géométrographie ou l'art des constructions géométriques. C. R. Assoc. Fr. **21**, 36—100, 1892 u. Paris 1902, 87 S. — Géométrographie dans l'espace ou stereométrographie. C. R. Aß. Fr. **29**, 60—71, 1901.

E. Lemoine, Éléments de la géométrographie. Paris 1893, 87 S.

E. Lemoine, La géométrographie ou la simplicité réelle des constructions géométriques. In Memoriam N. J. Lobatschewskii. Kazan Ges. (2) **6**, 98—133. 1907.

J. Reusch, Planimetrische Konstruktionen in geometrographischer Ausführung Leipzig 1904. xiii u. 84.

§ 5. Historisch berühmte Aufgaben und Konstruktionen.

J. E. Montucla, Histoire des recherches sur la quadrature du cercle avec une addition concernant les problèmes de la duplication du cube et la trisection de l'angle. Paris 1754. N. ed. par S. L. Lacroix. Paris 1831. 352 S.

N. Th. Reimer, Historia problematis de cubi duplicatione sive de inveniendis duabus mediis continue proportionalibus inter duas datas. Götting. 1798. xvi u. 222. 8°.

F. Rudio, Geschichte des Problems von der Quadratur des Zirkels von den ältesten Zeiten bis auf unsere Tage. Mit vier Abhandlungen (in deutscher Übersetzung) über die Kreismessung von Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Leipzig 1892. viii u. 166.

B. Carrara, I tre problemi classici degli antichi in relazione ai recenti risultati della scienza. Riv. di fis. Pavia **3**, 1901, 407—417; **4**, 1901, 36—54, 115—118, 208—220, 304—318.

A. Sturm, Das Delische Problem. 3 Pr. Linz 1895, 1896, 1897. Zus. 140 S.

E. Wölffing, Bibliographische Notiz über die 3- und n-Teilung des Winkels. Mitt. Math. Ver. Stuttgart (2) **2**, 1900, 21—27.

Bahr, Die Mathematiker des Altertums und die Quadratur des Kreises. Pr. Wien 1866.

H. Schubert, Die Quadratur des Zirkels in berufenen und unberufenen Köpfen. Eine kulturgeschichtliche Studie. Hamburg 1888. 40 S. 8°.

A. Aubry, Noticia histórica sobre la cuadratura del círculo. Progreso mat. (2) **2**, 273—305, 1900. (Bibl. d. Quadraturen und Rektifikationen des Kreises.)

W. Göring, Die Auffindung der rein geometrischen Quadratur des Kreises und die Teilung jedes beliebigen Winkels und Kreises in eine beliebige Anzahl gleicher Teile. Dresden 1899. 13 S. (Annähernd durch fortgesetztes Winkelhalbieren, wie es schon 1763 bei Euler sich findet.)

A. Kochansky, Observationes cyclometricae ad facilitandam Praxin accommodatae. Acta Erud. 1685, 394—398. (Eine angenäherte Konstruktion von π.)

Eine reichhaltige Zusammenstellung solcher Konstruktionen gibt:

G. Paucker, Ebene Geometrie der geraden Linie und des Kreises, oder die Elemente, für Gymnasien und zum Selbstunterricht. I. B. Königsberg 1823. (Artikel 317.)

D. Bierens de Haan, Notice sur quelques quadrateurs du cercle dans les Pays-

Bas. Bull. bibl. stor. mat. **7**, 99—140, 1874. (Von Simon van der Eycke 1584 bis Gillis Bovy 1754.)

Archimedes von Syrakus, Kreis-Messung, nebst dem Kommentar des Eutokios von Askalon, griech. u. dtsch., hrsg. von J. Gutenäcker. 2. Aufl, Würzburg 1828.

Chr. Hugenius, De circuli magnitudine inventa. Accedunt ejusdem problematum quorundam illustrium constructiones. Lugd. Bat. 1654.

G. F. Leibniz, De quadratura arithmetica circuli, ellipseos et hyperbolae. Ed. C. I. Gerhardt. Pr. Eisleben 1858.

Pappus Alexandrinus, Mathematicae Collectiones, a Fed. Commandino in lat. conversae et commentariis illustratae. Ven. fol. 1589. (Delisches Problem, Trisektion des Winkels.) Die Ausgabe von Hultsch s. S. 14.

H. Brocard, Mémoire sur divers problèmes de géométrie dont la solution dépend de la trisection de l'angle. Algier 1874.

A. Conti, Problemi di terzo grado; duplicazione del cubo, trisezione del angolo. Bologna 1900.

E. Eckhardt, Die Dreiteilung des Winkels. Diss. Marburg 1892.

H. Hippauf, Lösung des Problems der Trisektion mittels der Konchoide auf zirkularer Basis. Diss. (Jena). Leipzig 1872.

W. Panzerbieter, Über einige Lösungen des Trisektionsproblems mittels dreier Kegelschnitte. Pr. Berlin 1896.

Da Porisma, nach M. Cantors Erklärung, ein Theorem war, das zugleich ein Problem anregte und einschloß, so sei hier von der Literatur über Porismen einiges eingeschaltet.

M. Chasles, Les trois livres de Porismes d'Euclide rétablis pour la première fois d'après la notice et les lemmes de Pappus et conformément au sentiment de R. Simson sur la forme des énoncés de ces propositions. Paris 1860.

F. Buchbinder, Euklids Porismen und Data. Pr. Pforta 1866.

P. E. Breton de Champ, Recherches nouvelles sur les porismes d'Euclide. I—II. Paris 1855—56; Questions de porismes. I—II. Paris 1866 u. 1873.

B. Gompertz, Hints on porismes. London 1850.

C. P. Housel, Les porismes d'Euclide. Paris 1856.

Über die berühmten Schriften des Apollonius über die 3 Probleme: Sectio rationis, sectio spatii, sectio determinata sehe man:

Apollonius Pergaeus, De sectione rationis libri duo (ex arab. ms. lat. versi). Acc. ejusdem de sectione spatii libri duo restituti. Praemitt. Pappi Alex. praef. ad VII suum collectionis mathem. nunc primum gr. edita, cum lemmatibus Pappi ad hos Apollonii libros. Op. et stud. Edm. Halley. Oxford 1706. gr. 8°. 5 Bde. LIII u. 168.

Apollonius Pergaeus, De sectione determinata libri duo restituti, duobus insuper libris aucti, in Rob. Simson Opp. Glasgow. 1776. 4°.

Apollonius von Perga, Die Bücher des, de sectione determinata, wiederhergestellt von R. Simson und den angehängten Büchern des letzteren, nach dem Lat. von W. A. Diesterweg. Berlin 1823. gr. 8.

Apollonius von Perga, die Bücher De sectione rationis, nach d. Lat. des Edm. Halley frei bearb. u. mit einem Anhange versehen von W. A. Diesterweg. 2. T. Berlin 1824. 8°.

Apollonius Pergaeus, Bücher de sectione spatii, wiederhergestellt von W. A. Diesterweg. Elberfeld 1827. gr. 8.

Apollonius von Perga, Die Bücher des „de sectione spatii“, analytisch bearbeitet und mit einem Anhange von mehreren Aufgaben ähnlicher Art versehen von M. G. Grabow. Frankfurt a/M. 1834.

G. Paucker, Geometrische Analysis, enth.: des Apollonius von Perga sectio rationis, spatii und determinata, nebst einem Anhange zu der letztern. Neu bearbeitet. Leipzig 1837.

Apollonius von Perga, Die Bücher de sectione determinata, analytisch bearbeitet und durch einen Anhang von vielen Aufgaben ähnlicher Art vermehrt von M. G. Grabow. Frankfurt a/M. 1828.

P. v. Lühmann, Die sectio rationis, sectio spatii und sectio determinata des Apollonius. Pr. Königsberg 1882.

Eine vierte Aufgabe, der „Neigungen", welche für die Geschichte der griechischen Mathematik, aber kaum für die Planimetrie von Wichtigkeit ist, findet sich in

Apollonius Pergaeus, Inclinationum libri duo, gr.-lat., restit. Sam. Horsley. Oxford 1770. Nach dem Lat. frei bearbeitet von W. A. Diesterweg. Berlin 1823.

Am berühmtesten ist die sogenannte „Berührungsaufgabe des Apollonius", d. i. die Aufgabe, einen Kreis zu zeichnen, der drei Bedingungen genügt, deren jede darin bestehen kann, durch einen gegebenen Punkt zu gehen, oder eine gegebene Gerade zu berühren, oder einen gegebenen Kreis zu berühren:

Apollonius Pergaeus, De tactionibus quae supersunt, ac max. lemmata Pappi in hos libros, graece ed., cum problematis Apollonari historia a. J. W. Camerer. Gotha 1795. gr. 8.

Apollonius, The two books concerning tangencies, as they have been restored by Fr. Vieta and Marin. Ghetaldus. By J. Lawson. 2[d] ed. with two Supplements. London 1773. 4°.

C. G. Haumann, Versuch einer Wiederherstellung der Bücher des Apollonius von den Berührungen. Breslau 1817.

J. T. Ahrens, Über das Problem des Apollonius von den Berührungen. Augsburg 2 Pr. 1832 u. 1836. 4.

Ant. Vieth, Leitfaden zur vollständigen Bearbeitung des wiederhergestellten Apollonius von Fr. Vieta. Dessau 1820.

W. L. Christmann, Apollonius Suevus sive tactionum problema nunc demum restitutum. Accedente censura in Vietam. Tübingen 1821.

E. Schilke, Die Lösungen und Erweiterungen des Apollonischen Berührungsproblems. Pr. Hagenau, Berlin 1880.

P. A. Breuer, Die einfache Lösung des Apollonischen Problems. Pr. Erfurt 1892. 16 S.

H. Cranz, Das Apollonische Berührungsproblem uud verwandte Aufgaben. Sammlung von 163 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben. Stuttgart 1891. 232 S.

E. Study, Das Apollonische Problem. Math. Ann. **49**, 497—542, 1897.

Das Castillonsche Problem, in einen Kreis ein Dreieck zu zeichnen, dessen drei Seiten durch gegebene Punkte gehen, wurde 1788 (Mem. Soc. It. 4) auf ein n-Eck erweitert von Annibale Giordano aus Ottojano (daher der unrichtige Name Ottojanisches Problem). Zur Literatur beider:

F. M. Castillon, Sur un problème de géométrie plane. Nouv. Mém. Ac. Berlin 1776, 265 ff. [1779]; Lösung von Lagrange ib. 284 ff.

A. J. Lexell, Solutio problematis geometrici a de Castillon propositi. Acta Ac. Petrop. a. 1780, P. II, 70—90 [1784].

G. Heiligendörffer, Über das Problem in eine Kurve 2. Gr. ein Dreieck zu beschreiben, dessen Seiten durch drei gegebene Punkte gehen. Pr. Königsberg i. Neum. 1839.

Cr. Alasia, Un antico problema die geometria piana. Il Pitagora **10**, 65—72, 1904. (Castillons Problem.)

J. M. Brückner, Das Ottojanische Problem. Eine mathematisch-historische Studie. Pr. Zwickau 1872. 25 S.



Die Malfattische Aufgabe verlangt, in ein gegebenes ebenes Dreiek drei Kreise zu beschreiben, von denen jeder die beiden andern und zwei Seiten des Dreiecks berührt. Lösungen, Literatur und Geschichte des Problems und seiner Erweiterungen behandeln folgende Schriften:

G. Malfatti, Memoria sopra un problema stereotomico. Mem. mat. fis. Soc. It. Modena **10**, P. I, p. 235, 1803.

A. Wittstein, Zur Geschichte des Malfattischen Problems. I. Diss. Erlangen. 1871. II. Pr. Nördlingen. 1878.

K. Schellbach, Eine Auflösung der Malfattischen Aufgabe. J. f. Math. **45,** 91—92, 1853; Eine Erweiterung der Malfattischen Aufgabe, ib. 186—187.

J. Steiner, Einige geometrische Betrachtungen. J. f. Math. **1**, 1816. Hrsg. von R. Sturm. Ostw. Klass. Nr. 123. Leipzig 1901. 125 S.

C. Adams, Das Malfattische Problem mehrfach gelöst. Winterthur 1848.

G. Binder, Das Malfattische Problem. Pr. Tübingen 1868.

J. Sachs, Über die Aufgabe des Malfatti, ihre Erweiterungen und Lösungen. Pr. Freiburg i. B. 1885.

C. F. Mertens, Über die Malfattischen Aufgaben mit Steiners Konstruktion. Wien 1876.

J. Derousseau, Historique et résolution analytique complète du problème de Malfatti. Bruxelles 1892 u. Mém. Soc. Liège (2) **18**, 1895. 52 S.

F. Hall, Die älteren rein geometrischen Beweise zu Steiners Konstruktion der Malfattischen Aufgabe. Pr. Wattenscheidt. 1898. 13 S. 4°.

A. Pampuch, Das Malfatti-Steinersche Problem. Pr. Straßburg 1902. 53 S.

Schließlich sei für die Mascheronischen und Steinerschen Konstruktionen hingewiesen auf folgende Schriften:

Lor. Mascheroni, Lettera. Alcuni problemi geometrici sciolti col solo cerchio senza la regola. Giorn. fis.-med. (Brugnatelli). Pavia 1795.

L. Mascheroni, La Geometria del Compasso. Pavia 1797. Frz. von Carette. Paris 2e éd. 1828. Dtsch. von Grüson. Berlin 1835 (Gebrauch des Zirkels). Nuova ed. da G. Fazzari. Palermo 1901. xvi u. 152 8°.

J. Steiner, Die geometrischen Konstruktionen ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, als Lehrgegenstand auf höheren Unterrichts-Anstalten und zur praktischen Benutzung. Berlin 1833. 2. Aufl. hrsg. von J. v. Öttingen. Ostw. Klass. Nr. 60. Leipzig 1895. 85 S.

J. Frischauf, Geometrische Konstruktionen von L. Mascheroni u. J. Steiner. Graz 1869.

F. J. Hutt, Die Mascheronischen Konstruktionen. 2. Aufl. Halle 1880.

O. Byrne, The geometry of compasses. London 1877.

G. de Longchamps, Essai sur la géométrie de la règle et de l'équerre. Paris 1890.

W. M. Kutta, Zur Geschichte der Geometrie mit konstanter Zirkelöffnung. Halle. Abh. Leop. Ak. 1897.

G. Mulsow, Mascheronische Konstruktionen. Pr. Schwerin 1898. 16 S.

E. Cesàro, Les problèmes de géométrie résolus par le compas. Mém. Soc. Liège 1899.

Eine Reihe älterer und neuerer elementar-geometrischer Probleme und Konstruktionen mit Hilfe neuerer Beweismethoden werden behandelt in der Göttinger Festschrift von

F. Klein, Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie. Ausgearbeitet von F. Tägert. Leipzig 1895. 66 S. Réd. franç. p. G. Griess. Paris 1896. 99 S.

Eine bedeutende Sammlung wichtiger Aufsätze über Elementar-Geometrie enthält:

F. Enriques, Questioni riguardanti la geometria elementare, trattate da U. Amaldi, E. Baroni, R. Bonola, B. Calò, G. Castelnuovo, A. Conti, E. Daniele, F. Enriques, A. Giacomini, A. Guarducci, G. Vailati, G. Vitali. Bologna 1900. vii u. 532. (Definitionen, Prinzipien, Konstruktionen, Probleme mit Lösungen.) Deutsch von Fleischer. II. Leipzig 1907, xii u. 348. I. noch nicht erschienen.

§ 6. **Geradlinige Gebilde und Kreis in der elementaren Geometrie.** Die gerade Linie, das Dreieck, die Vielecke und der Kreis haben zu vielen anderen als den in den vorigen Kapiteln erwähnten Untersuchungen und Problemen Veranlassung gegeben, aus deren überreicher Literatur hier noch einige Schriften erwähnt werden mögen.

M. G. O. Paucker, Ebene Geometrie der geraden Linie und des Kreises. Königsberg 1823.

H. Erb, Probleme der geraden Linie, des Winkels und der ebenen Flächen. Heidelberg 1846.

T. E. Hart, Elemente der Geometrie auf der Geraden. Diss. Leipzig 1866.

W. A. Willcock, The theory of the right line and of the circle. London 1875.

J. Williams, Elementary geometry of the right line and circle. London 1875.

Der goldene Schnitt, die Teilung einer Strecke nach stetiger Proportion, kam erst zu Ehren durch das Werk von

Luca Pacioli, Divina proportione. Die Lehre vom goldenen Schnitt. Nach der Venezianischen Ausgabe vom Jahre 1509 neu herausgegeben, übersetzt und erläutert von C. Winterberg. Wien 1896. vi u. 367. 8°.

A. Wiegand, Der allgemeine gerade Schnitt und sein Zusammenhang mit der harmonischen Teilung. Ein neuer Beitrag zum Ausbau der Geometrie. Halle 1849.

L. Sonnenburg, Der goldene Schnitt. Beiträge zur Geschichte der Mathematik und ihrer Anwendungen. Pr. Bonn 1881.

G. Emsmann, Die sectio aurea. Pr. Stettin 1874.

F. X. Pfeifer, Der goldene Schnitt und dessen Erscheinungsform in Mathematik, Naturwissenschaft und Kunst. Augsburg 1885. ii u. 232.

Th. L. Wittstein, Der goldene Schnitt. Hannover 1874.

A. Zeising, Neue Lehren von den Proportionen des menschlichen Körpers aus einem bisher unbekannt gebliebenen und die ganze Natur und Kunst durchdringenden Grundgesetze. Leipzig 1854. Der goldene Schnitt. (Posth.). Leipzig 1884. 28 S.

K. Bütler, Der goldene Schnitt und dessen Vorkommen in Natur und Kunst. Pr. Zug 1889.

A. Göringer, Der goldene Schnitt (göttliche Proportion) und seine Beziehung zum menschlichen Körper usw. München 1893. 37 S. 8°. u. 2 Tf.

Was den Winkel betrifft, so haben wir die Literatur über Trisektion des Winkels bereits im Vorigen (S. 142) gegeben. Zu seiner Theorie sei noch angeführt:

C. F. Wagner, De angulis quos dicunt mixtilineis. Königsberg 1815.

O. Böddicker, Beiträge zur Theorie des Winkels. Diss. (Göttingen). Stuttgart 1875.

H. Gräfe, Bemerkungen über den Begriff und die Lehre von ebenen Winkeln. Leipzig 1824.

C. G. Reuschle, Grundzüge der Winkelrechnung. Stuttgart 1850.

D. Piani, Problemi geometrici relativi agli angoli. Bologna 1853.

W. Unverzagt, Der Winkel als Grundlage mathematischer Untersuchungen. Pr. Wiesbaden 1878.

A. Moroff, Das Winkelfeld und die anderen ebenen Felder. Pr. Hof 1890. 21 S. 8⁰.

Von den Dreiecken sei zuerst das rechtwinklige mit seinem pythagoreischen Lehrsatze erwähnt.

J. J. Lange, Dissertatio de demonstrationibus theorematis Pythagorici. Halle 1752.

J. W. Müller, Systematische Zusammenstellung der wichtigsten bisher behandelten Beweise des pythagoräischen Lehrsatzes. Nürnberg 1819.

J. J. J. Hoffmann, Der Pythagoräische Lehrsatz mit 32 teils bekannten, teils neuen Beweisen. 1819; 2. Aufl. Mainz 1821.

Buerbaum, Theorema pythagoricum multiplici ratione diversisque argumentis probatum. Pr. Coesfeld 1855.

G. Wipper, 46 Beweise des pythagoreischen Lehrsatzes. Dtsch. von Graup. Leipzig 1880.

G. Arnoux, Le cas général du carré de l'hypothenuse. Digne 1889.

J. Knirr, Das rechtwinklige rationale Dreieck. Pr. Wien 1881.

E. W. Grebe, Zusammenstellung von Stücken rationaler ebener Dreiecke. Halle 1864.

P. E. Breton de Champ, Notes sur les triangles à cotés entiers et à l'aire entier. Grenoble 1869.

K. Schwering, Geometrische Aufgaben mit rationalen Lösungen. Düren 1898. 15 S.

L. Rotter, Geometrische Aufgaben und Beispiele in rationalen Zahlen. Pr. Mähr. Schönberg. 1901. 40 S.

Das schiefwinklige Dreieck wird behandelt u. a. in

K. F. A. Jacobi, De triangulorum rectilineorum proprietatibus quibusdam nondum satis cognitis. Pr. Pforta 1825.

K. F. A. Jacobi, Die Entfernungsörter geradliniger Dreiecke. Jena 1851.

J. B. Féaux, Vollständige Theorie des ebenen Dreiecks. Auf eigentümliche Weise dargestellt. München 1846.

E. Adams, Die merkwürdigsten Eigenschaften des geradlinigen Dreiecks. Winterthur 1846.

A. Wiegand, Die merkwürdigen Punkte des Dreiecks mit Rücksicht auf harmonische Teilung. Eine reiche Fundgrube von Übungsaufgaben. 2. Aufl. Halle 1848.

C. Gent, Die geometrischen Örter einiger merkwürdigen Punkte im Dreieck und damit in Verbindung stehende Dreieckssätze. Pr. Liegnitz 1850.

E. W. Grebe, Eine Gruppe von Aufgaben über das geradlinige Dreieck. Pr. Marburg 1856.

A. L. Crelle, Über einige Eigenschaften des ebenen geradlinigen Dreiecks rücksichtlich dreier durch die Winkelspitzen gezogener Geraden. Berlin 1816.

K. W. Feuerbach, Die Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks und einiger durch sie bestimmten Linien und Figuren. Nürnberg 1822.

Um 1885 entstand in Frankreich die sogenannte Neuere Dreiecksgeometrie, welche sich mit den merkwürdigen Punkten, Geraden, Kreisen etc. am Dreieck beschäftigt und eine neue Terminologie, besonders Nominalbezeichnungen geschaffen hat, die vielfach historisch ungerechtfertigt sind, da längst bekannte Gebilde und Sätze nach neueren Mathematikern genannt werden, die sie wieder entdeckt haben. Literatur und Geschichte dieser neueren Dreiecksgeometrie finden sich in folgenden Schriften:

E. Vigarié, Géométrie du triangle. Paris 1886.

E. Vigarié, Les progrès de la géométrie du triangle. En 1890: J. math. él. (3) V, 1891; en 1891: ib. (4) 1, 1892; en 1892: ib. (4) 2, 1893.

Chr. Alasia, Saggio terminologico-bibliografico sulla recente geometria del triangolo. Bergamo 1902. IV u. 43 S.
Chr. Alasia, La recente geometria del triangolo. Città de Castello. 1900. 58 S.
J. Casey, A sequel to the first six books of the Elements of Euclid, containing au easy introduction to modern geometry, with numerous examples. Dublin 1881. 5th ed. 1888.
J. Casey, Géométrie élémentaire récente. Trad. de l'anglais p. Fr. Falisse; avec une préface de J. Neuberg. Gand, Paris 1890. 80 S. gr. 8°.
J. S. Mackay, The triangle and its six scribed circles. Proc. Edinb. Math. Soc. 1; London 1894. IV u. 140.
J. S. Mackay, History of the nine-point circle. Proc. Edinb. Math. Soc. **11,** 19—57. 1893.
J. Lange, Geschichte des Feuerbachschen Kreises. Pr. Berlin 1894. 34 S. 4°.
A. Emmerich, Die Brocardschen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreiecks. Berlin 1891. XIV u. 153.
J. Griffith, Recent geometry of the triangle. London 1891.
A. Perozzi, Contributo alla geometria del triangolo e del tetraedro. Tolentino 1892.
C. A. Laisant, Recueil de problèmes de mathématiques. VI. Géométrie du triangle. Paris 1896. X u. 136 gr. 8°.
A. Poulain, Principes de la nouvelle théorie du triangle, Paris 1892. 46 S.
A. Poulain, Recherches sur la nouvelle théorie du triangle. Angers 1895.

Die Lehre von den Transversalen im Dreieck wurde begründet durch
Giov. Ceva, De lineis se invicem secantibus. Mediolani 1678. (Darin die Transversalensätze des Menelaus und Ceva.)
L. N. M. Carnot, Sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace, suivi d'un essai sur les transversales. Paris 1806.
C. J. Brianchon, Applications de la théorie des transversales. Paris 1818.
J. G. Garnier, Traité élémentaire des transversales. Bruxelles 1827.
C. Adams, Die Lehre von den Transversalen in ihrer Anwendung auf Planimetrie. Winterthur 1843.
J. O. Gandtner, Über Parallel- und Gegentransversalen im geradlinigen Dreieck. Pr. Greifswald 1852.
S. Brauns, Die Lehre von den Dreieckstransversalen. Pr. Schwerin 1869.
H. Kiehl, Zur Theorie der Dreieckstransversalen. Pr. Bromberg 1881.
W. Blumberger, Abhandlungen über einige Eigenschaften des Vierecks mit besonderer Berücksichtigung der Theoreme des Menelaus und Ceva. Pr. Neiße 1853.

Über Vierecke seien genannt:
H. Weißenborn, Das Trapez bei Euklid, Heron und Brahmagupta. Z. Math. Phys. 24, Suppl. 167—184. 1879.
E. W. Grebe, De quadrilatero circulari observationes quaedam. Marburg 1831.
K. F. A. Jacobi, Commentatio geometrica de quadrangulis. Pr. Pforta 1837. — De quadrangulorum proprietatibus quibusdam minus cognitis. Jena 1838.
G. J. Dostor, Propriétés nouvelles des quadrilatères en général. Arch. Math. Phys. **48,** 245 ff. 1868 u. Sep. Greifswald 1868.
K. H. Fritsche, Das Deltoid, eine geometrische Studie. Pr. Pirna 1881.

Die Polygonometrie gehört größtenteils in die Trigonometrie. Hier sind zu nennen von Schriften über Polygone und Konstruktionen von Polygonen:
S. Lhuilier, Polygonométrie, ou de la mesure des figures rectilignes et abrégé d'isopérimétrie élémentaire ou de la dépendance mutuelle des grandeurs et des limites des figures. Genève 1789. 4°.
A. L. Fr. Meister, Generalia de genesi figurarum planarum et independentibus

earum affectionibus. Novi Comm. Gott. a. 1769 [1770], 144 ff. (Positive und negative Flächenteile, Sternpolygone,)

Chr. Wiener, Über Vielecke und Vielflache. Leipzig 1864. VIII u. 31.

K. Bochow, Eine einheitliche Theorie der regelmäßigen Vielecke. 2 Pr. Magdeburg 1895 u. 1896. 14 u. 20 S. 4°.

M. Brückner, Vielecke und Vielflache; Theorie und Geschichte. Leipzig 1900. VIII u. 227. 4°.

Die Sternpolygone sind behandelt in:

Thomas Bradwardinus, Geometria speculativa sive breve compendium artis geometricae. Paris 1495. (Kurze Notiz.)

G. Dostor, Théorie général des polygones étoilés. J. d. math. (3) **6**, 344—386. 1880. Und Paris 1881.

H. Eichler, Über Sternpolygone. Pr. Wien 1880.

Über die Geschichte der Sternpolygone siehe:

S. Günther, Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Leipzig 1876. VIII u. 352. (Kap. I, 1—92).

Die geometrische Konstruktion der regelmäßigen Vielecke, auch die angenäherte, hat eine umfangreiche Literatur, aus der wir folgende Schriften auswählen (s. auch Kreisteilung):

M. G. v. Paucker, De divisione geometrica peripheriae circuli in XVII partes aequales. Königsberg 1814,

H. A. Rothe. De divisione peripheriae circuli in XVII et XIII partes aequales. Erlangae 1840.

B. Möllmann, Das regelmäßige 17-Eck. Pr. Rostock 1863.

H. E. Schröter, Zur v. Staudtschen Konstruktion des regulären Siebzehnecks. J. f. Math. **75**, 13—24, 1872.

H. Schwendenwein, Das reguläre 257-Eck. Pr. Teschen 1892. 22 S.

P. W. Fiedler, Zyklographie oder Konstruktion der Aufgaben über Kreise und Kugeln. Leipzig 1882. XVI und 264.

§ 7. Kegelschnitte und andere Kurven in elementargeometrischer Behandlung.

H. G. Zeuthen, Kegelsnitslaeren i Oldtiden. Kjøbenhavn 1885. — Dtsch.: Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum. Übers. von R. v. Fischer-Benzon. Kopenh. 1886. XIV u. 511.

Apollonii Pergaei Conicorum libri VIII, cum Pappi Alexandrini lemmatis et Eutocii Ascalonitae Commentariis. Accedunt Sereni Antissensis de sectione cylindri et coni libri duo. Ed. Edm. Halley. Oxonii 1710. (Die Ausgabe von J. L. Heiberg ist Teil I, S. 13 genannt).

Apollonius of Perga, Treatise on conic sections. Edited in modern notation, with introductions including an essay on the earlier history of the subject. By T. L. Heath. Cambridge 1896. CLXX u. 254.

H. Balsam, Des Apollonius sieben Bücher über Kegelschnitte. Deutsche Bearbeitung. Berlin 1861.

Lor. Lorenzini, Exercitatio geometrica de dimensione omnium conicarum sectionum, curvae parabolicae, curvae superficiei conoidis parabolici. Florent. 1721.

Claude Mydorge, De sectionibus conicis libri IV. Paris 1644. 4°.

Phil. de La Hire, Sectiones conicae in novem libros distributae. Paris 1685 fol. — Nouveaux éléments des sections coniques. Paris 1679. 12°.

Robert Simson, Treatise on Conic sections. Edinb. 1735. 2. ed. 1750.

Matthew Stewart, Propositiones geometricae more veterum demonstratae. Edinb. 1763.

A. v. Braunmühl, Historische Studie über die organische Erzeugung ebener Kurven von den ältesten Zeiten bis zum Ende des 18. Jahrhunderts. Katalog d. math. Ausst. Nürnberg 1892, 54—88.



Colin Maclaurin, Geometria organica sive descriptio linearum curvarum universalis. London 1720. 139 S. 4°.
Bl. Pascal, Histoire de la roulette. Paris 1658. — Lettres à Mr. Car.cavi (contenant les résolutions des problèmes sur la cycloide) Paris 1659.
R. G. Boscovich, De cycloide et logistica). Roma 1745.
M. v. Poppe, Ausführliche Geschichte der Anwendung aller krummen Linien in mechanischen Künsten und in der Architektur. Nürnberg 1802.
H. G. Zeuthen, Grundriß einer elementar-geometrischen Kegelschnittslehre. Leipzig 1882. vi u. 97.
A. Jacobi, Grundzüge einer Theorie der Kegelschnitte auf rein elementare Betrachtungen gegründet. Breslau 1844.
O. Krimmel, Die Kegelschnitte in elementar-geometrischer Behandlung. Tübingen 1883.
E. Lehmann, De la Hire und seine Sectiones conicae. 2 Pr. Leipzig 1888 und 1890.
J. Schlotke, Die Kegelschnitte und ihre wichtigsten Eigenschaften in elementargeometrischer Behandlung. Dresden 1903. iii u. 96.

Andere elementar-geometrische Lehrbücher der Kegelschnitte siehe unter „Synthetische Geometrie".

Fernere geometrische Örter in elementar-geometrischer Behandlung:

Guido Grandi, Flores geometrici ex Rhodonearum et Cleliarum curvarum descriptione resultantes. Florent 1728.
W. Braikenridge, Exercitatio geometrica de descriptione linearum curvarum. London 1733. (Organische Erzeugungsweise der Kurven als Durchschnitte dreier um feste Punkte beweglicher Graden.)
Gregorius a Sancto Vincentio, Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni. Antverp. 1647.
P. Sauvage, Les lieux géométriques en géométrie élémentaire. Paris 1893.

Über die Eigenschaften des Arbelos, *ἄρβηλος* (Schusterkneif) siehe:

J. S. Mackay, The shoemaker's knife. Proc. Edinb. Math, Soc. **3**, 2—11, 1885.
V. Sassoli, L'arbelo di Archimede. Bologna 1887.

Kapitel 3. Ebene und sphärische Trigonometrie.

§ 1. **Einleitung, Geschichtliches.** Die Geschichte der Trigonometrie findet man in allen obengenannten Werken, welche die Geschichte der elementaren Geometrie im allgemeinen behandeln (siehe Kap. 2, § 1.) Ferner in:

G. L. Klügel und **J. A. Grunert,** Mathematisches Wörterbuch. Trigonometrie. Geschichte. S. 322—334.
E. Fasbender, Die Kopernikanischen Sehnen- und Dreiecksberechnungen. Pr. Thorn 1872.
S. Günther, Beiträge zur Geschichte der neueren Mathematik. Pr. Ansbach 1881.
A. von Braunmühl, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. I. T. Von den ältesten Zeiten bis zur Erfindung der Logarithmen. Leipzig 1900. vii u. 260. II. T. Von der Erfindung der Logarithmen bis auf die Gegenwart. ib. 1903, xi u. 264.

Ausgaben der *μεγάλη σύνταξις* des Astronomen Claudius Ptolemäus:

Ptolemaei Almagestum, Lat. Ven. 1515. Latine a G. Trapezuntio. Ven. 1525. fol. Composition mathématique de Claude Ptolémée, ou astronomie ancienne, traduite par N. B. Halma, suivie de notes de Mr. Delambre. 2 vol. Paris 1813—1816. — Claudii Ptolemaei Opera quae extant omnia. I. Syntaxis mathematica. Ed. J. L. Heiberg. 2 Partes. Leipzig 1898 u. 1903. vi u. 546; iv u. 608.



§ 2. **Ältere Lehrbücher der Trigonometrie.**

Joh. Regiomontanus, De triangulis omnimodis libri quinque. Ed. Schonerus. Norimb. 1533. fol.
Th. Fink, Geometriae rotundi libri XIII. Basel 1583.
Joach. Rheticus, Opus Palatinum de triangulis. Neostad. in Palat. 1596.
Barthol. Pitiscus, Trigonometriae sive de dimensione triangulorum libri V. Aug. Vindob. 1600, 1608, 1612
Benj. Ursinus, Trigonometria, cum magno logarithmorum canone. Coloniae 1625. Anhang: Magnus canon logarithmicus. Coloniae 1624.
Willebr. Snellius, Doctrinae triangulorum canonicae libri IV. Posth. ed Hortensius. Lugd. Bat. 1627.
Phil. Lansberg, Triangulorum geometriae libri IV. Lugd. Bat. 1591. 4°. Spätere Ausgaben 1631, Middelburg 1663.
H. Briggs, Trigonometria Britannica sive de doctrina triangulorum libri duo. Goudae 1633. 4 Bl. u. 110 S. u. 68 Bg. Tafeln.
Bon. Cavalieri, Directorium generale uranometricum, in quo trigonometriae logarithmicae fundamenta ac regulae demonstrantur. Bonon. 1632. 4°.
Bon. Cavalieri, Trigonometria plana et sphaerica. Bonon. 1643. 4°.
W. Oughtred, Trigonometria. London 1657.
F. G. de Oppel, Analysis triangulorum. Dresden 1746.
W. Emerson, The elements of trigonometry. London 1749. 186 S.
Tycho Brahe, Triangulorum planorum et sphaericorum praxis arithmetica. Ed. Studnička. Prag 1886.
Thom. Simpson, Trigonometry plane and spherical, with the construction and application of the logarithms. London 1748. 2°. ed. 1765.
G. S. Klügel, Analytische Trigonometrie. Braunschweig 1770. 248 S.
Andrea Cagnoli, Trigonometria piana et sferica. Paris 1786. 2ª ed. Bologna 1804. Frz. von Chompré, Paris 1787 u. 1808.
Ch. Fr. Pfleiderer, Trigonometria plana. Tubing. 1784—85. — Ebene Trigonometrie, mit Anwendungen und Beiträgen zur Geschichte derselben. Tübingen 1802.
S. Fr. Lacroix, Traité élémentaire de trigonometrie rectiligne et sphérique et d'application de l'algèbre à la géométrie. Paris 1799. 8ᵉ. éd. 1827. Deutsch von E. M. Hahn, Berlin 1805, und von V. Ideler, Berlin 1822.
L. Euler, Principes de la trigonométrie sphérique tirés de la méthode des plus grands et plus petits. Hist. Mém. Ac. Berlin **9**, a. 1753, 223—257 [1755]. Dtsch. von E. Hammer, Ostw. Klass. d. ex. Wiss. Nr. 73. Leipzig 1896, 1—39. — Élémens de trigonométrie sphéroïdique, tirés de la méthode des plus grands et plus petits. Hist. Mém. Ac. Berlin **9**, a. 1753, 258—293 [1755]. — Trigonometria sphaerica universa, ex primis principiis breviter et dilucide derivata. Acta Ac. Petrop. **3**, a. 1779, P. I, 72—86 [1782]. Deutsch von E. Hammer; Ostw. Klass. d. ex. Wiss. Nr. 73. Leipzig 1896, S. 41—54.
A. R. Mauduit, Principes d'astronomie sphérique ou traité complet de trigonométrie sphérique. Paris 1765. Engl. A new and compleat treatise of spherical trigonometry, v. W. Crakelt. London 1768. 216 S.
J. Trembley, Essai de trigonométrie sphérique, contenant diverses applications de cette science à l'astronomie. Neuchatel 1783.
J. A. Grunert, Sphäroidische Trigonometrie. Berlin 1833. 4.

§ 3. **Neuere Lehrbücher der Trigonometrie.** Die meisten Lehrbücher der Elementar-Mathematik und besonders diejenigen der Elementar-Geometrie, welche wir im vorigen angeführt haben, enthalten einen Abriß der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Deshalb begnügen wir uns hier, auf einige neuere Lehrbücher der Trigonometrie hinzuweisen.

J. L. A. Le Cointe, Leçons sur la théorie des fonctions circulaires et la trigonométrie. Paris 1858. 385 S.
J. Dienger, Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. 3. Aufl. Stuttgart 1867.
C. G. Reuschle, Elemente der Trigonometrie mit ihrer Anwendung in der mathematischen Geographie. Stuttgart 1873.
P. L. M. Bourdon, Trigonométrie rectiligne et sphérique. 2e éd. rev. p. C. Brisse. Paris 1877. Nouv. tir. 1904. 131 S.
A. Delisle et **C. Gerono,** Éléments de trigonométrie rectiligne et sphérique. 7e éd. Paris 1876.
Th. Spieker, Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie mit Übungsstücken. Potsdam 1885. 134 S. Ausg. B. 9. Aufl. 1903. v. u. 172.
S. F. Lacroix, Introduction à la connaissance de la sphère. 4e éd. Paris 1872.
J. A. Serret, Traité de trigonométrie. 7e éd. Paris 1888. 8e éd. 1900. x u. 336. — Ital. v. G. Tolomei. Firenze. 6e éd. 1904. 269 S.
F. J. Brockmann, Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. 2. Aufl. Leipzig 1880. 156 S.
O. Schlömilch, Grundzüge einer wissenschaftlichen Darstellung einer Geometrie des Maßes. T. I, Heft 2: Ebene Trigonometrie. 6. Aufl. Leipzig 1883. vi u. 97.
J. Todhunter, Plane trigonometry. London 1891. — Spherical trigonometry. London 1902. 288 S. 12°.
E. Hammer, Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Stuttgart. 2. Aufl. 1898. xiv u. 572 S. (Auch Historisches.)
R. C. T. Nixon, Elementary plane trigonometry. Oxford 1892. xviii u. 380.
M. Focke und **M. Kraß,** Lehrbuch der ebenen Trigonometrie nebst den Grundzügen der sphärischen Trigonometrie. München. 9. Aufl. 1903. iv u. 80.
C. Spitz, Lehrbuch der ebenen Trigonometrie, nebst einer Sammlung von 630 Beispielen und Übungsaufgaben. Leipzig. 6. Aufl. 1888. M. Anhang.
C. Spitz, Lehrbuch der sphärischen Trigonometrie. Leipzig. 3. Aufl. 1886. 175 S.
J. Casey, A treatise on plane trigonometry containing an account of the hyperbolic functions. Dublin 1888. xv u. 275.
J. Casey, A treatise on elementary trigonometry. With numerous examples and questions for exercise. Dublin. 2d ed. 1897.
W. E. Johnson, Treatise on trigonometry. London 1889. xvii u. 504.
H. E. Thombeck, Cours de trigonométrie rectiligne. Paris. 6e éd. 1898. 141 S.
B. J. Féaux, Ebene Trigonometrie und elementare Stereometrie. Paderborn. 7. Aufl. 1898. vi u. 187.
J. D. Cortàzar, Tratado de trigonometria y topografia. Madrid. 22a. ed. 1904. 216 S.
P. Killmann, Lehrbuch der ebenen Trigonometrie nebst einer reichhaltigen Sammlung von Übungsaufgaben. 13. Aufl. Mittweida 1904. v u. 113.
H. W. Lübsen, Ausführliches Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Zum Selbstunterricht, mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens bearbeitet. 18. Aufl. von A. Donadt. Leipzig 1904. v u. 146.
G. Pesci, Trattato elementare di trigonometria piana e sferica, con 2327 esercizi. Libro di testo per la R. Accademia navale. Livorno. 2a ed. 1904. 320 S.
A. Grévy, Trigonométrie. Paris 1903. viii u. 272. 16°. 3e éd. 1904. viii u. 274.
G. A. Wentworth, New plane and spherical trigonometry, surveying and navigation. Boston 1903. ii u. 390. 12°.
C. Alasia, Geometria e trigonometria della sfera. Milano. Man. Hoepli 1899. vi u. 207. 16°.

§ 4. **Aufgaben und Übungen aus der Trigonometrie.** Obwohl die genannten Lehrbücher der ebenen und sphärischen Trigonometrie zum

größten Teil Aufgaben und Übungen enthalten, müssen wir doch noch einige besondere Aufgabensammlungen erwähnen.

A. Luke, Sammlung trigonometrischer Aufgaben. I u. II. Halle 1883.

C. Gützlaff, Über das Auflösen trigonometrischer Aufgaben. Pr. Marienwerder 1866.

W. Gallenkamp, Sammlung trigonometrischer Aufgaben. Berlin. 2. Aufl. 1878.

A. Quapp, Trigonometrische Analysis von Aufgaben der ebenen Geometrie. Pr. Minden 1871.

Fr. Reidt, Die trigonometrische Analysis planimetrischer Konstruktions-Aufgaben. Leipzig 1882. 50 S.

H. Lieber und **F. v. Lühmann,** Trigonometrische Aufgaben. Berlin. 2. Aufl. 1889. 298 S.

Fr. Reidt, Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie und Stereometrie. T. I. Trigonometrie. 4. Aufl. von A. Much. Leipzig 1894. x u. 250. Resultate. 4. Aufl. 1894. 88 S.

F. v. Lühmann, Übungsbuch für den Unterricht in der Goniometrie und der ebenen Trigonometrie. Berlin 1898. VIII u. 81.

F. Nau, Recueil de problèmes de trigonométrie rectiligne, renfermant en particulier 150 questions. I. Énoncés. Paris 1899. 48 S.

C. Alasia, Esercizi ed applicazioni di trigonometria piana, con 400 esercizi e problemi proposti. Milano. Man. Hoepli. 1901. XI u 291.

J. B. Guilhaumon, Exercices de trigonométrie sphérique, de cosmographie, de navigation et de calculs nautiques. Ouvrage renfermant plus de 150 questions. Paris 1901. 116 S. 4⁰.

J. B. Guilhaumon, Compléments de trigonométrie et méthodes pour la résolution des problèmes. Paris 1901. XII u. 243. 18⁰.

E. Künzer, Lösung einiger Aufgaben aus der mathematischen Geographie. Pr. Straßburg i. P. 1876.

W. Fuhrmann, Sätze und Aufgaben aus der sphärischen Trigonometrie. Pr. Königsberg 1894.

J. C. V. Hoffmann, Sammlung der Aufgaben des Aufgaben-Repertoriums der ersten 25 Bände der Ztschr. f. Math. u. Phys. Unter Mitwirkung von Stoll systematisch geordnet von Emmerich und C. Müsebeck. Leipzig 1898. XII u. 399.

§ 5. Abhandlungen über spezielle Untersuchungen.

Roger Cotes, Aestimatio errorum in mixta mathesi per variationes partium trianguli plani et sphaerici. Posth. Cambr. 1722. (28 Theoreme aus der sphärischen Trigonometrie.)

Fr. Blake, Spherical trigonometry reduced to plane. Phil. Trans. London **47**, 441ff. 1751.

A. J. Lexell, De resolutione polygonorum rectilineorum. Diss. I et II. Novi Comm. Ac. Petrop. **19**, a. 1774, 184 [1775]; **20**, a. 1775, 80 [1776]. — Solutio problematis geometrici ex doctrina sphaericorum. Acta Ac. Petrop. a. 1781. P. I, 112 [1784]. — Demonstratio nonnullorum theorematum ex doctrina sphaerica. ib. a. 1782, P. II, 85 [1786].

A. M. Legendre, Analyse des triangles tracés sur la surface d'un sphéroïde. Mém. Inst. Paris **7**, 130—161. 1806—7.

A. M. Legendre, Sur les opérations trigonométriques dont les résultats dépendent de la figure de la terre. Hist. Mém. Ac. Paris 1787, 338ff. [1790]. (Beziehungen zwischen ebener und sphärischer Trigonometrie.)

J. L. Lagrange, Solutions de quelques problèmes relatifs aux triangles sphériques. J. Éc. Polyt. cah. **6**, 1799. (Vereinfachte Herleitung der Fundamentalformeln.)

J. G. Tralles, Analytische Betrachtung ebener und sphärischer Dreiecke und deren Analogie. Abh. Ak. Berlin, a. 1816 u. 1817, 66—133 [1819].

J. Bohnenberger, De computandis dimensionibus trigonometricis. Tübingen 1826.
L. Puissant, Nouvelle essai de trigonométrie sphéroïdique. Mém. Inst. Paris (2) **10**, a. 1827, 457—529. Paris 1831.
A. L. F. Meister, Generalia de genesi figurarum planarum et inde pendentibus earum affectionibus. Novi Comm. Gott. I, 144ff., a. 1769 [1770].
J. Tob. Mayer, Tetragonometriae specimen. I. Gott. 1773. 53 S. 4°.
J. H. Lambert, Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung. Berlin, Bd. II, 1770, S. 175ff.
A. J. Lexell, Polygonometrie oder Anweisung zur Berechnung jeder geradlinigen Figur. Übers. von J. T. Lempe. 2 T. Leipzig 1783.
S. L'Huilier, Polygonométrie, ou de la mesure des figures rectilignes et abrégé d'isopérimétrie élémentaire, ou de la dépendance mutuelle des grandeurs et des limites des figures. Genf, Paris 1789. 124 S.
G. Dostor, Propriétés nouvelles des quadrilatères en général avec application aux quadrilatères inscriptibles, circomscriptibles etc. Paris 1868. 109 S. Arch. Math. Phys. **48**, 245ff. 1868.
L. B. Francœur, La goniométrie. Paris 1820.
A. Meyer, Nouveaux éléments de goniométrie. Liège 1854.
G. J. Verdam, Summarium der Goniometrie. Leiden. 3 Aufl. 1858.
S. Günther, Parabolische Logarithmen und parabolische Trigonometrie. Eine vergleichende Untersuchung. Leipzig 1882. IV u. 99.
F. W. Neumann, Higher trigonometry. Superrationals of second order. Cambridge 1892.
E. Study, Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Funktionen. Abh. Ges. Leipzig **20**, 83—232, 1893.

Die trigonometrischen Tafeln sind unter „Logarithmen" aufgeführt, die trigonometrischen Funktionen in der „Funktionentheorie".

§ 6. **Praktische Trigonometrie. Niedere Geodäsie. Markscheidekunst.** Die niedere Geodäsie oder Vermessungslehre bedient sich der Trigonometrie, weshalb wir sie in diesen Abschnitt mit aufnehmen. Sie umfaßt die Feld-, Land- und Forstmessung, auch als Markscheidekunst die Gruben-Vermessung, Tachymetrie oder Schnellmessung ist dasjenige Verfahren, bei dem Lagemessung und Höhenmessung gleichzeitig bestimmt wird. Die rein mathematisch wichtigen Arbeiten aus der höheren Geodäsie werden in der „Theorie der krummen Flächen" ihren Platz finden.

Den, der sich für die geodätische Literatur interessiert, verweisen wir auf folgende Werke:

O. Boersch, Geodätische Literatur. (Internationale Erdmessung.) Berlin 1889. VIII u. 226.
J. Howard Gore, A bibliography of geodesy. Washington 1889. 200 S. 4°.
E. Wiechert, Einführung in die Geodäsie. Aus F. Klein und E. Riecke, Über angewandte Mathematik und Physik. Vorträge. Leipzig 1900, 57—113.
C. Reinhertz, Niedere Geodäsie. Encykl. d. math. Wiss. VI, **1**, 1—97. 1905.
W. Jordan, Handbuch der Vermessungskunde. Stuttgart. 3 Bde. I, 5. Aufl. 1904. II, 6. Aufl. 1904. III. 4. Aufl. 1896.

Schon bei Aristoteles stand die Geometrie, die wissenschaftliche Raumlehre, gegenüber der Geodäsie, der praktischen Feldmeßkunst. Der älteste Vertreter derselben war vielleicht Heron von Alexandria. Indem wir wegen der Geschichte der praktischen Geometrie auf das Geschichtswerk von M. Cantor (S. Teil I, Abschn. I, S. 3) und die übrigen



obengenannten Geschichtswerke verweisen, führen wir hier nur noch folgende Schriften an:

M. Cantor, Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmeßkunst. Eine historisch-mathematische Untersuchung. Leipzig 1875. 237 S.
E. Stöber, Die römischen Grundsteuer-Vermessungen nach dem lateinischen Texte des gromatischen Codex, insbesondere des Hyginus, Frontinus und Nipsus. München 1877.
H. Mendthal, Geometria Culmensis. Ein agronomischer Traktat aus der Zeit des Hochmeisters Conrad von Jungingen (1393—1407). Leipzig 1886.

Von älteren Büchern über praktische Geometrie nennen wir:

Joannes Stöffler, Von künstlicher Abmessung aller Größe, ebene oder niedere, in die Länge, Höhe, Breite und Tiefe. Aus wahrem Grund der Geometria, Perspectiva und Arithmetik. Frankfurt 1536.
Erasmus Reinhold, Vom Feldmessen und Markscheiden. Frankf. 1574 u. 1615.
Chr. Clavius, Geometria practica. Rom 1604.
Dan. Schwenter, Geometria practica nova. Nürnberg 1618—1627. Neue Ausg. 1623—1627, 1641 u. 1667.
I. F. Penther, Praxis geometriae. Augsburg 1732. Zugabe 1739. 8. Aufl. 1776.
J. Tob. Mayer, Gründlicher und ausführlicher Unterricht in der praktischen Geometrie. 3 T. Göttingen. I, 1777, 478 S. II, 1779, 487 S. III, 1783, 551 S. 4. Aufl. 5 Bde. 1814—1820.
M. Mallet, La géométrie pratique. 4 v. Paris 1702.
J. A. Eytelwein, Aufgaben, größtenteils aus der angewandten Mathematik, zur Übung der Analysis für angehende Feldmesser, Ingenieurs und Baumeister. Berlin 1793. (Noch heute von Wert.)
F. W. v. Oppel, Anleitung zur Markscheidekunst. Dresden 1749. 484 S.
Joh. Fr. Weidler, Institutiones geometriae subterraneae. Wittenberg 1726, 1751. Dtsch. von Fuchsthaler. Wien 1765. 117 S.
A. G. Kästner, Anmerkungen über die Markscheidekunst. Nebst einer Abhandlung über Höhenmessungen durch das Barometer. Göttingen 1775. 440 S.
de Genssane, Géométrie souterraine, ou Traité de la géométrie pratique, appliquée à l'usage des travaux des mines. Montpellier 1776. 224 S.
J. F. Maler, Geometrie und Markscheidekunst. Karlsruhe 1762. 248 S. Neue Aufl. von Kästner 1767; von Wucherer 1795. 256 S.
L. Puissant, Traité de géodésie, ou Exposition des méthodes trigonométriques et astronomiques. Paris. 2. éd. 1819, Suppl. 1827; 3. éd. 2 v. 1842. — Traité de topographie, d'arpentage et de nivellement. 2. éd. Paris 1820.
F. Proß, Lehrbuch der praktischen Geometrie. Stuttgart 1838.
Ign. Porro, Traité de tachéométrie. Paris 1847.
S. Stampfer, Theoretische und praktische Anleitung zum Nivellieren. Wien 1845. 9. Aufl. von F. Lorber 1894; 10. Aufl. von E. Doležal 1902. XIV u. 308. gr. 8°.
J. Weisbach, Die neue Markscheidekunst. Braunschweig. 2 T. 1851 u. 1859.
A. Pelletan, Opérations souterraines. Paris 1889.
F. Baur, Lehrbuch der niederen Geodäsie. Berlin. 5. Aufl. 1890. XVI u. 579.
A. Baule, Lehrbuch der Vermessungskunde. Leipzig 1891. X u. 405.
H. Groß, Die einfacheren Operationen der praktischen Geometrie. Leitfaden für den Unterricht an technischen Lehranstalten. Stuttgart. 4. Aufl. 1894. VIII u. 94.
F. Hartner, Handbuch der niederen Geodäsie. 7. Aufl. von J. Wastler. Wien 1892. XIV u. 800; 9. Aufl. von E. Doležal. 1904 u. 1905.
A. Wüst, Leichtfaßliche Anleitung zum Feldmessen und Nivellieren. Für Landwirte. Berlin. 3. Aufl. 1892. VI u. 154.

C. M. Goulier, Études théoriques et pratiques sur les levers topométriques et en particulier sur la tachéométrie. Paris 1892.
O. Brathuhn, Lehrbuch der praktischen Markscheidekunst. Leipzig. 3. Aufl. 1902.
F. G. Gauß, Die trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen in der Feldmeßkunst. 2. Aufl. Halle 1893.
P. Uhlich, Lehrbuch der Markscheidekunst. Freiberg i. S. 1901.

Kapitel 4. Kontinuitätsbetrachtungen.

§ 1. **Analysis situs.** In einem Briefe vom 8. September 1679 an Huygens hatte Leibniz den Gedanken einer neuen geometrischen Analysis angeregt, welche „uns unmittelbar den situs ausdrückt, wie die Algebra die magnitudo". Huygens setzte keine große Hoffnung auf diese neue Charakteristik, und erst Euler wußte diese Anregung nutzbar zu machen, indem er die Analysis situs schuf.

L. Euler, Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. Comm. Ac. Petrop. **8**, a. 1736, 128—140 [1741]. Übers. von Coupy, Nouv. Ann. **10**, 106—119, 1851. — Solution d'une question curieuse qui ne paraît soumise à aucune analyse sur la marche du cavalier sur l'échiquier. Hist. Mém. Ac. Berlin **15**, a. 1759, 310—337 [1766].
Ch. A. Vandermonde, Remarques sur les problèmes de situation. Hist. Mém. Ac. sc. Paris, a. 1771, 566 ff.
L. N. M. Carnot, Géométrie de position, à l'usage de ceux qui se destinent à mesurer des terrains. Paris an XI (1803). Übers. Geometrie der Stellung, von H. C. S. Schumacher. Altona 1808.
W. Dyck, Beiträge zur Analysis situs. I. Ber. Ges. Leipzig 1885, 314—325; II. ib. 1886, 53—69; III. ib. 1887, 40—52. — Beiträge zur Analysis situs. I. Math. Ann. **32**, 457—513, 1888: II. ib. **37**, 273—316, 1890.
H. Poincaré, Analysis situs. J. Éc. Polyt. (2) **1**, 1—123, 1895. — Complément à l'Analysis situs. Rend. Circ. mat. Palermo **13**, 285—343, 1899. — 2d Complément. Proc. Math. Soc. London **32**, 277—308, 1900. — 3e Complément. Bull. Soc. Math. France **30**, 49—70, 1902. — 4e Complément. Rend. Circ. mat. Palermo **18**, 45—110, 1903.

§ 2. **Topologie** und **Kristallographie.**

J. B. Listing, Vorstudien zur Topologie. (Göttinger Studien.) Göttingen 1847.
J. B. Listing, Der Census räumlicher Complexe, oder Verallgemeinerung des Eulerschen Satzes von den Polyedern. Abh. Ges. Gött. **10**, a. 1861—62 97—182 [1862].
G. Tait, Listings Topologie. Phil. Mag. (5) **17**, 30—46, 1884.
A. F. Möbius, Über das Gesetz der Symmetrie der Kristalle und die Anwendung dieses Gesetzes auf die Einteilung der Kristalle in Systeme. Ber. Ges. Leipz. 1848, 65—74. — Über symmetrische Figuren. ib. a. 1851, 19—27 [1852].
R. Baltzer, Eine Erinnerung an Möbius und seinen Freund Weiske. Ber. Ges. Leipz. 1885, 1—6. (Historisch.)
C. Reinhardt, Zu Möbius' Polyedertheorie. Ber. Ges. Leipz. 1885, 106—125.
O. Simony, Über eine Reihe neuer Tatsachen aus dem Gebiete der Topologie. Math. Ann. **19**, 110—120, 1881; ib. **24**, 253—281, 1884. Ber. Ak. Wien 1882, 907—928. — Gemeinfaßliche, leicht controllierbare Lösung der Aufgabe, in ein einfach geschlossenes Band einen Knoten zu machen, und verwandter merkwürdiger Probleme. Wien. 3. Aufl. 1881. — Über den Zusammenhang gewisser topologischer Tatsachen mit neuen Sätzen der höheren Arithmetik und dessen theoretische Bedeutung. Ber. Ak. Wien, **96**, 191—286, 1887.
B. Kempe, On the geographical problem of the four-colour theorem. Amer. J. math. **2**, 193—200. 1879.



P. J. Heawood, Map-colour theorem. Quart. J. **24**, 332—338, 1890. — On the four-colour map theorem, ib. **29**, 270—285, 1897.
L. Heffter, Über das Problem der Nachbargebiete. Math. Ann. **38**, 477—508, 1891.
A. Schoenflies, Über reguläre Gebietsteilungen des Raumes. Gött. Nachr. 1887, 223—237. — Über Gruppen von Transformationen des Raumes in sich. Math. Ann. **34**, 172—203, 1889.
E. Goursat, Sur les substitutions orthogonales et les divisions régulières de l'espace. Ann. Éc. Norm. (3) **6**, 9—102, 1889.
V. Eberhard, Eine Klassifikation der allgemeinen Ebenensysteme. Journ. f. Math. **106**, 89—120, 1890.
V. Schlegel, Theorie der homogen zusammengesetzten Raumgebilde. Nova Acta Ac. Leop. **44**, 343—459, 1883.
E. Heß, Über die regulären Polytope höherer Art. Ber. Naturf. Ges. Marburg 1885, 31—57. — Über regelmäßige Einteilungen des dreidimensionalen sphärischen Raumes. ib. 1895, 29—50. — Über eine anschauliche Darstellung der regelmäßigen Einteilungen des dreidimensionalen Raumes. ib. 1898, 89—108. — Beiträge zur räumlichen Konfiguration. Nova Acta Ac. Leop. **55**, 97—167, 1890.
V. Eberhard, Ein Satz aus der Topologie. Math. Ann. **36**, 121—233, 1890.
A. Bravais, Sur les propriétés géométriques des assemblages de points régulièrement distribués dans l'espaces. C. R. Ac. sc. Paris **27**, 1848; **29**, 1849; **31**, 1850. — Sur les applications de la théorie des assemblages à la cristallographie, ib. **28** n. **29**, 1849. Abhandlung über die Systeme von regelmäßig auf einer Ebene oder im Raume verteilten Punkten (1848). Übers. und hrsg. von C. u. E. Blasius. Ostw. Klass. Nr. 90. Leipz. 1897. 142 S.
L. Sohncke, Entwickelung einer Theorie der Kristallstruktur. Leipzig 1879. VIII u. 248.
A. Schoenflies, Beiträge zur Theorie der Kristallstruktur. Gött. Nachr. 1887, 483—501.
A. Schoenflies, Kristallsysteme und Kristallstruktur, geometrisch dargestellt. Leipzig 1891. XII u. 638.
E. S. Fedoroff, Symmetrie der regelmäßigen Systeme von Figuren. Verh. Mineral. Ges. St. Petersb. (2) **28**, 1—146. 1891. (Russisch.)
E. Blasius, Die Geometrie der Lage in ihrer Anwendung auf die Kristallographie. Ann. Phys. Chem. Wiedem. **45**, 108—158; 1892.
J. F. Ch. Hessel, Kristallometrie oder Kristallonomie und Kristallographie. I. II. Leipzig 1831. Hrsg. von E. Heß. Ostw. Klass. Nr. 88 u. 89. Leipzig 1897. 192 u. 165 S.
H. Hilton, Mathematical crystallography and the theory of groups of movements. Oxford 1903. XII u. 262.
E. Sommerfeld, Geometrische Kristallographie. Leipzig 1906.
Th. Liebisch, A. Schoenflies und **O. Mügge,** Kristallographie. Encykl. d. math. Wiss. V, **7**, 391—493, Leipzig 1906.

Kapitel 5. Stereometrie.

§ 1. **Einleitung. Historisches. Ältere Schriften.** Das 11., 12. und 13. Buch der Elemente Euklids (S. S. 12), behandeln die Stereometrie, und zwar das 13te die 5 regelmäßigen Körper. Wichtige Sätze über die Sphärik enthalten Euklids Phaenomena. (S. Werke, oben S. 13).

Archimedes, De sphaera et cylindro libri duo, de conoidibus et sphaeroidibus in den Opera, ed Is. Barrow, London 1675. (S. S. 13 die Ausgabe von Heiberg.)

In den „Opera" sind auch Sphaericorum Theodosii libri tres enthalten.

Die älteste Sphärik, ein astronomisch-geometrisches Lehrbuch der Kugel, schrieb Autolykus um 330 v. Chr.

Autolyci de sphaera quae movetur liber, de ortibus et occasibus libri duo. Ed. Fr. Hultsch. Leipzig 1885. LXIV u. 231.

Archimedes, Zwei Bücher über Kugel und Zylinder. Von K. F. Hauber. Cotta 1798.

Theodosii Sphaericorum libri tres, gr. et lat. Oxon 1707. Deutsche Übers. von E. Nizze. Stralsund 1826.

J. Kepler, Nova stereometria doliorum vinariorum, imprimis Austriaci, Lincei 1615. Dariu Supplementum ad Archimedem de stereometria figurarum, conoidibus et sphaeroidibus proxime succedentium. Deutsch: Auszug aus der uralten Messekunst Archimedis. 1616.

Ch. Fr. Pfleiderer, Kepleri methodus solida quaedam sua dimetiendi illustrata et cum methodis geometrarum posteriorum comparata. Tübingen 1795.

B. Cavalieri, Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota. Bologna 1635. Neue Aufl. 1653.

V. Caravello, Archimedis theoremata de circuli dimensione, sphaera et cylindro, aucta et faciliori methodo demonstrata, quibus accedunt theoremata architectis perutilia de novis solidis sphaeroidalibus. Napoli 1751. 176 S.

L. Euler, Elementa doctrinae solidorum. Novi Comm. Ac. Petrop. **4**, a. 1752—53, 109—140 [1758]. — Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hederis planis inclusa sunt praedita. ib. 140—160. — De mensura angulorum solidorum. Acta Ac. Petrop. **2**, a. 1778. P. II, 31—54 [1781].

A. L. Fr. Meister, De solidis geometricis pro cognoscenda eorum indole in certos ordines et versus disponendis. Commentat. Soc. Gott. **7**, P. II, 3 ff. 1784.

S. L'Huilier, Théorèmes sur les solides plano-superficiels. Mém. Ac. Berlin, a. 1786—87, 423 ff. [1792], — Théorème de polyédrométrie. Mém. prés. Instit. Paris (1800), **1**. 264—289. 1805 u. Paris 1805. — Démonstrations diverses du théorème d'Euler sur les polyèdres. Ann. math. Gergonne **3**, 178 ff. 1812—13.

J. Tob. Mayer, Anleitung zur praktischen Stereometrie. Göttingen 1809.

L. Poinsot, Mémoire sur les polygones et les polyèdres. Mém. prés. Inst. Paris **2**, 552—591, an X, u. Journ, Éc. Polyt. cah. **10**, 16 ff. an IX.

I. F. C. Hessel, Nachtrag zu dem Eulerschen Lehrsatze von den Polyedern. Journ. f. Math. 8, 13—20, 1832.

§ 2. **Neuere Lehrbücher.** In allen Lehrbüchern der Elementarmathematik finden sich auch Abschnitte über Stereometrie. Häufig werden auch Trigonometrie und Stereometrie zu einem Lehrbuch der Elementargeometrie für obere Klassen vereinigt. Aus der Fülle der neueren Lehrbücher der Stereometrie führen wir einige an.

Hub. Müller, Leitfaden der Stereometrie mit Benutzuug neuerer Anschauungsweisen für die Schule. I. T. Die Grundgebilde und die einfachsten Körperformen. Leipzig 1877. VIII u. 127.

J. Henrici und **P. Treutlein,** Die Gebilde des körperlichen Raumes. Abbildung von einer Ebene auf eine zweite. (Kegelschnitte). 2. Aufl. Leipzig 1901. XII u. 192.

J. Petersen, Lehrbuch der Stereometrie. Dtsch. von Fischer-Benzon. Kopenhagen 1885.

G. Hauck, Lehrbuch der Stereometrie. Auf Grund von Dr. Ferd. Kommerells Lehrbuch neu bearb. u. erweitert. 8. Aufl. Tübingen 1900. XVI u. 224. 9. Aufl. von V. Kommerell. 1905. XV u. 224.

G. Holzmüller, Elemente der Stereometrie. Leipzig, I, 1899. X u. 383; II, 1900. XV u. 477; III, 1902. XII u. 335; IV, 1902. XI u. 311.

C. H. v. Nagel, Lehrbuch der Stereometrie. 5. Aufl. von Th. Schröder. Nürnberg 1892. VII u. 132.
F. Reidt, Stereometrie. 9. Aufl. Berlin 1900.
P. Sauerbeck, Lehrbuch der Stereometrie nebst zahlreichen Übungen und einem Abschnitt über Kristallographie. Stuttgart 1900. VII u. 291.
C. Lucke, Leitfaden der Stereometrie. Leipzig 1890. x u. 204.
F. Giudice, Geometria solida. Brescia. 2ª ed. 1900. 279 S.
R. Glaser, Stereometrie. Leipzig, Göschen. 2. Aufl. 1903. 140 S.
J. Rüfli, Lehrbuch der Stereometrie nebst einer Sammlung von Übungsaufgaben. Bern. 3. Aufl. 1904. VII u. 119.
A. Grévy, Géométrie dans l'espace. Paris 2ᵉ éd. 1901. 140 S.
J. Hadamard, Leçons de géométrie élémentaire. P. II. Géométrie dans l'espace. Paris 1901. XXI u. 582.
Th. Spieker, Lehrbuch der Stereometrie mit Übungsaufgaben für höhere Lehranstalten. 3. Aufl. Potsdam 1901. IV u. 119.
E. H. P. Atkinson, Text-book of practical solid geometry. London 1899. 116 S. u. XVI Taf.

§ 3. Aufgaben und Spezielles.

F. Reidt, Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie und Stereometrie. 4. Aufl. von Much. Leipzig 1897. VIII u. 194 u. 58.
H. Lieber, Stereometrische Aufgaben. Berlin 1887. 141 S.
R. C. J. Nixon, Geometry in space, containing parts of Euclids eleventh and twelfth books and some properties of polyhedra and solids of revolution, with exercises. Oxford 1888. VIII u. 101.
M. Schuster, Stereometrische Aufgaben. Leipzig 1900. VII u. 80.
H. Thieme, Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben aus der Stereometrie. Leipzig 1885. 92 S. Ital. von Gambioli und Bernardi. Torino 1891.
K. Jüdt, Aufgaben aus der Stereometrie und Trigonometrie. Ansbach. 6. Aufl. 1900.
P. Scholim, Stereometrische Örter und Konstruktionsaufgaben. Pr. Kreuzburg O.-Schl. I, 1890. II, 1891.
M. Switalski, 50 stereometrische Aufgaben aus der Optik für Oberprima. Pr. Baunsberg 1892. 26 S. 4⁰.
A. Rivelli, Stereometria applicata allo sviluppo dei solidi ed alla loro costruzione in carta. Milano, Hoepli 1897. 90 S. 12⁰.
G. Holzmüller, Einführung in das stereometrische Zeichnen. Mit Berücksichtigung der Kristallographie und Kartographie. Leipzig 1886. VI. u. 102.
A. Brude, Das Zeichnen der Stereometrie. Stuttgart 1872.
F. C. M. Marie, Géométrie stéréographique, ou Reliefs des polyèdres pour faciliter l'étude des corps en 25 planches gravées. Paris 1835.
C. Ibrügger, Zeichnungen für den stereometrischen Unterricht. Pr. Greifenberg 1897. 23 S.
C. Heinze, Die halbregelmäßigen Körper. Pr. Cöthen 1868.
T. Hugel, Die regulären und halbregulären Polyeder. Pr. Neustadt a. H. 1876.
M. Steinhauser, Die Netze der Poinsotschen Körper. Graz 1871.
O. Löwe, Über die regulären und Poinsotschen Körper und ihre Inhaltsbestimmung vermittels Determinanten. Arch. Math. Phys. **57,** 392—419, 1875. 2. Aufl. München 1883.
W. Fischer, Netze zur Herstellung geometrischer Körper. Dresden 1891.
V. Eberhard, Zur Morphologie der Polyeder. Leipzig 1891. IV u. 245.
M. Brückner, Geschichtliche Bemerkungen zur Aufzählung der Vielflache. Pr. Zwickau 1897. 19 S. u. 7 Taf.
Poinsot, Cauchy, Bertrand, Cayley, Abhandlungen über die regelmäßigen Sternkörper. Übers. u. hrsg. von R. Haußner. Leipzig 1906.
A. Bravais, Note sur les polyèdres symétriques de la géométrie. Mémoire sur

les polyèdres de forme symétrique. Paris 1849. Abhandlungen über symmetrische Polyeder. Übers. u. mit P. Groth hrsg. von C. u. E. Blasius. Ostw. Klass. Nr. 17. Leipzig 1890. 50 S.
Chr. Wiener, Über Vielecke und Vielflache. Leipzig 1864. VIII u. 31.
A. F. Möbius, Über die Bestimmung des Inhalts eines Polyeders. Ber. Ges. Leipz. **17**, 31—67, 1865.
E. Heß, Über die zugleich gleicheckigen und gleichflächigen Polyeder. Pr. Kassel 1876.
C. Reinhard, Einleitung in die Theorie der Polyeder. Pr. Meißen 1890.
O. Hermes, Verzeichnis der einfachsten Vielflache. Pr. Berlin 1896. — Die Formen der Vielflache. Journ. f. Math. **120**, 27—59, 305—353, 1899; **122**, 124—154, 1900; **123**, 312—342, 1901. — Die Formen der Vielflache. Nova Acta Ac. Leop. **85**, Nr. 5, 431—443, u. 2 Taf. 1906.
Edm. Heß, Einleitung in die Lehre von der Kugelteilung. Mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendung auf die Theorie der gleichflächigen und der gleicheckigen Polyeder. Leipzig 1883. x u. 476.
Strenger, Über halbregelmäßige Vielflache. Pr. Schwäb. Hall 1905. 44 S.
M. Brückner, Über die gleicheckig-gleichflächigen, diskontinuierlichen und nichtkonvexen Polyeder. Nova Acta Ac. Leop. **86**, Nr. 1. 1906. 348 S. u. 29 Tafeln.

§ 4. **Visierbücher.** Das älteste deutsche Visierbuch, zum Gebrauche der Visierrute beim Ausmessen von Fässern und anderen Hohlmaßen gab:
Hans Sporer, gen. **Briefmaler,** Fisierbüchlein auf allerhand Eich. Bamberg 1485.
J. Kepler, Nova stereometria doliorum. 1616, siehe oben in § 1 (S. 157).
J. H. Lambert, Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendungen. Berlin. 4 Bde. 1765—1772. In I, 314 ff.: Die Visirkunst sowohl ganz als nicht ganz ausgefüllter liegender Fässer, auf ihre einfachsten Gründe und Regeln gebracht. 1765.
Espr. Pezenas, La théorie et pratique du jaugeage des tonneaux, des navires et de leurs segmens. Avignon 1742. 2. Aufl. 1778. 149 S.
Mt. Müller, Versuch, den Inhalt der Fässer durch Anwendung der Muschellinie zu finden. Aus d. Holl. Leipzig 1784. 46 S.
Sören Brunn, Tafeln für den Inhalt der Fässer mit Erklärung für den Gebrauch derselben. Von d. Dän. Ak. gekrönte Preisschrift. 2 Bde. Kopenhagen 1797 u. 1799.
K. L. Bleibtreu, Die Visir-Kunst, oder theoretisch-praktische Anleitung zum Visiren der Fässer. Karlsruhe 1833.
C. H. J. Berchuys, De dolimetria. Diss. Deventer 1839.
A. Mesmer, Bestimmung des Rauminhalts einer tropfbaren Flüssigkeit in vollen und nicht vollen Fässern. Pr. Innsbruck 1876.
K. Broda, Bestimmung des Inhalts von Fässern. Pr. Karolinenthal 1879.
P. Mansion, Formules pour le jaugeage des tonneaux. Mathesis (2) **2**, 14—17, 1892.
C. Pietsch, Katechismus der Raumberechnung. Anleitung zur Größenbestimmung von Flächen und Körpern jeder Art. 4. Aufl. Leipzig 1899. VIII u. 124.

Kapitel 6. Darstellende Geometrie.

§ 1. **Einleitung. Historisches. Anfänge.** Als besondere mathematische Disziplin wurde die darstellende Geometrie, géométrie descriptive, von G. Monge zugleich mit der École Polytechnique zu Paris 1794 begründet.
G. Poudra, Histoire de la perspective ancienne et moderne. Paris 1864.

L. Cremona, Sulla storia della prospettiva antica e moderna. Riv. ital. sc., lett., arti **5**, 226—231, 241—245, 1865.
R. Riccardi, Di alcuni opere di autori italiani ommesse nella Histoire de la perspective di M. Poudra. Bibl. math. (2) **3**, 39—42, 1889.
E. Papperitz, Über die wissenschaftliche Bedeutung der darstellenden Geometrie und ihre Entwicklung bis zur systematischen Begründung durch Gaspard Monge. Rede. Freiberg i. S. 1901. 24 S.
F. J. Obenrauch, Geschichte der darstellenden und projektiven Geometrie, mit besonderer Berücksichtigung ihrer Begründung in Frankreich und Deutschland und ihrer wissenschaftlichen Pflege in Österreich. Brünn 1897. vi u. 442.

Die Anfänge der Perspektive reichen bis in das V. Jahrhundert v. Chr. zurück, bis auf Agatharchus, Anaxagoras und Demokritos. Hipparch, um 150 v. Chr., war der Erfinder der stereographischen Projektion; diese und andere geographischen Projektionen lehrte Claudius Ptolemäus um 135 n. Chr. Besonders durch die Übersetzung der Optik Alhazens (um 1000) wurde die Perspektive im Abendlande bekannt. Der Mönch Witelo, Vitellio, schrieb um 1300 eine „Perspectiva"; der berühmte Maler Leonardo da Vinci behandelte um 1500 die Perspektive in seinem ‚Trattato della pittura'. Die erste Anleitung zum richtigen geometrischen Zeichnen für Künstler, eine Reißkunst, gab 1525 Dürer.

Albrecht Dürer, Underweysung der messung mit dem zirkel und richtscheyt, in Linien, ebenen und gantzen corporen. Arnheim 1525.
Clavius, Astrolabium. Rom 1593. (Über stereographische Projektion, Beschreibung des Proportionalzirkels.)
Fr. Aguillon, Opticorum libri VI. Antwerpen 1613. fol. (Sätze über Perspektive; das Wort „stereographische Projektion".)
G. Barozzi Vignola, Le due Regole della prospettiva pratica. Roma 1582 u. viele Auflagen. Mit Kommentar von Egnatio Danti. Rom 1611.
Gérard Desargues, Broullion projet d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cone avec un plan. Paris 1639. — Brouillon projet d'exemple d'une manière universelle. Paris 1640. (Begriff der Involution von 6 Punkten, Perspektive, Steinschnitt.)
G. Desargues, Manière universelle pour pratiquer la perspective. Ed. Abr. Bosse. Paris 1648.
Andrea Alberti, Zwei Bücher von der Perspektive. Nürnberg 1670.
Brook Taylor, New principles of linear perspective. London 1719.
A. Fr. Frezier, La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois ou traité de stéréotomie. Straßburg 2 v. 1738—39. 3 v. Paris 1754, 1760, 1768, 1759.
J. H. Lambert, Die freie Perspektive oder Anweisung, jeden perspektivischen Aufriß von freien Stücken und ohne Grundriß zu verfertigen. Zürich 1759; 2. Aufl. 1774. (Auch Historisches).
J. H. Lambert, Sur la perspective aérienne. Mém. Ac. Berlin a. 1774, 74 ff. [1776].
J. A. Segner, Anfangsgründe der Perspective. Berlin 1779. 94 S. 4°.
G. H. Werner, Anweisung aller Arten von Perspekten nach den Regeln der Kunst und Perspektiv von selbst ziehen zu lernen. Erfurt 1781. 130 S.
G. S. Klügel, Geometrische Entwickelung der Eigenschaften der stereographischen Projektion. Berlin u. Stettin 1788.

§ 2. Lehrbücher der darstellenden Geometrie.

G. Monge, Leçons de géométrie descriptive. Séances des écoles normales, I—IV. Paris 1795. 4°. 6e éd. 1837; 7e éd. p. Brisson 1847. — Traité de géométrie descriptive. Paris 1799. 4; 2d éd. 1811; 5e éd. p. Brisson 1827.

Nouv. éd. 1898—99. Dtsch. von Schreiber. Freiberg 1822. Übers. u. hrsg. von R. Haußner. Ostw. Klass. Nr. 117. Leipzig 1900. 217 S. 12°.

S. F. Lacroix, Essai de géométrie sur les plans et les surfaces courbes. (Éléments de géométrie descriptive.) Paris 1795; 2e éd. 1802. 7e éd. 1840. (Darstellung von Durchschnitten, Perspektive etc.)

Th. Olivier, Développements de géométrie descriptive. Paris 1843. — Cours de géométrie descriptive. Paris 1845. (Compléments de géométrie descriptive. Paris 1845.) 2e éd. 3 Parties. 1852.

J. Adhémar, Traité de géométrie descriptive. 3e éd. Paris 1847.

A. L. Busch, Vorschule der darstellenden Geometrie. (Für Techniker.) Mit e. Vorw. von C. G. J. Jacobi. Berlin 1846.

F. Wolff, Die beschreibende Geometrie, die geometrische Zeichenkunst und die Perspektive. Berlin. 2. Aufl. 1847; 3. Aufl. 1861.

K. Pohlke, Darstellende Geometrie. Berlin 2. Aufl. 1866; 6. Aufl. 1874.

A. Amiot, Leçons nouvelles de géométrie descriptive. Paris 1852.

C. F. A. Leroy, Traité de géométrie descriptive. 2e éd. 2 vols. Paris 1847. Dtsch. von E. F. Kauffmann. 2. Aufl. Stuttgart 1853. 12e éd. par E. Martelet. Paris 1885; 14e éd. 1896. xx u. 370 u. 71 Taf.

J. A. R. de La Gournerie, Traité de géométrie descriptive. Paris 1862; 2e éd. 3 Parties. I, 1873; II, 1880; III, 1885. 3e éd. resp. 1891, 1880, 1901. xx u. 230.

Jos. Schlesinger, Die darstellende Geometrie im Sinne der neueren Geometrie. Wien 1870.

R. Sturm, Elemente der darstellenden Geometrie. Leipzig 1874. 100 S. 2. Aufl. 1900. v u. 157.

E. Prix, Elemente der darstellenden Geometrie. Leipzig 1883. iv u. 120.

B. Gugler, Lehrbuch der descriptiven Geometrie. Stuttgart. 4. Aufl. 1880.

R. Heger, Darstellende Geometrie. Breslau. 1880. 118 S.

A. Schmidt, Elemente der darstellenden Geometrie. Die orthogonale Projektion. Wiesbaden 1882. 229 S. u. Atlas.

A. Mannheim, Premiers éléments de la géométrie descriptive. Paris 1882. — Cours de géométrie descriptive de l'École Polytechnique, comprenant les Éléments de la Géométrie cinématique. Paris, Gand. 2e éd. 1886.

W. Fiedler, Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage. Leipzig. I. Die Methoden der darstellenden Geometrie und die Elemente der projektivischen Geometrie. 4. Aufl. 1904. xxiv u. 431. II. Die darstellende Geometrie der krummen Linien und Flächen. 3. Aufl. 1885. xxxiii u. 560. III. Die konstruierende und analytische Geometrie der Lage. 3. Aufl. 1888. xxx u. 660. (Historisches und Literaturangaben.)

Ch. Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie Leipzig. I, 1884. xx u 477. II, 1887. xxx u. 649. (Auch Historisches.)

G. A. v. Peschka, Darstellende und projektive Geometrie, nach dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft. 4 Bde. Wien. I, 1883. 578 S. m. Atl. 2. Aufl. 1899. xxi u. 719. II, 1884. 576 S. m. Atl. III, 1884. 792 S. m. Atl. IV, 1885. 550 S. m. Atl.

N. Breithof, Traité de géométrie descriptive. Paris. 2e éd. 3 v. I, 1880—81. II, 1883. 333 S. III, 4e éd. 1901. 193 S.

Ch. Brisse, Cours de géométrie descriptive. 2 v. Paris. 2e éd. 1901.

J. Schlotke, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. 4 Bde. Dresden. I, 5. Aufl. 1902. iv u. 167. II. 3. Aufl. 1902. ii u. 60. III. 2. Aufl. 1902. v u. 133. IV. 2. Aufl. 1896. v u. 177.

K. Rohn und **E. Papperitz,** Lehrbuch der darstellenden Geometrie. 2 Bde. Leipzig. I, 2. Aufl. 1901. xx u. 418. II, 1896. xv u. 528.

F. Smolik, Elemente der darstellenden Geometrie. 3. Aufl. von J. F. Heller. Leipzig 1906. vi u. 306 u. 334 Fig.

X. Antomari, Cours de géométrie descriptive. Paris. 3e éd. 1906. 623 S. — Traité de géométrie descriptive. 3e éd. Paris 1904. 164 S.

Chr. Beyel, Darstellende Geometrie. Mit einer Sammlung von 1800 Dispositionen zu Aufgaben. Leipzig 1901. XII u. 190.
J. Vonderlinn, Darstellende Geometrie für Bauhandwerker. I. 2. Aufl. Bremerhaven 1904. VIII u. 228. II. Stuttgart 1894. VIII u. 161. 2. Aufl. 1907.
H. Ferval, Éléments de géométrie descriptive. Paris 6e éd. 1906. VI u. 326. 12°.
F. Enriques, Lezioni di geometria descrittiva, pubbl. p. U. Concina. Bologna 1902. XI u. 421.
F. J. (Brunhes), Éléments de géométrie descriptive avec de nombreux exercices. Paris 7e éd. 1902. 462 S. 16°.
E. Lebon, Géométrie descriptive et géométrie cotée, Paris 1905. VI u. 176.
Max Bernhard, Darstellende Geometrie. (Leitfaden für Techniker.) Stuttgart. 2. Aufl. 1905. XI u. 278.
F. Aschieri, Lezioni di geometria descrittiva. Milano. 2a ed. 1895 443 S.
G. Loria, Vorlesungen über darstellende Geometrie. Dtsch. von Fr. Schütte, I. Die Darstellungsmethoden. Leipzig 1907. XI u. 219.

§ 3. Spezielles. Aufgaben. Photogrammetrie.

Ch. Scheiner, Pantografice seu ars delineandi res quaslibet per parallelogrammum lineare seu cavum, mechanicum, mobile. Romae 1631. 4°. (Storchschnabel.)
W. v. Bohl, Instrumente und Apparate für geometrisches Zeichnen mit Erklärung ihrer Theorie. Hrsg. von d. Techn. Ges. Moskau. 1893. VII u. 243. Russisch. (Geschichtliches.)
G. Poudra, Traité de perspective-relief. Paris 1860. 224 S.
J. A. R. de La Gournerie, Traité de perspective linéaire. Paris 3e éd. 1898.
L. Delaistre, Cours complet de dessin linéaire, gradué et progressif. 4 P. Paris 5e éd. 1894. 70 S. 60 Taf. 4°.
G. Müller, Zeichnende Geometrie. 5. Aufl. Stuttgart 1892. VIII u. 92 u. 10 Taf. Übungsstoff für das geometrische Zeichnen. Stuttgart. 10. Aufl. 1892. 112 S. 12° u. 21 Taf.
H. Becker, Geometrisches Zeichnen. Neu bearb. von J. Vonderlinn. Leipzig, Göschen. 3. Aufl. 1903. 136 S. u. 23 Taf.
A. Stuhlmann, Zirkelzeichnen. Allg. Teil. (Für Techniker.) Dresden 13. Aufl. 1891. XV u. 11 S. u. 18 Taf. 12°.
A. J. Preßland, Geometrical drawing. London 1892. VII u. 144.
J. Vonderlinn, Vorlegeblätter für den Unterricht in Linear- und Projektionszeichnen. Stuttgart. 1892. 12 Taf. u. 13 Bl. gr. 4°.
J. H. Spanton, Science and art drawing. Complete geometrical course. London 1895. 582 S.
A. Göller, Lehrbuch der Schattenkonstruktion und Beleuchtungskunde. Mit 200 Übungsaufgaben. Stuttgart 1895. VIII u. 160 gr. 4° u. 4 Taf.
J. Kugelmayr, Die Projektionslehre. Mit bes. Berücksichtigung des Bau- und Maschinenfaches. Wien 1891. VIII u. 168 S. 8°.
C. H. Müller und **O. Preßler,** Leitfaden der Projektionslehre. Ein Übungsbuch der konstruierenden Stereometrie. Ausg. A. VIII u. 320. Ausg. B. VI u. 138. Leipzig 1903.
A. Weiler, Neue Behandlung der Parallelprojektionen und der Axonometrie. Leipzig 1896. VIII u. 210.
Chr. Beyel, Axonometrie und Perspektive. Stuttgart 1887. V u 57.
R. Schüßler, Orthogonale Axonometrie. Ein Lehrbuch zum Selbststudium. Leipzig 1905. VIII u. 170.
J. Vonderlinn, Parallelperspektive; Rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie. Leipzig 1905. 112 S.
J. Doré, Traité pratique de perspective et théorie nouvelle et rationnelle des ombres portées. Paris 1904. IV u. 172.
G. Schreiber, Lehrbuch der Perspektive. Leipzig. 3. Aufl. 1886. XXII u. 212.
G. A. v. Peschka, Freie Perspektive. 2. Aufl. Leipzig. I. 1888. XXIII u. 336. II, 1889, XX u. 328.

W. Streckfuß, Lehrbuch der Perspektive. Berlin. 3. Aufl. 1897. 180 u. 12.
F. Chomé, Plans cotés. Cours de géométrie descriptive de l'École militaire. Paris. 4e éd. 1904. VI u. 171.
N. Charruit, Cours de géométrie cotée à l'usage des candidats à l'École spéc. mil. de St. Cyr. Paris 1898. IV u. 299. gr. 8°.
E. Brassinne, Éléments de géométrie descriptive appliquée à la coupe des pierres et à la charpente. Paris 1868.
C. F. A. Leroix, Traité de stéréotomie, comprenant les applications de la géométrie descriptive à la théorie des ombres, la perspective linéaire, la gnomonique, la coupe des pierres et la charpente. 12e éd. Paris 1898.
F. Breithof, Stéréotomie, théorie et construction des arches biaises. Paris 1901. 68 S.
R. Gerke, Aufgabensammlung aus der darstellenden Geometrie. 40 Tafeln mit 350 Fig. 2. Aufl. von C. Schönermark. Hannover 1889.
J. F. Heller, Methodisch geordnete Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der darstellenden Geometrie für Realschulen. 3 T. I, 1904, IV u. 103; II, 1892. IV u. 106; III, 1893, 49 S.
E. Sailer, Die Aufgaben aus der darstellenden Geometrie, welche bei der Prüfung für das Lehramt der Math. u. Phys. 1873—93 gestellt wurden. München 1899. 75 S. gr. 8°.

Die Photogrammetrie, oder Metrophotographie, wie sie ihr Erfinder A. Laussedat (1850) nannte, leitet für bestimmte Visierrichtungen die Horizontal- und Vertikalwinkel aus dem photographischen Bilde her.

A. Laussedat, Historique de l'application de la photographie au lever des plans. C. R. Assoc. France (2) **21**, 215—238. 1892.
A. Laussedat, Recherches sur les instruments, les méthodes et le dessin topographique. II: 1 Iconométrie et métrophotographie. Paris 1901. 198 S. u. 15 Taf.
A. Meydenbauer, Das photographische Aufnehmen zu wissenschaftlichen Zwecken, insbesondere das Meßbildverfahren. 2 Bde. I. Die photographischen Grundlagen und das Meßbild-Verfahren mit kleinen Instrumenten. Berlin 1892. VIII u. 200.
C. Koppe, Die Photogrammetrie oder Bildmeßkunst. Weimar 1889. XII u. 83 u. 7 Taf. — Photogrammetrie und internationale Wolkenmessung. Braunschweig 1896. VIII u. 108 u. 5 Taf.
K. Heun, Die Bestimmung der Geschwindigkeit nach den Methoden der Photogrammetrie. Z. Math. Phys. **44**, 18—27, 1899.
S. Finsterwalder, Die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie. Jhrsb. Dtsch. Math.-Ver. **6**, 2, 1—41, 1899.
Fr. Schilling, Über die Anwendungen der darstellenden Geometrie, insbesondere über die Photogrammetrie. Vorträge. Leipzig 1904. VIII u. 196.
A. Schell, Die stereophotogrammetrische Bestimmung der Lage eines Punktes im Raume. Wien 1904. 37 S.
A. Sprung, Über die allgemeinen Formeln der Photogrammetrie. Sep. Ergebn. d. internat. Wolkenjahrs. Potsdam 1896—97.
S. Finsterwalder, Eine neue Art der Photogrammetrie bei flüchtigen Aufnahmen zu verwenden. Stgsber. Ak. München **34**, 103—111, 1904.

Abschnitt II. Höhere Geometrie.

Kapitel 1. Analytische Geometrie.

§ 1. **Einleitung. Historisches. Ältere Schriften.** Die analytische Geometrie erforscht die Raumgebilde mit Hilfe von Gleichungen zwischen veränderlichen Größen, die geeignet sind, die Elemente der Raum-

gebilde, Punkte, Linien etc. anschaulich darzustellen. Descartes, 1637, ist der Begründer der analytischen Geometrie. Wahrscheinlich war Fermats älteste Schrift über analytische Geometrie: „Ad locos planos et solidos isagoge" schon früher verfaßt als Descartes' Géométrie, sie erschien aber erst in den „Varia Opera" 1679.

R. Descartes, Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences. Plus la Dioptrique, les Météores et la Géométrie. Leyden. 1637. (78) u. 294 S. 4°. — Geometria a Renato des Cartes 1637 gallica edita, cum Notis Florimondi de Beaune. Leyden 1649. XII u. 336. 4°. — Geometria. I, II. Amsterd. 1659, XII u. 520; XIV u. 424. (Der II. Teil enthält Schriften von F. van Schooten, E. Bartholin, Flor. de Beaune, J. de Witt.) Viele spätere Ausgaben. Auch in Auguste Comte, La géométrie analytique, Nouv. éd. Paris 1894 findet sich S. 1—111 Descartes' Geometrie. — Die Geometrie von René Descartes. Deutsch hrsg. von L. Schlesinger. Berlin 1894. X u. 116.

Jan de Witt, Elementa linearum curvarum. Lugd. Bat. 1659. (Dieser Abschnitt der soeben genannten Ausgabe von Descartes' Geometrie enthält im 2. Buche die Elemente der analytischen Geometrie der Ebene.)

John Wallis, Tractatus de sectionibus conicis nova methodo expositis. Oxoniae 1655.

René de Sluze, Mesolabium. Lüttich 1668. (Mehrfache Anwendungen der Cartesischen Algebra.)

G. P. de Roberval, De geometrica planarum et cubicarum aequationum resolutione. Anc. Mém. Ac. sc. Paris **7**, Ed. La Haye 1731, 113—203. Posth.

Ph. de Lahire, Nouveaux éléments des sections coniques. Paris 1678.

John Craig, Methodus figurarum lineis rectis et curvis comprehensarum quadraturas determinandi. London 1685. (Auch Anwendung der Infinitesimalrechnung auf analytische Geometrie).

G. Fr. de l'Hospital, Traité analytique des sections coniques et de leur usage pour la résolution des équations dans les problèmes tant déterminés qu'indéterminés. Paris 1707.

Guisnée, Application de l'algèbre à la géométrie, ou méthode de démontrer par l'algèbre les théorèmes de géométrie et d'en résoudre et construire tous les problèmes. Paris 1705. 252 S. 4°. 2e éd. 1733. Auch 1753, 1773.

Claude Rabuel, Commentaire sur la Géométrie de M. Descartes. Lyon 1730.

L. Euler, Introductio in analysin infinitorum. Lausannae 2 v. 1748. (Der 2. Band enthält eine methodische Darstellung der analytischen Geometrie der Ebene und des Raumes, die in bezug auf Klarheit und Strenge von keinem Lehrbuch der analytischen Geometrie übertroffen wird.) Deutsch von Ch. Michelsen. 3 Teile. Berlin 1788—1791.

J. P. de Gua de Malves, Usage de l'analyse de Descartes pour découvrir, sans le secours du calcul différentiel, les propriétés ou affections principales des lignes géométriques de tous les ordres. Paris 1740. 497 S. 12°. (Eine vortreffliche Darstellung der Theorie der krummen Linien.)

Gabriel Cramer, Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques. Genève 1750. XXIII u. 680 u. XII S. 4°. (Abgeschlossene Theorie der algebraischen Kurven nach Descartes' Methode).

Vinc. Riccati et Hieron. Saladini, Institutiones analyticae. Bologna 1765. (Enthält im 1. Bande eine analytische Geometrie der Kegelschnitte und der Kurven höherer Ordnung).

Edw. Waring, Miscellanea analytica de aequationibus algebraicis et curvarum proprietatibus. Cantabr. 1762. Neue Aufl. der Proprietates curvarum 1772.

S. Gurief, Mémoire sur la résolution des principaux problèmes, qu'on peut proposer dans les courbes, dont les coordonnées partent d'un point fixe. Nova Acta Ac. Petrop. **12,** a. 1794, 176—191 [1801]. (Zusammenstellung der Formeln für Polarcoordinaten.)

§ 2. **Lehrbücher der elementaren analytischen Geometrie.** Elementare Lehrbücher der analytischen Geometrie nennen wir solche, welche die Methoden der Infinitesimalrechnung ausschließen. Die Zahl der Lehrbücher der analytischen Geometrie ist so groß, daß wir nur eine verhältnismäßig geringe Zahl hier nennen können und selbst recht brauchbare Lehrbücher fortlassen müssen. Dafür führen wir einige recht gute ältere Lehrbücher an.

Ch. Bossut, Traité élémentaire de géométrie et de la manière d'appliquer l'algèbre à la géométrie. Paris 1774. 518 S.

J. B. Biot, Traité analytique des courbes et des surfaces du second degré. Paris 1802. — 2e éd. Essai de géométrie analytique appliquée aux courbes et aux surfaces du second ordre. Paris 1805. — 8e éd. 1834. Dtsch, von Ahrens. 2. Aufl. Nürnberg 1840. Engl. von Smith. 2nd ed. Philadelphia. 1858.

S. A. J. L'Huilier, Éléments d'analyse géométrique et d'analyse algébrique appliquées à la recherche des lieux géométriques. Paris 1809.

Nils Schenmark, Analytische Geometrie, worin nebst den ersten Gründen der Algebra, ihre Anwendung auf Elementar-Geometrie und die Kegelschnitte enthalten. Aus d. Schwed. Kopenhagen 1779. 144 S. (Das schwedische Original erschien erst 1785).

F. L. Lefrançais, Essais de géométrie analytique. 2e éd. Paris 1804.

H. W. Brandes, Lehrbuch der höheren Geometrie. 2 T. Leipzig 1822 u. 1824.

T. Bugge, Anleitung zur analytischen Geometrie. Deutsch von Tobiesen. Altona 1816.

L. B. Francœur, Die analytische Geometrie in der Ebene. Dtsch. von Külp. Bern 1839. — Die analytische Geometrie im Raume. 2. Aufl. Dtsch. von Külp. Bern 1845. (Aus dem Cours complet de mathématiques pures).

J. G. Garnier, Géométrie analytique ou Application de l'algèbre à la géométrie. 2e éd. Paris 1813.

J. J. Littrow, Analytische Geometrie. Wien 1823.

M. Ohm, Die analytische und höhere Geometrie in ihren Elementen mit vorzüglicher Berücksichtigung der Theorie der Kegelschnitte. Berlin 1826.

P. L. M. Bourdon, Application de l'algèbre à la géométrie à deux et à trois dimensions. Paris 1824. 9e éd. Paris 1880. Nouv. éd. p. Darboux. Paris 1906. XVIII u. 650.

J. L. Boucharlat, Théorie des courbes et des surfaces du second ordre, ou Traité complet d'application de l'algèbre à la géométrie. 3e éd. Paris 1845.

J. A. Grunert, Elemente der analytischen Geometrie. Leipzig 1839.

C. F. A. Leroy, Analyse appliquée à la géométrie de trois dimensions. 4e éd. Paris 1854. Dtsch. von E. F. Kauffmann. Stuttgart 1840.

O. Hesse, Vier Vorlesungen aus der analytischen Geometrie. Leipzig 1866 u. Ztschr. f. Math. Phys. **11**, 369—425, 1866.

O. Hesse, Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes. Leipzig 1861. 2. Aufl. 1869. 3. Aufl. v. S. Gundelfinger 1876. 4. Aufl. 1906. VIII u. 251.

Joh. Müller, Elemente der analytischen Geometrie in der Ebene und im Raume. 2. Aufl. von Hub. Müller. Braunschweig 1878.

E. Gruhl, Lehrbuch der analytischen Geometrie I. Berlin 1873.

K. O. A. Fort und **O. Schlömilch,** Lehrbuch der analytischen Geometrie. 2 T. 6. Aufl. Leipzig 1893 u. 1899. 7. Aufl. herausgeg. von R. Heger. I. 1904. XVII u. 268. II. 1898. VIII u. 338.

K. Hattendorff, Einleitung in die analytische Geometrie. 2. Aufl. Hannover 1877.

J. O. Gandtner, Die Elemente der analytischen Geometrie für den Schulunterricht. Pr. Minden 1862. — Die Elemente der analytischen Geometrie, für den Schulgebrauch bearbeitet. 8. Aufl. von E. Gruhl. Berlin 1892. VII u. 103. 10. Aufl. Berlin 1898.



H. Drasch, Elemente der analytischen Geometrie der Geraden und der Kegelschnitte. Wien 1889. 112 S. (Für die Schule.)
H. Ganter und **F. Rudio,** Die Elemente der analytischen Geometrie der Ebene. 5. Aufl. Leipzig 1903. VIII u. 187. 6. Aufl. 1908. VIII u. 190.
F. Rudio, Die Elemente der analytischen Geometrie des Raumes. Leipzig 1891. X u. 156. 2. Aufl. 1899. X u. 184. 3. Aufl. 1901. X u. 184.
M. L. Albeggiani, Intorno ai concetti ed ai metodi fondamentali della geometria analitica. Palermo 1880.
Is. Todhunter, Treatise on plane coordinate geometry. 6th ed. London 1880.
R. Baltzer, Analytische Geometrie. Leipzig 1883.
Fr. Meyer, Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes, für höhere Lehranstalten. Hannover 1881. 166 S.
F. Aschieri, Geometria analitica del piano. Milano, Hoepli 1887. IV u. 174. — Geometria analitica dello spazio. ib. 1888. IV u. 196.
E. A. Bowser, Elementary treatise on analytic geometry, embracing plane geometry and an introduction to geometry of three dimensions. 17th ed. New York 1894.
C. A. A. Briot et **J. C. Bouquet,** Leçons de géométrie analytique. 17e éd. par Appell. Paris 1900. It. v. Simonelli. Firenze 1863.
I. A. Carnoy, Cours de géométrie analytique. 2 P. 4e éd. 1889. XII u. 535. 5e éd. Paris 1899. I. 7e éd. 1904. II. 6e éd. 1905.
J. Casey, A treatise on the analytic geometry of the point, line, circle and conic sections, containing an account of its most recent extensions. 2nd ed. London 1893. XXXII u. 584. Span. von Balbin. Buenos Ayres 1888.
Auguste Comte, La géométrie analytique. Nouv. éd. précédée de la géométrie de Descartes. Paris 1894. VIII u. 598.
C. de Comberousse, Géométrie analytique plane et dans l'espace. 2e éd. Paris 1896.
P. A. Lambert, Analytical geometry for technical schools and colleges. London. New York 1897. XII u. 216.
B. A. Niewenglowski, Cours de géométrie analytique. 3 P. I. Sections coniques. VI u. 483. II. Constructions des courbes planes. Compléments relatifs aux coniques. 1895. 292 S. III. Géométrie dans l'espace, avec une note de E. Borel sur les transformations en géométrie. 1896. III u. 572. Paris 1894.
E. d'Ovidio, Geometria analitica. 2. ed. Torino 1896. 3. ed. 1903. XV u. 529.
W. J. Johnston, An elementary treatise on analytical geometry. Oxford 1893. XIII u. 425.
O. Staude, Analytische Geometrie des Punktes, der geraden Linie und der Ebene. Leipzig 1905. VIII u. 447.
Fr. Schur, Lehrbuch der analytischen Geometrie. Leipzig 1898. X u. 216.
J. Thomae, Grundriß einer analytischen Geometrie der Ebene. Leipzig 1906. X u. 183 gr. 8°. (Zusammenstellung der Sätze mit Beweisen, zum Gebrauche bei Vorlesungen.)
H. Laurent, La géométrie analytique générale. Paris 1906. 7 u. 153.
C. Runge, Analytische Geometrie der Ebene. Leipzig 1908. IV u. 198.

§ 3. Übungen zur elementaren analytischen Geometrie.

L. I. Magnus, Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie. 2 T. Berlin 1833 u. 1837. (Aus Meyer Hirsch, Sammlung geometrischer Aufgaben.)
C. Brisse, Recueil de problèmes de géométrie analytique. 2e éd. Paris 1892.
Ad. Hochheim, Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. 3 Hefte in je 2 T. I. 3. Aufl. 1904. 226 S. II. 2. Aufl. 1906. 177 S. III. 1886. 161 S.
C. A. Laisant, Recueil de problèmes de mathématiques. IV—V. Géométrie analytique. Paris 1893. X u. 311, VIII u. 95. (1183 Aufgaben.)
G. de Longchamps, Cours de problèmes de géométrie analytique. 3 vol. Paris. I. 1897. VI u. 129. II. 1898. VIII u. 436. III. 1899. XII u. 83.
Is. Todhunter, Solutions to problems contained in a treatise on plane coordi-

nate geometry. Ed. by C. W. Bourne. London 1887. — Examples of geometry of three dimensions. 4th ed. London 1878.

I. Köhler, Exercices de géométrie analytique et de géométrie supérieure. Paris. I. Géométrie plane, 1886. II. Géométrie dans l'espace, 1888.

A. Rémond, Exercices élémentaires de géométrie analytique, avec un exposé des méthodes de résolution. 2 v. Paris. I. Géométrie à deux dimensions. 2e éd. 1898. II. Géométrie à trois dimensions. 2e éd. 1898. VIII u. 336.

Fr. Gräfe, Aufgaben und Lehrsätze aus der analytischen Geometrie des Punktes, der geraden Linie, des Kreises und der Kegelschnitte. Leipzig 1885. IV u. 136. Auflös. u. Beweise 1886 IV u. 259. — Aufgaben und Lehrsätze aus der analytischen Geometrie des Raumes, insbesondere der Flächen zweiten Grades. Leipzig 1888. XIV u. 127. Auflösungen u. Beweise ib. 1890. XVI u. 353.

Fr. Michel, Recueil de problèmes de géométrie analytique. Solutions des problèmes. Paris 1900. VI u. 240.

Chr. Schmehl, Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. Gießen 1904. VII u. 111.

C. Püschel, Eine Zusammenstellung von Aufgaben aus der analytischen Geometrie, für die Prima des Gymnasiums. Pr. Waldenburg. I. 1897. 27 S. II. 1898. 27 S.

E. Mosnat, Problèmes de géométrie analytique. Géométrie à deux dimensions. 2e éd. Paris 1905. 483 S. u. 1907. 496 S.

§ 4. **Koordinaten.** Die Anfänge eines Koordinatensystems finden sich schon bei Nicolaus Oresme († 1382), De latitudinibus formarum. Padua 1482. Für die historische Entwickelung sehe man:

S. Günther, Die Anfänge und Entwickelungsstadien des Koordinatusprinzips. Abh. Naturf. Ges. Nürnberg **6**, 1877, Ital. von G. Garbieri, Bull. bibl. storia Boncompagni **10**, 363—406. 1877.

E. Wölffing, Bericht über den gegenwärtigen Stand der Lehre von den natürlichen Koordinaten. Bibl. math. (3) **1**, 142—159. 1900.

R. Fišer, Die Methoden der analytischen Geometrie in ihrer Entwickelung im 19. Jahrhundert. Pr. Braunau 1900. 51 S. 4°.

Die Theorie der Koordinatensysteme enthalten:

A. F. Möbius, Der barycentrische Calcul, ein neues Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie. Leipzig 1827. Werke Bd. I. (Erstes Beispiel eines Linien-Koordinatensystems.)

E. Cesàro, Sur l'emploi des coordonnées barycentriques. Mathesis **10**, 177 bis 190, 1890.

J. Plücker, Analytisch-geometrische Entwickelungen. Essen. I. Bd. 1828. II. Bd 1831. — Über ein neues Coordinatensystem. Journ. f. Math. **5**, 1—36, 1830. — System der analytischen Geometrie, auf neue Betrachtungsweisen gegründet und insbesondere eine ausführliche Theorie der Curven dritter Ordnung enthaltend. Berlin 1835. — Theorie der algebraischen Curven, gegründet auf eine neue Behandlungsweise der analytischen Geometrie. Bonn 1839. — System der Geometrie des Raumes in neuer analytischer Behandlungsweise. Düsseldorf 1846. Neue Aufl. 1852. — Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. Mit einem Vorwort von A. Clebsch. Leipzig 1868. 1869. I, **1**—226; II, 227—378 (hrsg. von F. Klein).

M. G. v. Paucker, Koordinatenlehre. Mitau 1842.

I. G. H. Swellengrebel, Neun verschiedene Koordinatensysteme im Zusammenhang untersucht. Bonn 1853. — Untersuchungen über allgemeine Verwandtschaftsverhältnisse von Koordinatensystemen. Bonn 1855.

D. Chelini, Sul metodo delle coordinate rettilinee. Roma 1849. — Sulla teoria dei sistemi semplici di coordinate, e discussione delle equazioni generali di

secondo grado in coordinate triangulari e tetraedriche. Mem. Ac. Bologna 1863. 79 S.

J. A. Grunert, Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes für polare Koordinatensysteme. Greifswald 1857.

L. Natani, Anwendungen eines gewissen Koordinatensystems. Berlin 1857.

C. I. C. Price, Treatise on trilinear coordinates. Oxford 1865.

W. A. Withworth, Trilinear coordinates. London 1866.

Tillol, Exposition des principes de la géométrie plane dans les systèmes des coordonnées trilinéaires. Toulouse 1867.

A. Cambier, Éléments de géométrie trilinéaire. 2e éd. Bruxelles 1891.

N. M. Ferrers, An elementary treatise on trilinear coordinates, the method of reciprocal polars. London 1861. 4th ed. 1890.

W. Unverzagt, Über ein einfaches Koordinatensystem der Geraden. Pr. Wiesbaden 1872.

J. P. Weinmeister, Das System der polaren Linienkoordinaten in der Ebene. Diss. Marburg 1876.

K. Schwering, Ueber ein besonderes Liniencoordinatensystem. Ztschr. f. Math. Phys. **21**, 278—286. 1876. — Theorie und Anwendung der Liniencoordinaten in der analytischen Geometrie der Ebene. Leipzig 1884. VI u. 96.

L. Bartoluzzi, Memorie sulle coordinate lineari. Firenze 1881.

R. Heger, Die Elemente der analytischen Geometrie in homogenen Coordinaten. Braunschweig 1872.

H. v. Jettmar, Versuch der Einführung homogener Punkt- und Linienkoordinaten in die Elemente der analytischen Geometrie. Pr. Wien 1892.

W. Killing, Lehrbuch der analytischen Geometrie in homogenen Koordinaten. 2 T. Paderborn 1900. XIII u. 220.

E. Rehfeld, Trianguläre Koordinaten in Anwendung auf den Raum. Pr. Elberfeld 1895. 66 S.

J. Vidaillet, Sur une interprétation géométrique des coordonnées trilinéaires et applications aux courbes de degré n; tangentes à une conique en n points. Paris 1896.

H. G. Zeuthen, Forelæsninger over trekante-koordinater. Kopenhagen 1898.

J. Neuberg, Études sur les coordonnées tétraédriques. Paris 1870.

M. L. Albeggiani, Geometria dello spazio in coordinate tetraedriche. Palermo 1877.

P. Serret, Géométrie de direction. Application des coordonnées polyédriques. Paris 1869.

Ed. Lucas, Sur les coordonnées tripolaires. Mathesis **9**, 129—134, 173—181. 1889.

J. de Vries, Recherches sur les coordonnées multipolaires. Arch. Mus. Teyler (2) **5**, 99—158, 1896.

F. Franklin, Bipunctal coordinates. Amer. J. math. **1**, 148—174, 1878. Diss. Baltimore 1880.

Ch. Biehler, Sur la construction des courbes dont l'équation est donnée en coordonnées polaires. Nouv. ann. (3) **4**, 153—159, 1885.

C. Pacchiani, Le coordinate paralleli. Nocera 1890.

J. Booth, A treatise on some new geometrical methods, containing essays on tangential coordinates, pedal coordinates, reciprocal polars, the trigonometry of the parabola, the geometrical origin of logarithmes, the geometrical properties of elliptic integrals and other kindred subjects. 2 vol. I. London 1840. 2nd ed. 1873. I, 368 p.

G. J. Boquel, Sur les coordonnées tangentielles. Paris 1881.

G. Papelier, Leçons sur les coordonnées tangentielles. 2 P. Paris 1893 et 1894.

G. Lamé, Sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température. J. math. p. appl. **2**, 147, 1837 u. Mém. sav. étr. **5**. — Sur l'équilibre des températures dans un ellipsoide à trois axes inégaux. J. math. p. appl. **4**, 100, 1839. — Leçons sur les fonctions inverses de trans-

cendantes et les surfaces isothermes. Paris 1857. — Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications. Paris 1859.
F. Brioschi, Sulla teoria delle coordinate curvilinee. Ann. di mat. (2) **1**, 1—22, 1864.
W. Stammer, Über Kreiscoordinaten. J. f. Math. **44**, 295—326, 1852.
L. Aoust, Théorie des coordonnées curvilignes quelconques. Ann. di mat. (2) **1**, 39—64, 1864 u. (3) **5**, 261—288, 1892. — Auch 3 Parties. Paris 1864—68.
D. Chelini, Teoria delle coordinate curvilinee nello spazio e nelle superficie. Mem. Ist. Bologna (2) 8, 483—537, 1868. Auch Bologna 1869. (Zusammenstellung der bisherigen Resultate.)
D. Codazzi, Sulle coordinate curvilinee d'una superficie e dello spazio. Ann. d. mat. p. appl. (2) **1**, 293—316; **2**, 101—119, **3**, 269—287. 1868.
M. Lévy, Mémoire sur les coordonnées curvilignes orthogonales. J. Éc. Polyt. cah. 43, 157—200. 1870.
E. Roger, Mémoire sur les coordonnées curvilignes. Ann. d. mines (9) **5**, 110 bis 168. 1874.
J. W. Warren, Exercises in curvilinear and normal coordinates. Trans. Phil. Soc. Cambr. **12**, 455—522, 1877.
C. Neumann, Über die peripolaren Coordinaten. Ber. Ges. Leipzig 1877, 134—153.
G. de Berardinis, Le coordinate geodetiche ortogonali e le geografiche sulla sfera e sull' ellissoide di rotazione. Giorn. di mat. **27**, 127—152, 318—326, 1889.
G. Darboux, Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes. 2 P. Paris I, 1898, IV u. 338.
F. de Salvert, Théorie nouvelle du système orthogonal triple isotherme et ses applications aux coordonnées curvilignes. 2 P. Paris 1894.
K. Baer, Parabolische Koordinaten in der Ebene und im Raume. Pr. Frankfurt a. O. 1888.
H. G. Schulz, Lemniskatische Polarkoordinaten und ihr Zusammenhang mit den gewöhnlichen Polarkoordinaten und den rechtwinkligen Punktkoordinaten. Pr. (Pillau) Königsberg 1888.
O. Staude, Über lineare Gleichungen zwischen elliptischen Koordinaten. Diss. Leipzig 1881.
O. Rausenberger, Grundlage zu einem System von Krümmungskoordinaten. Diss. Heidelberg 1875.
O. Böklen, Ueber krummlinige Coordinaten. Arch. Math. Phys. 34, 26—32, 1860. — Über elliptische Coordinaten. ib. 308—315.
E. J. Hutt, Neue Form der elliptischen Kugelkoordinaten. Anwendung derselben 1) auf die Rektifikation und Quadratur der sphärischen Kegelschnitte, 2) auf die Geometrie und Kubatur der Wellenoberfläche. Pr. Berlin 1872.
H. Tempel, Die Einführung elliptischer Koordinaten bei den Spezialfällen der Komplexe zweiten Grades. Diss. München 1904. 117 S.
F. Kötteritzsch, Die Ermittelung der Potentialkoordinaten und der Krümmungslinien einer gegebenen Niveaufläche durch bloße Quadraturen. Freiburg 1877.
W. Fiedler, Geometrische Mitteilungen I. Die allgemeine Transformation der Coordinaten. Vierteljahrsschr. d. Naturf.-Ges. Zürich **24**, 145—179, 1882.
M. d'Ocagne, Coordonnées parallèles et axiales. Méthode de transformation géométrique et procédé nouveau de calcul graphique, déduits de la considération des coordonnées parallèles. Paris 1885. 91 S.
G. J. Dostor, Mémoire sur une nouvelle méthode de transformation des coordonnées dans le plan et dans l'espace. Arch. Math. Phys. **26**, 121—197, 1856.
F. Ruckdeschel, Transformation in Linien- und Ebenenkoordinaten nach neueren Systemen. Diss. Marburg 1897. 74 S. 8°.

Die Transformation der Koordinaten wurde zuerst behandelt von Euler im 2. Teile seiner Introductio (1748). Ferner:

L. Euler, Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigidorum

Novi Comm. Ac. Petrop. **20**, a. 1775, 189—207 [1776]. — Nova methodus motum corporum rigidorum determinandi, ib. 208—238.

A. J. Lexell, Theoremata nonnulla generalia de translatione corporum rigidorum. ib. p. 239—270.

C. G. J. Jacobi, Euleri formulae de transformatione coordinatarum. J. f. Math. **2**, 188—189, 1827.

§ 5. **Ausdehnungslehre. Vektoranalysis.** Während die Koordinatengeometrie genötigt ist, immer neue Koordinatensysteme aufzustellen, bedarf die von G. Graßmann geschaffene Ausdehnungslehre dieses Hilfsmittels nicht. Sie operiert direkt mit den geometrischen Gebilden; ihre Rechnungsoperationen liefern die einfachste analytische Grundlage für alle geometrischen und mechanischen Probleme.

V. Schlegel, Die Graßmannsche Ausdehnungslehre. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik in den letzten fünfzig Jahren. Z. f. Math. Phys. **41**, Hist. lit. Abt. 1—21, 41—59, 1896. (Vollständige Literatur.)

Herm. Graßmann, Die lineare Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik, dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erläutert. Leipzig 1844. Ges. math. u. phys. Werke I, 1 T. 1894. — Geometrische Analyse, geknüpft an die von Leibniz erfundene geometrische Charakteristik. Mit einer erläuternden Behandlung von A. F. Möbius. Preisschr. d. Jabl. Ges. Nr. 1. Leipzig 1847. IV u. 79. Werke I. 1 T. 1894. (Mit dem vorigen zus. XV u. 435.) — Die Ausdehnungslehre, vollständig und in strenger Form bearbeitet. Berlin 1862. Werke I, 2 T. 1894. VIII u. 511.

H. Graßmann, Die neuere Algebra und die Ausdehnungslehre. Math. Ann. **7**, 538—549. 1874.

V. Schlegel, System der Raumlehre. Nach den Prinzipien der Graßmannschen Ausdehnungslehre und als Einleitung in dieselbe dargestellt. 2 T. Leipzig. I. Geometrie. Die Gebiete des Punktes, der Geraden und der Ebene 1872. 156 S. II. Die Elemente der modernen Geometrie und Algebra. 1875. 260 S.

V. Schlegel, Über neuere geometrische Methoden und ihre Verwandtschaft mit der Graßmannschen Ausdehnungslehre. Z. f. Math. Phys. **24**, 83—95. 1879.

V. Schlegel, Einige geometrische Anwendungen der Graßmannschen Ausdehnungslehre. Pr. Waren 1882. 31 S. 4°.

L. Schendel, Grundzüge der Algebra nach Graßmanns Principien. Halle 1885. 161 S.

H. Graßmann jr., Anwendung der Ausdehnungslehre auf die allgemeine Theorie der Raumcurven und Oberflächen. 3 Pr. Halle 1886, 1888 u. 1893. — Punktrechnung und projective Geometrie. I. Festschrift. Halle 1894. 28 S. 4°.

G. Peano, Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Graßmann preceduto dalle operazioni della logica deduttiva. Torino 1888. x. u. 170. — Gli elementi di calcolo geometrico. Torino 1891. 42 S. (Auszug a. d. ersten Werke.) Dtsch. von A. Schepp. Leipzig 1891. 38 S. Poln. von S. Dickstein. Warschau 1897. 28 S. — Saggio di calcolo geometrico. Atti Acc. Torino **31**, 952—975, 1896. — Analisi della teoria dei vettori. Torino 1898. 24 S. Dtsch. von A. Lanner. Pr. Salzburg. Leipzig 1898. 24 S.

F. Kraft, Abriß des geometrischen Calculs. Nach den Werken H. G. Graßmanns bearbeitet. Leipzig 1893. XII u. 255.

R. Graßmann, Die Ausdehnungslehre oder die Wissenschaft von den extensiven Größen in strenger Formelentwicklung. Stettin 1891. IX u. 132. Neue Aufl. (nebst Formelbuch) 1904. IX u. 132 u. 14.

E. Müller-Wien, Die Liniengeometrie nach den Prinzipien der Graßmannschen Ausdehnungslehre. Monatshefte f. Math **2**, 267—290, 1891. — Die Kugel-

geometrie nach den Prinzipien der Graßmannschen Ausdehnungslehre. ib. **3**, 365—402, 1892, **4**, 1—52, 1893.

C. Burali-Forti, Introduction à la géométrie différentielle suivant la méthode de H. Graßmann. Paris 1897. XI u. 165.

E. Rudert, Grundlage zu einer Geometrie der Kugel nach Graßmanns Ausdehnungslehre. Pr. Leipzig 1899. 44 S.

J. W. Collins, An elementary exposition of Graßmanns Ausdehnungslehre, or theory of extension. Springfield, Mo. 1901. II. u. 46.

E. W. Hyde, Graßmann's space analysis. New York 1906. 58 S.

Mehrere Arbeiten über Vektoranalysis verfolgen die Tendenz, die Quaternionen im Sinne der Graßmannschen Ausdehnungslehre zu reformieren. Die in Abschnitt IV § 5 (S. 115) angegebene Literatur über Quaternionen sei hier durch folgende Schriften über Vektorenanalysis ergänzt.

J. W. Gibbs, Elements of vector analysis. New Haven 1884.

V. Babin, Elementos de calculo de los cuaterniones y sus aplicaciones principales á la geometria, al análysis y á la mecánica. Buenos Aires 1887. XIX u. 359.

E. W. Hyde, The directional calculus based upon the methods of H. Graßmann. Boston 1890. XII u. 247.

Fr. Graefe, Strecken- und Punktrechnung, insbesondere die Rechnung mit parallelen Strecken. Arch. Math. Phys. (2) **15,** 34—116, 1896.

G. Nédélic, Le calcul vectoriel et ses applications en géométrie et en mécanique. I. Paris 1897. 246 S.

F. Caspary, Applications des méthodes de Graßmann: vecteurs dans le plan; définitions, propriétés. Nouv. Ann. (3) **18,** 248—273, 1899.

A. H. Bucherer, Elemente der Vektor-Analysis. Mit Beispielen aus der theoretischen Physik. Leipzig 1903. VI u. 91. 2. Aufl. 1905. VIII u. 103.

E. Jahnke, Vorlesungen über Vektorenrechnung. Mit Anwendungen auf Geometrie, Mechanik und mathematische Physik. Leipzig. 1905. XII u. 235.

R. Gans, Einführung in die Vektoranalysis mit Anwendungen auf die mathematische Physik. Leipzig 1905. X u. 98.

A. Macfarlane, Vektor analysis and quaternions. New York 1896. New ed. 1906.

S. Valentiner, Vektoranalysis. Leipzig, Göschen 1907. 163 S.

Kapitel 2. Synthetische Geometrie.

§ 1. **Einleitung. Historisches. Anfänge.** Die synthetische Geometrie umfaßt alle diejenigen Entwicklungen, welche sich mit rein geometrischen Mitteln, ohne Anwendung der Koordinaten und algebraischen Operationen, gewinnen lassen. Als besonderer Wissenschaftszweig besteht sie seit dem Erscheinen von Poncelets Traité des propriétés projectives des figures, Paris 1822, doch reichen ihre Anfänge bis auf Monge 1795 und noch weiter bis auf Desargues zurück. Seit der Mitte des XIX. Jahrhunderts hat man angefangen, die rein geometrischen Methoden mit denen der Koordinatengeometrie zu vereinen und zu verschmelzen. Daher hat ein wesentlicher Unterschied zwischen neuerer synthetischer und neuerer analytischer Geometrie allmählich aufgehört. Für die neueren Untersuchungen wählt man vielfach den Namen „projektivische Geometrie“ oder „neuere Geometrie“, auch „géométrie supérieure“, „höhere Geometrie“.

Den Grundstein der neueren Geometrie bildet Pascals Auffassung und Behandlungsweise der Kegelschnitte.

Blaise Pascal, Essais pour les coniques. Paris 1640. Œuvres IV, 1—6. La Haye 1779.

W. J. Macdonald, Pascals essais pour les coniques. Proc. Edinb. Math. Soc. **2,** 19—24. 1884. (Eine versuchte Rekonstruktion.)

G. Desargues, († 1662), Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cone avec un plan. Paris 1639. Œuvres, p. Poudra, I, 103—230. Paris 1864.

Ph. de la Hire, Nouvelle méthode en géométrie pour les sections des superficies coniques et cylindriques. Paris 1673. — Sectiones conicae in novem libros distributae. Paris 1685.

J. V. Poncelet. Traité des propriétés projectives des figures. Paris 1822. 2ᵉ éd. 2 P. Paris 1865—66. — Applications d'analyse et de géométrie, qui ont servi de principal fondement au Traité des propriétés projectives des figures. Avec add. p. Mannheim et Moutard 2 v. Paris 1862 u. 1864. — Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques. Pour faire suite au traité des propriétés projectives. J. f. Math. **3,** 213—272, 1828. — Traité général des polaires réciproques. J. f. Math. **4,** 1—71, 1829.

L. N. M. Carnot, Géométrie de position. Paris 1803. Dtsch. von Schumacher, Altona. 2 Bde. 1807—10.

J. Steiner, Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander. Berlin 1832. Ges. Werke I, 229—458, Berlin 1881. — Herausg. von A. J. v. Oettingen. Ostw. Klass. Nr. 82 u. 83. Leipzig 1897. 126 S.

G. K. Ch. v. Staudt, Geometrie der Lage. Nürnberg 1847. It. von Pieri. Torino 1889. XXVIII u. 233. — Beiträge zur Geometrie der Lage. 3 Hefte. Nürnberg 1856—1860.

Ch. J. Brianchon, Sur les surfaces courbes du second degré. J. Éc. polyt. cah. 13, 1806, 297—311. — Mémoire sur les lignes du second ordre, faisant suite aux recherches publiés dans les journaux de l'École Polytechnique. Paris 1817. — Application de la théorie des transversales. Paris 1818.

L. N. M. Carnot, Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques prises dans l'espace; suivi d'un essai sur la théorie des transversales. Paris 1806.

J. D. Gergonne, Application de la doctrine des projections à la démonstration des propriétés des hexagones inscrits et circonscrits aux sections coniques. Ann. math. p. appl. **4,** 78—84, 1813/4. — Recherches sur quelques lois générales qui régissent les lignes et surfaces algébriques de tous les ordres. ib. **17,** 214—252. 1826/7.

F. Seydewitz, Das Wesen der involutorischen Gebilde in der Ebene als gemeinschaftliches Prinzip individueller Eigenschaften der Figuren. I. Heiligenstadt 1846. — Konstruktion und Klassifikation der Flächen des 2. Grades mittels projektivischer Gebilde. Arch. f. Math. Phys. **9,** 158—214, 1847.

Chr. Paulus, Grundlinien der neueren ebenen Geometrie. Stuttgart 1853.

B. Witzschel, Grundlinien der neueren Geometrie. Leipzig 1857. X u. 273.

M. Chasles, Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la géométrie moderne, suivi d'un mémoire sur deux principes généraux de la science, la dualité et l'homographie. Mém. cour. Ac. Brux. Paris II, 1837. 3ᵉ éd. Paris 1889. 850 S. Dtsch. von L. A. Sohncke, Geschichte der Geometrie, hauptsächlich mit Bezug auf die neueren Methoden. Halle 1839.

F. Klein, Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Erlangen 1872. Ital. von G. Fano. Ann. di mat. (2) **17,** 307—343, 1889. — Frz. von H. Padé, Ann. Éc. Norm. (2) **8,** 87, 87—102, 173—199, 1891. — Auch abgedr. Math. Ann. **43,** 63—100, 1893. — Engl. von M. W. Haskell, Bull. math. Soc. New York **2,** 215—249, 1893.

H. Hankel, Esquisse historique sur la marche du développement de la nouvelle géométrie. Fr. par Dewulf. Bull. sc. math. (2) **9,** 172—188, 226—240. 1885.

F. J. Obenrauch, Geschichte der darstellenden und projektiven Geometrie. Brünn 1897. VI u. 443.

E. Kötter, Die Entwickelung der synthetischen Geometrie von Monge bis auf Staudt (1847). Bericht. I. Band. Jhrsb. dtsch. Math.-Ver. **5,** 1901. 486 S. (Darin die vollständige Literatur.)

§ 2. Lehrbücher.

H. Hankel, Vorlesungen über die Elemente der projektivischen Geometrie in synthetischer Behandlung. Herausg. von A. Harnack. Leipzig 1875. VIII u. 256. (Ausführliche historische Einleitung, deren frz. Übersetzung soeben in § 1 genannt ist).

V. Flauti, Geometria del sito sul piano e nello spazio. 3ª ed. Napoli 1842.

L. Cremona, Elementi di geometria projettiva. I. Torino 1873. Frz. von Dewulf. Paris 1875. Dtsch. von v. Trautvetter. Stuttgart 1882. Engl. von C. Leudesdorf. 2nd ed. Oxford 1894. 324 S.

Th. Reye, Die Geometrie der Lage. Leipzig. 3. Aufl. 3. T. 1886—92. XIV u. 248. Frz. von Chemin. 2 v. Paris 1881—82. Ital. von Faifofer. Venezia 1884. Engl. von Holgate. New York 1898.

Em. Weyr, Die Elemente der projektivischen Geometrie. 2 Hefte. Wien 1883 und 1887.

F. Aschieri, Geometria projettiva. Lezioni Milano, Hopli 1888. x u. 410 2ª. ed. 1895. I. (del piano e della stella) VI u. 228. II. (dello spazio) VI u. 264.

K. Bobeck, Einleitung in die projektivische Geometrie der Ebene. Nach Vorträgen von C. Küpper. Leipzig 1889. VI u. 210. 2. wohlfeile Ausg. 1897. VI u. 210.

A. Sannia, Lezioni di geometria projettiva. Napoli 1891. 613 S. 2ª ed. p. d'Ovidio. 1895. XVI u. 763.

J. Thomae, Die Kegelschnitte in rein projektiver Behandlung. Halle 1893. VIII u. 181.

F. Amodeo, Elementi di geometria projettiva. Appunti delle lezioni. Napoli 1896. II. u. 272. autogr. 2ª ed. 1902. VII u. 488. Lezioni. 3ª ed. Napoli 1905. XV u. 451.

E. Torroja, Tratado de geometria de la posicion y sus aplicaciones à la geometria de la medida. Madrid 1899. 813 S gr. 4⁰.

R. Böger, Ebene Geometrie der Lage. Leipzig 1900. x u. 289. Elemente der Geometrie der Lage. Für den Schulunterricht. Leipzig, Göschen 1900. IV u. 62.

C. Burali-Forti, Lezioni di geometria metrico-projettiva. Torino 1904. XII u. 308.

F. Enriques, Lezioni di geometria projettiva. 2ª ed. Bologna 1904. VIII u. 409. — Vorlesungen über projektive Geometrie. Dtsch. von H Fleischer. Mit einem Einführungswort von F. Klein. Leipzig 1903. XIV u. 374.

K. Döhlemann, Projektive Geometrie in synthetischer Darstellung. Leipzig, Göschen. 3. Aufl. 1905. 181 S. Kl. 8⁰.

A. Emch, An introduction to projective geometry and its application; an analytic and synthetic treatment. New York, London 1905. VII u. 267.

F. Severi, Complementi di geometria projettiva. Raccolta di oltre 300 problemi colle relative soluzioni. Bologna 1906. VI u. 427.

M. Chasles, Traité de géométrie supérieure. Paris 1852. 2e éd. Paris 1880. 585 S. Dtsch. von Schnuse, Grundlehren der neueren Geometrie. Braunschweig 1856.

W. Fiedler, Die Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binären Formen. Leipzig 1862. VI u. 235.

H. Gretschel, Lehrbuch zur Einführung in die organische Geometrie. Leipzig 1868.

A. Amiot, Leçons nouvelles de géométrie moderne. Paris 1865.

J. Lenthéric, Exposition élémentaire des diverses théories de la géométrie moderne. Paris 1874.
A. Maier, Neuere Geometrie, mit Berücksichtigung der Kegelschnitte. 2. Aufl. Karlsruhe 1874.
S. Staudigl, Lehrbuch der neueren Geometrie. Wien 1871.
H. L. Rottok, Neuere Geometrie für die oberen Klassen der Realschulen und Gymnasien. Schleswig 1877. 62 S.
H. Seeger, Die Fundamentaltheorien der neueren Geometrie und die Elemente der Lehre von den Kegelschnitten. Braunschweig 1880.
W. Fuhrmann, Einleitung in die neuere Geometrie für die oberen Klassen. Leipzig 1881. IV u. 63.
M. Pasch, Vorlesungen über neuere Geometrie. Leipzig 1882. IV u. 202.
B. Lachlan, An elementary treatise on modern pure geometry. London 1893. X u. 288.
J. W. Russell, An elementary treatise on modern pure geometry. London 1893. XVI u. 323.
G. Kober, Die Grundgebilde der neueren Geometrie. I. Die Grundgebilde der Ebene. Hannover 1898. VIII u. 95.
E. Duporcq, Premiers principes de géométrie moderne. Paris 1899. VII u. 160.
W. J. Macdonald, Higher geometry. Edinburgh 1891. 184 S. 2nd ed. London 1894.
J. Richard, Leçons sur les méthodes de la géométrie moderne. Paris 1899. 210 S.
J. Steiner, Vorlesungen über synthetische Geometrie. Leipzig. I. Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung. Bearbeitet von C. F. Geiser. 1887. VIII u. 208. II. Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projektive Eigenschaften. Bearbeitet von H. Schröter. 3. Aufl. von R. Sturm. 1898. XVII u. 537.
C. F. Geiser, Einleitung in die synthetische Geometrie. Ein Leitfaden zum Unterricht an höheren Realschulen und Gymnasien. Leipzig 1869. VI u. 183.
F. Buchbinder, Behandlung der Kegelschnitte auf Schulen in synthetischer Form nach Steiner. Pr. Pforta 1878 u. 1880.
W. Gallenkamp, Der Lehrgang der synthetischen Geometrie in der Oberprima. Pr. Berlin 1876. — Synthetische Geometrie. 2 T. Iserlohn 1880.
A. Milinowski, Elementar-synthetische Geometrie der Kegelschnitte. Leipzig 1882. XII u. 412. 2. wohlf. Aufl. 1896. XI u. 135.
W. Erler, Die Elemente der Kegelschnitte in synthetischer Behandlung. 6. Aufl. von L. Hübner. Leipzig 1903. VI u. 60.
J. Lange, Synthetische Geometrie der Kegelschnitte nebst Übungsaufgaben für die Prima höherer Lehranstalten. Berlin. 2. Aufl. 1900. 68 S.
P. van Geer, Grondslagen der synthetische meetkunde. Leiden 1900. XII u. 186.
G. B. Halsted, Elementary synthetic geometry. New York 1893.
T. Reye, Die synthetische Geometrie im Altertum und in der Neuzeit. Vortrag. 1886. 2. Aufl. Straßburg 1899. 18 S. (Geschichtliches).

Kapitel 3. Infinitesimale Geometrie. Allgemeines.

§ 1. **Einleitung. Historisches. Ältere Schriften.** Da es hauptsächlich geometrische Probleme waren, welche zur Entdeckung der höheren Analysis führten, so reichen die Anfänge der Infinitesimalgeometrie bis auf das Ende des 17. Jahrhunderts zurück (s. Abschnitt VI A Kap. 1). Daher finden wir in den oben genannten älteren Schriften über Differential- und Integralrechnung Anwendungen auf Geometrie. Hauptsächlich wird die Theorie der ebenen Kurven mit Hilfe der Infinitesimalrechnung behandelt.

Zahlreiche Abhandlungen von Leibniz, Joh. I. Bernoulli und Jak. I. Bernoulli setzten die Fruchtbarkeit der Differentialrechnung für die Theorie der Kurven in helles Licht. Von älteren Schriften nennen wir noch:

G. Fr. de l'Hospital, Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes. Paris 1696 und später.

Bern. de Fontenelle, Éléments de la géométrie de l'infini. Paris 1727.

J. Saurin, Remarque sur un cas singulier du problème général des tangentes. Hist. Mém. Ac. sc. Paris a. 1716, 59—79, 275—289.

P. L. M. de Maupertuis, Sur quelques affections des courbes. Hist. Mém. Ac. sc. Paris a. 1720. H. 44—50. M. 277—282.

A. Parent, Essais et recherches de mathématique et de physique. Paris 1705; neue Aufl. in 3 voll. 1713. (In II, 181—200: Des affections des superficies).

M. Gaetana Agnesi, Instituzioni analitiche. 2 vol. Milano 1748 (darin: Differentialgeometrie der Kurven).

L. Euler, Institutionum calculi differentialis sectio III. Opera posth. I, 342 bis 403, 1862 (Anwendungen der Differentialrechnung auf die Kurventheorie).

Die wichtigsten der zahlreichen Arbeiten Eulers über Differentialgeometrie sind ausgeführt in:

Felix Müller, Über bahnbrechende Arbeiten Leonhard Eulers aus der reinen Mathematik. Festschrift zur Feier des 200. Geburtstages Leonhard Eulers, hrsg. v. d. Berl. Math. Ges. 62—116. Abh. z. Gesch. d. math. Wissensch. Heft XXV. 1907.

P. Frisi, De methodo fluxionum geometricarum et ejus usu in investigandis praecipuis curvarum affectionibus. Diss. Milano 1753.

R. B. Martini, Analyseos infinite parvorum sive calculi differentialis elementa. Pisa 1761. (Anwendung auf ebene Kurven).

Giamb. Caraccioli, Geometria algebrica universa quantitatum finitarum et infinite minimarum. Romae 1759. (desgl.)

J. Landen, The residual analysis. I. London 1764. (Viele geometrische Anwendungen).

Ed. Waring, Proprietates algebraicarum curvarum. Cambridge 1772. (S. S. 164.)

A. G. Kästner, Anfangsgründe der Mathematik. III, 2. Analysis des Unendlichen. Göttingen. 1.—2. Aufl. 1760—70. 3. Aufl. 1799.

Vinc. Riccati et Hieron. Saladini, Institutiones analyticae. Bonon. 2 vol. 4. I, 1765. II, 1767. 2. Aufl. Milano 1775 (Viel Geometrisches.)

W. J. G. Karsten, Lehrbegriff der gesamten Mathematik. II, 2. Analysis und höhere Geometrie. Rostock u. Greifswald 1788.

Ch. Bossut, Traité de calcul différentiel et de calcul intégral. Paris 1798. 2 vol. 8°. 600 u. 562 S.

G. v. Vega, Vorlesungen über die Mathematik. Wien 1786—1802. II, Geom., Trig., höh. Geom., Inf. Rechnung 1787. Mehrere spätere Aufl.

J. L. Lagrange, Théorie des fonctions analytiques. Paris 1797. 2e éd. 1813. Œuvres IX, 1881.

Für die geschichtliche Entwicklung sei auf folgende Schriften hingewiesen:

G. Loria, Il passato e il presente delle principali teorie geometriche. Monografia storica. Torino 1887. 52 S. Ed. 3a. 1908.

G. Loria, Die hauptsächlichsten Theorien der Geometrie in ihrer früheren und jetzigen Entwicklung. Historische Monographie. Unter Benutzung zahlreicher Zusätze und Verbesserungen seitens des Verfassers ins Deutsche übertragen von Fritz Schütte. Mit einem Vorworte von Prof. Sturm. Leipzig 1888. VI u. 132.

H. v. Mangoldt, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Kurven und Flächen. Encyklop. d. math. Wiss. III, D, 1, 2. 1—104. 1902.

§ 2. **Lehrbücher.**

G. Monge, Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie, à l'usage de l'École polytechnique. Paris 1795 und 1801. — Application de l'analyse à la géométrie. Paris 1807 und 1809. 5e éd. par Liouville. Paris 1850.

Ch. Dupin, Développements de géométrie. Paris 1813. — Applications de géométrie et de mécanique, faisant suite aux Développements de géométrie. Paris 1822.

G. Lamé, Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problemes de géométrie. Paris 1818. Réimpr. Paris 1903. XII u. 124.

A. L. Cauchy, Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie. 2 vol. Paris I 1826, II 1828. — Exercices mathématiques. Paris 1826 bis 1829.

K. Petersen, Über Kurven und Flächen. Leipzig 1868.

G. Peano, Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale. Torino 1887.

P. L. M. Bourdon, Application de l'algébre à la géométrie, comprenant la géométrie analytique à deux et à trois dimensions. Paris 1824. 9e éd. par G. Darboux. Paris 1906.

C. Burali-Forti, Introduction à la géométrie infinitésimale suivant la méthode de H. Graßmann. Paris 1897. XI u. 165.

L. Bianchi, Lezioni di geometria differenziale. Pisa 1894. VIII u. 541. 2a ed. 1902. I. 524 S. — Vorlesungen über Differentialgeometrie. Deutsch von Max Lukat, Leipzig. 3 Lfrgn. 1893, 1898, 1899. XVI u. 659. (Auch Historisches.)

L. Raffy, Leçons sur les applications géométriques de l'analyse. (Éléments de a théorie des courbes et des surfaces.) Paris 1897. VI u. 251.

E. Cesàro, Lezioni di geometria intrinseca. Napoli 1896. — Vorlesungen über natürliche Geometrie. Dtsch. von G. Kowalewski. Leipzig 1901. VIII u. 341.

W. de Tannenberg, Leçons nouvelles sur les applications géométriques du calcul différentiel. Paris 1899. IV u. 192.

H. Fehr, Application de la méthode vectorielle de Graßmann à la géométrie infinitésimale. Thèse. Paris 1899. 94 S.

G. Scheffers, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie. (Theorie der Kurven und Flächen.) 2 Bde. Leipzig. I Einführung in die Theorie der Kurven in der Ebene und im Raume. 1900. II Einführung in die Theorie der Flächen. 1902. VIII u. 360. X u. 518.

F. Klein, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie. Eine Revision der Prinzipien. Vorlesungen, Ausg. von Conrad Müller. Leipzig 1902. VIII u. 468 autogr. (Vom Gesichtspunkte der praktischen Anwendungen. Approximationsmathematik.)

E. Rouché et **L. Lévy,** Analyse infinitésimale à l'usage des ingénieurs. Paris. I, 1900. VIII u. 559; II, 1902. 648 S.

B. J. Bukrejev, Vorlesungen über die Anwendungen der Differential- und Integralrechnung auf die geometrischen Elemente der Flächentheorie. Kiew 1900. VII u. 304. (Russisch.)

Die Schriften über Anwendungen der Differentialgeometrie auf ebene Kurven allein oder auf Raumkurven und krumme Flächen allein werden in den folgenden Kapiteln angeführt werden, ebenso die Lehrbücher über die analytische Geometrie der Ebene und die analytische Geometrie des Raumes, welche nur vereinzelt infinitesimale Betrachtungen enthalten.

Kapitel 4. Höhere Geometrie ebener Gebilde.

Einleitung. Wir haben in den Überschriften der ersten drei Kapitel der Höheren Geometrie an den Namen Analytische Geometrie,

Synthetische Geometrie und Infinitesimale Geometrie festgehalten, weil es sich darum handelte, einmal Schriften aus den Anfängen der drei genannten Disziplinen aufzuführen, dann aber auch diejenigen, meist mehr elementaren Lehrbücher und Abhandlungen namhaft zu machen, in denen noch eine scharfe Trennung der Methoden wahrzunehmen ist. In neuerer Zeit hat diese Trennung zum großen Teil aufgehört. Sowohl Lehrbücher und Vorlesungen, insbesondere Kompendien, als auch einzelne Abhandlungen über Geometrie verwerten neuerdings verschiedene Methoden und ziehen sogar andere Gebiete, wie Algebra, Invariantentheorie, Funktionentheorie, Differentialgleichungen usw. zur Unterstützung geometrischer Anschauungen heran. Dadurch wird der allgemeinere Name Höhere Geometrie gerechtfertigt. Werden im folgenden Schriften genannt, in denen ausschließlich eine oder die andere Behandlungsweise durchgeführt ist, so wird dieselbe, soweit sie nicht schon aus dem Titel erkennbar ist, beigefügt werden.

§ 1. **Lehrbücher der höheren Geometrie der Ebene.** Den in den drei ersten Kapiteln genannten Lehrbüchern der analytischen, synthetischen und Differentialgeometrie fügen wir hier noch folgende Lehrbücher über höhere ebene Geometrie hinzu:

F. Klein, Einleitung in die höhere Geometrie. 2 Teile. Vorlesungen. Ausg. von F. Schilling. Göttingen 1893. 566 u. 388 S. (autogr.)

A. Clebsch, Vorlesungen über Geometrie, bearbeitet und herausgegeben von F. Lindemann. Mit einem Vorwort von F. Klein. I. Bd. Geometrie der Ebene. Leipzig 1875. 1050 S. I, Lief. 1. 2. Aufl. 1906. 480 S. I, 2. Lief. 1891. (S. I—XII u. 497—1050.) (Neue Aufl. d. 2. Lief. unter der Presse.) — Frz. von A. Benoit. Vol. I. Nouv. tirage. Paris 1903.

L. Heffter und **C. Koehler,** Lehrbuch der analytischen Geometrie. I. Bd. Geometrie in den Grundgebilden erster Stufe und in der Ebene. Leipzig 1905. XVI u. 527.

O. Staude, Analytische Geometrie des Punktes, der Geraden und der Ebene. Ein Handbuch zu den Vorlesungen und Übungen über analytische Geometrie. Leipzig 1905. VIII u. 447.

H. Mandart, Cours de géométrie analytique à deux dimensions (sections coniques). Namur 1904. VIII u. 574.

R. Hoppe, Lehrbuch der analytischen Geometrie. T. I. Leipzig 1880. Auch Arch. f. Math. Phys. **55**, 77—104; **56**, 41—84; **59**, 225—322; **60**, 376—400.

M. Simon, Analytische Geometrie der Ebene. Leipzig, Göschen 1897. 203 S. kl. 8°.

O. Dziobek, Lehrbuch der analytischen Geometrie. I. T. Analytische Geometrie der Ebene. Berlin 1900. 350 S.

R. Geigenmüller, Leitfaden und Aufgabensammlung zur höheren Mathematik. I. Die analytische Geometrie der Ebene und die algebraische Analysis. 6. Aufl. Mitweida 1902. VII u. 302.

B. Niewenglowski, Cours de géométrie analytique. T. I. Sections coniques. Paris 1894. VI u. 483. T. II. Constructions des courbes planes. Compléments relatifs aux coniques. 1895. 292 S.

S. L. Loney, The elements of coordinate geometry. London 1895. IX u. 429.

M. Chasles, Traité des sections coniques Paris 1865. 393 S.

G. Salmon, A treatise on conic sections; containing an Account of some of the most important modern algebraic and geometric methods. London 1848. — 6th ed. 1879. 400 S. — Deutsch: Analytische Geometrie der Kegelschnitte

mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden. Frei bearb. von W. Fiedler. Leipzig. 5. Aufl. I. T. 1887. 432 S. II. T. 1888. 433 bis 809. 6. Aufl. I. 1898. xxv u. 441. II. 1903. xx u. 443—809. 1903. 7. Aufl. I. 1907. xxiv u. 444. — Frz. Traité des sections coniques. 2e éd. p. H. Resal et Vaucheret. 3e éd. Paris 1897.

L. A. Renshaw, The cone and its sections treated geometrically. London 1875.

H. G. Zeuthen, Grundriß einer elementar-geometrischen Kegelschnittslehre. Leipzig 1882. vi u. 97.

O. Krimmel, Die Kegelschnitte in elementar-geometrischer Behandlung. Tübingen 1883. 115 S.

S. Gundelfinger, Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte. Hrsg von F. Dingeldey. Leipzig 1895. viii u. 434.

F. Dingeldey, Kegelschnitte und Kegelschnittssysteme. (Analytisch und synthetisch.) Encycl. d. math. Wiss. III C, 1. 1—160. Leipzig 1903. (Geschichtl. Entwickelung.)

K. Bopp, Die Kegelschnitte des Gregorius a St. Vincentio in vergleichender Bearbeitung. Abh. Gesch. d. math. Wiss. **20**. 2. Stück. Leipzig 1907. iii u. 228. (Geschichtlich.)

A. Emch, An introduction to projective geometry and its applications. An analytic and synthetic treatment. New York 1905. vii u. 267.

§ 2. Geradlinige Gebilde.

D. Munn, Analytic geometry of the straight line and the circle, with numerous exercises. London 1889. 258 S.

A. v. Gall und **E. Winter,** Die analytische Geometrie des Punktes und der Geraden und ihre Anwendung auf Aufgaben. Darmstadt 1877.

N. F. Dupuis, Synthetic geometry of the point, line aud circle in the plane. New York 1889. x u. 294.

T. E. Hart, Elemente der Geometrie auf der Geraden. Leipzig 1866.

M. G. O. Paucker, Ebene Geometrie der geraden Linie und des Kreises. Königsberg 1823.

W. J. Meyers, The inductiv manual of the straight line and the circle. Denver 1896. xi u. 113.

A. Kleyer, Die gerade Linie, der Strahl, die Strecke, die Ebene und die Kreislinie im allgemeinen. Stuttgart 1888.

H. Schwarz, Die Theorie der geraden Linie und der Ebene. Halle 1865.

J. Toeplitz, Analytisch-geometrische Studien zur Theorie der geraden Linie und der Kegelschnitte. Pr. Lissa 1865.

W. A. Willcock, The theory of the right line and the circle. London 1875.

H. Erb, Probleme der geraden Linie, des Winkels und der ebenen Flächen. Heidelberg 1846.

S. Kantor, I. Über den Zusammenhang von n beliebigen Geraden in der Ebene. II. Über Eigenschaften des Dreiecks und zwei damit in Verbindung stehende Steinersche Sätze. III. Über eine Verallgemeinerung bekannter Dreieckssätze auf beliebige einem Kegelschnitte eingeschriebene vollständige n-Ecke. IV. Über das Kreisviereck und Kreisvierseit insbesondere, und das vollständige Viereck im allgemeinen. Ber. Ak. Wien **76**. 1877.

S. Kantor, I. Über das vollständige Fünfseit. — II. Über das vollständige Fünfseit und einige dabei auftretende Kurvenreihen. Ber. Ak. Wien **77**. 1878.

L. Wedekind, Lagebeziehungen bei ebenen perspektivischen Dreiecken. Math. Ann. **16**, 209—244, 1880.

E. Heß, Beiträge zur Theorie der mehrfach perspektivischen Dreiecke und Tetraeder. Math. Ann. **28**, 107—200, 1886.

F. W. Kirchner, Über die perspektivische Lage ebener Dreiecke. Diss. Halle 1888.

E. Jahnke, Über dreifach perspektivische Dreiecke in der Dreiecksgeometrie. Pr. Berlin 1900. 26 S.

J. Lüroth, Über zyklisch-projektive Punktgruppen in der Ebene und im Raume. Math. Ann. **13**, 305—319, 1878.
F. Deruyts, Mémoire sur la théorie de l'involution et de l'homographie unicursale. Bruxelles 1891. 208 S. 8⁰.
J. Rosanes, Über linear-unabhängige Punktsysteme. J. f. Math. **88**, 242—273, 1879.
E. L. Bunitzky, Über unendlich entfernte Elemente in der Geometrie der Lage. Denkschr. Univ. Odessa **92**, 433—496, 1903 (Russisch).
A. Dietrich, Über die sogenannten Entfernungsörter. Pr. Greiffenberg 1868. — Über Nulllinien. Pr. Greiffenberg 1869.
G. Baldauf, Über die Punkte kleinster Summe der absoluten Abstände von *n* Geraden. Pr. Plauen i. V. Leipzig 1898. 30 S
W. Veltmann, Berechnung des Inhalts eines Vielecks aus den Koordinaten der Eckpunkte. Z. f. Math. Phys. **32**, 339—345, 1887.
A. Cazamian, Sur le théorème de Carnot. Nouv. Ann. (3) **14**, 30—40, 1895. (Polygon.)
F. Ferrari, Sopra una classe di triangoli e tetraedri isobaricentrici. Period. di mat. **14**, 189—195, 1899.
L. Ripert, Note sur le quadrilatère. C. R. Ass. Fr. **30**, 106—118, 1901.
J. Hermes, Der Flächeninhalt der Dreiecke, Vierecke und Kreise in der Fareyschen Ebene, Königsberg i. P. 1891. 47 S. 4⁰.
H. Schröter, Zur v. Staudtschen Konstruktion des regulären 17-Ecks. J. f. Math. **75**, 13—24. 1872.
A. Artzt, Anwendung der Collinearität zum Beweise geometrischer Lehrsätze. Pr. Recklinghausen 1877. (Menelaus, Ceva.)
E. Hain, Untersuchungen über das Dreieck. Arch. Math. Phys. **61**, 417—427, 1877; **62**, 422—443, 1878.
M. Greiner, Über das Dreieck. Arch. Math. Phys. **61**, 225—264, 1877.
A. Reum, Die merkwürdigen Punkte des Dreiecks in trimetrischen Punktkoordinaten. Diss. Rostock 1875.
F. W. Frankenbach, Die Anwendung trimetrischer Punktkoordinaten auf die merkwürdigen Punkte des Dreiecks. Pr. Liegnitz 1899. 39 S. 8⁰.
A. Artzt, Untersuchungen über ähnliche Punktreihen auf den Seiten eines Dreiecks und auf deren Mittelsenkrechten sowie über kongruente Strahlbüschel aus den Ecken desselben. Pr. Recklinghausen 1884.
F. Bücking, Die Winkelgegenpunkte des Dreiecks. Ein Spezialfall der involutorischen Verwandtschaft. Pr. Metz. Diss. Tübingen. 1892. 31 S.

Im III. Teil, Abschn. I, Kap. 2, § 6: „Geradlinige Gebilde und Kreis in der elementaren Geometrie" ist die Literatur der sogenannten „Neueren Dreiecksgeometrie" erwähnt. In mehreren der dort angeführten Arbeiten werden auch andere als rein elementar-geometrische Methoden benutzt.

§ 3. **Zur Theorie der ebenen Gebilde zweiten Grades.** Lehrbücher der Kurven zweiten Grades werden schon oben in Abschnitt I, Kap. 2, § 7 und in Abschnitt II, Kap. 1, § 2 angeführt sowie hier in Kap. 4, § 1. Es erübrigt, einige spezielle Untersuchungen aus der Theorie des Kreises und der Kegelschnitte zu nennen.

J. Casey, On the equation of circles I. II. Trans. Ir. Ac. Dublin 1866 u. 1879.
W. Fiedler, Cyklographie oder Konstruktion der Aufgaben über Kreise und Kugeln, und elementare Geometrie der Kreis- und Kugelsysteme. Leipzig 1882. XVI u. 264.
J. Harris, On the circle and straight line. Finsbury 1879.
J. Smith, The geometry of the circle. Liverpool 1869.
W. J. Mac Clelland, A treatise on the geometry of the circle. London 1891.

J. F. Igurbide, La nueva ciencia geométrica. I. La geometria del circulo. Barcelona 1897. 386 S.
H. Picquet, Étude géométrique des systèmes ponctuels et tangentiels de sections coniques. Paris 1872.
J. Rosanes, Über Systeme von Kegelschnitten. Math. Ann. **6**, 264—313, 1873.
W. Fischer, Erweiterung des Satzes von der Sichel des Archimedes und Verbindung desselben mit dem Satze von den Möndchen des Hippokrates; Schwerpunkte; Rotationskörper. Kempen 1891. 25 S.
E. Grünberger, Das Schneiden von Kreisen unter gleichem Winkel einschließlich der Berührung. Pr. Budweis 1891.
M. Chasles, Considération sur une méthode générale de solution de toutes les questions concernant les sections coniques. C. R. **58**, 1167—1176, 1864; **59**, 7—15, 1865. Paris 1865.
G. J. Dostor, Nouvelle étude algébrique des courbes et des surfaces du 2e degré. 2 P. Paris 1866 u. 1868.
L. Maleyx, Étude géométrique des propriétés des coniques d'après leur définition. Paris 1891.
E. d'Ovidio, Le proprietà fondamentali delle curve di 2° ordine. 2 P. 2^a ed. Torino 1883.
L. Gottscho, Miscellen aus der Theorie der Kegelschnitte und der Flächen 2. O. unter Anwendung der Methode des Unendlichgroßen. Diss. (Freiburg) Frankfurt 1896. 61 S. 8⁰.
Fr. Hofmann, Die Konstruktion doppelt berührender Kegelschnitte mit imaginären Bestimmungsstücken. Leipzig 1886. IV u. 109.
C. F. A. Riquier, Application de la théorie des formes quadratiques à la discussion des courbes et des surfaces du second degré. Caen 1887.
P. G. Strasser, Die Kegelschnittlinien nach den wichtigsten Methoden mit Rücksicht auf die geschichtliche Entwicklung. Pr. Kremsmünster 1863.
P. Kößler, Über die Erzeugung der Kegelschnitte nach der Methode von Newton. Pr. Neiße 1874.
H. G. Zeuthen, Kegelsnitslären i oldtiden. Skr. Vid. Selsk. Kjöbenh. (6) **3**, 1884. 318 S. 4⁰. Köbenh. 1885. — Dtsch. Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum. Von R. v. Fischer-Benzon. Kopenhagen. 1886. XIV u. 511. 8⁰.
C. Taylor, Introduction to the ancient and modern geometry of conics. Cambridge 1881.
E. Häfele, Die Hyperbel. Die wichtigsten Eigenschaften derselben nach der analytischen Methode und der der Alten unter Vergleichung dieser Verfahrungsweisen. Pr. Bozen 1901. 35 S. (Geschichtliches.)

Übungen und Aufgaben über Kegelschnitte enthalten:

W. M. Baker, Examples in analytical conics for beginners. London 1898. 86 S.
H. Latham, Geometrical problems on the properties of the conic sections. London 1848.
H. A. Faure, Recueil de théorèmes relatifs aux sections coniques. Paris 1867.
A. R. Ralph, A collection of examples in the analytic geometry of conics. Dublin 1884.
R. A. Roberts, A collection of examples and problems on conic and some of the higher plane curves. Dublin 1882. — Examples in the analytic geometry of plane conics. London 1884.

Grundlegende Abhandlungen über die Sätze von Pascal und Brianchon:

Blaise Pascal, Essai sur les coniques. Paris 1640.
C. J. Brianchon, Mémoire sur les surfaces courbes de second ordre. Journ. Éc. Polyt. cah. **13**, 297—311, 1806.
C. J. Brianchon, Mémoire sur les courbes du second ordre. Paris 1817.
O. Zanotti Bianco, L'esagramma di Pascal. Nota storica. Atti Acc. Torino **21**, 686—697, 1886.

E. Koutny, Über die Sätze von Pascal und Brianchon und die Konstruktion von Kegelschnittslinien. Ber. Ak. Wien **71**, 491—504, 1875.
G. Bauer, Über das Pascalsche Theorem. Abh. Ak. München. 1874. 109 S.
O. Hesse, Über die Reziprozität der Pascal-Steinerschen und der Kirkman-Cayley-Salmonschen Sätze von dem Hexagramma mysticum. Journ. f. Math. **68**, 193—207, 1868.
E. Brassinne, Généralisation du théorème de Brianchon. Mém. Ac. Toulouse (7) **9**, 453—454, 1878.
C. Montag, Über ein durch die Sätze von Brianchon und Pascal vermitteltes geometrisches Beziehungssystem. Diss. Breslau 1871.

Über die Ponceletschen Polygone, die einem Kegelschnitte umschrieben und einem zweiten eingeschrieben sind, und über die damit zusammenhängenden Steinerschen Schließungsprobleme sehe man:

J. Steiner, Vermischte Sätze und Aufgaben. Journ. f. Math. **55**, 356—378, 1858.
G. Loria, I poligoni di Poncelet. Discorso. Torino 1889. 50 S. gr. 8⁰. — Rassegna di alcuni scritti sui poligoni di Poncelet. Bibl. mat. (2) **3**, 67—74, 1889. (Geschichte und Literatur.)
C. G. J. Jacobi, Über die Anwendung der elliptischen Transcendenten auf ein bekanntes Problem der Elementargeometrie. Journ. für Math. **3**, 376—389, 1828.
J. Rosanes und **M. Pasch,** Über das einem Kegelschnitt umschriebene und einem anderen einbeschriebene Polygon. Journ. f. Math. **64**, 126—166, 1865.
M. Simon, De relationibus inter constantes duarum curvarum secundi ordinis, ut sit polygonum alteri inscriptum, circumscriptum alteri. Diss. Berlin 1867.
P. H. Schoute, Die Steinerschen Polygone. Journ. f. Math. **96**, 105—120, 201, 317—325, 1883.
Ad. Schumann, Die Steinerschen Kreisreihen und ihre Beziehung zum Ponceletschen Schließungstheorem. Pr. Berlin 1883.
K. Dörholt, Über einem Dreieck um- und eingeschriebene Kegelschnitte. Diss. Münster 1884.
M. Disteli, Die Steinerschen Schließungsprobleme nach darstellend geometrischer Methode. Leipzig 1888. XII u. 124.
A. Voß, Über Polygone, welche einem Gebilde zweiten Grades umschrieben sind. Math. Ann. **25**, 39—71, 1885. — Über Poncelet-Zeuthensche Polygone, welche einem Gebilde zweiten Grades eingeschrieben sind. ib. **26**, 231—246, 1885.
A. Knitterscheid, Über ein- und zugleich umgeschriebene Polygone, insbesondere das ein- und umgeschriebene Dreieck. Pr. (Forbach) Saarbrücken 1879.
F. Lerch, Über Dreiecke, welche einem Kegelschnitt um- und einem anderen eingeschrieben sind. Pr. Breslau 1891. 39 S. 8⁰.
G. B. Mathews, Proof of Steiners theorems relating to circumscribed and inscribed conics. Proc. Lond. Math. Soc. **22**, 18—27, 1891.
R. Pyrkosch, Über Ponceletsche Dreiecke, besonders solche, welche konfokalen Kegelschnitten ein- und umschrieben sind. Diss. Breslau 1897. 63 S. 8⁰.
E. Czuber, Die Steinerschen Polygone. Journ. f. Math. **114**, 312—332. 1895.
K. Rohn, Das Schließungsproblem von Poncelet und eine gewiße Erweiterung. Ber. Sächs. Ges. **60,** 94—131, 1908. (Auch Literaturangaben).

§ 4. Spezielle ebene höhere Kurven.

G. Loria, Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte. Autorisierte, nach dem italienischen Manuskript bearbeitete deutsche Ausgabe von F. Schütte. Leipzig 1902. XXI u. 774 S.
F. Gomez Teixeira, Tratado de las curvas especiales notables. Memoria premiada. Mem. Ac. Madrid **22.** 1905. IX u. 632. gr. 8⁰. (Ebene und Raumkurven.) Frz. Übers. Coimbra 1908.

G. Scheffers, Besondere transzendente Kurven. Encycl. d. math. Wiss. III, 3, 185—268, 1903.

H. Brocard, Notes de bibliographie des courbes géométriques. Bar-le-Duc 1897. 296 u. XXX (Suppl.). 8⁰. (Autogr.) — Partie complémentaire. ib. 1899. VIII u. 243. 8⁰. (Autogr.)

E. Wölffing, Bericht über den gegenwärtigen Stand der Lehre von den zyklischen Kurven. Bibl. Math. (3) **2**, 235—250, 1901. — Bibliographie des épicycloides. L'Interméd. des math. **5**, 235—238, 1898; **6**, 11—12, 1899. — Über Pseudotrochoiden. Ztschr. Math. Phys. **44**, 139—166, 1899. — Bibliographie der 3- und n-Teilung des Winkels. Math.-naturw. Mitt. Stuttg. (2) **2**, 21—27, 1900. (Über 200 Titel.)

V. Liguine, Liste des travaux sur les ovales de Descartes. Bull. sc. math. (2) **6**, 40—49, 1882.

H. Wieleitner, Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung. Leipzig 1905. XXII u. 308.

H. Wieleitner, Bibliographie der höheren algebraischen Kurven für den Zeitabschnitt von 1890—1904. Leipzig 1904. 58 S. 8⁰.

P. Tannery, Sur l'histoire des lignes et surfaces courbes dans l'antiquité. Bull. sc. math. (2) **7**, 278—291; **8**, 19—30, 101—112, 1884.

Is. Newton, Enumeratio linearum tertii ordinis. London 1704 (Anhang zur Optik). — Engl. Enumeration of lines of the third order. By Talbot. London 1861.

W. Rouse Ball, On Newtons classification of cubic curves. Proc. Lond. Math. Soc. **22**, 104—143, 1891.

J. Stirling, Lineae tertii ordinis Newtonianae, sive Illustratio tractatus Newtoni de enumeratione linearum tertii ordinis, Oxoniae 1717. (Ein Kommentar zu Newtons Abhandlung mit Beweisen). Neue Aufl. Paris 1797. 198 S. 8⁰. (Mit Newtons Abhandlung).

A. F. Möbius, Über die Grundformen der Linien der dritten Ordnung. Abh. Sächs. Ges. Leipzig 1849. I u. 82.

E. de Jonquières, Mélanges de Géométrie pure, comprenant diverses applications des théories exposées dans le traité de Géométrie supérieure de M. Chasles, au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace, aux sections coniques, aux courbes du troisième ordre, et la traduction du Traité de Maclaurin sur les courbes du troisième ordre. Paris 1856. 261 S. (Maclaurins Werk siehe in § 5 S. 184).

H. Durège, Die ebenen Curven dritter Ordnung. Eine Zusammenstellung ihrer bekannten Eigenschaften. Leipzig 1871. XII u. 343. gr. 8⁰.

H. Schröter, Die Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung. Auf synthetisch-geometrischem Wege abgeleitet. Leipzig 1888. VIII u. 296.

M. Baur, Synthetische Einteilung der Curven dritter Ordnung. Stuttgart 1888. 58 S.

A. B. Basset, An elementary treatise on cubic and quartic curves. Cambridge 1901. XVI u. 255.

R. Bernstein, Les courbes du troisième degré. Thèse. Besançon 1906.

H. Graßmann, Die Erzeugung der Curven 3. Ordnung durch gerade Linien, und über geometrische Definitionen dieser Curven. Journ. f. Math. **36**, 177—182, 1848. — Die lineare Erzeugung der Curven 3. Ordnung, ib. **52**, 254—275, 1856.

O. Hesse, Über die Wendepunkte der Curven 3. Ordnung. Journ. f. Math. **28**, 97—107, 1844. — Über die Curven 3. Ordnung und die Kegelschnitte, welche diese Curven in drei verschiedenen Punkten berühren. ib. **36**, 143—176, 1848. — Über Curven 3. Klasse und 3. Ordnung. ib. **38**, 241—256, 1848. — Eigenschaften der Wendepunkte der Curven 3. Ordnung und der Rückkehrtangenten der Curven 3. Klasse. ib. **38**, 257—262.

M. Chasles, Construction de la courbe du troisième ordre déterminée par neuf points. C. R. Ac. Paris **36**, 1853.

A. Cayley, A memoir on curves of the third order. Phil. Trans. Lond. **147**, P. 2. 1857.
A. Clebsch, Über einen Satz von Steiner und einige Punkte der Theorie der Curven 3. Ordnung. Journ. f. Math. **63**, 94—121, 1864. (Steinersche Polygone).
H. Schröter, Über eine besondere Curve dritter Ordnung und eine einfache Erzeugungsart der allgemeinen Curven dritter Ordnung. Math. Ann. **5**, 50—83, 1872. — Über Curven dritter Ordnung. (Fortsetzung). ib. **6**, 85—111, 1873.
H. Rosenow, Die Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt. Eine Anwendung der neueren Algebra (Invariantentheorie) auf die Geometrie. Diss. Breslau 1873. 48 S.
H. Milinowski, Zur Geometrie der Curven 3. Ordnung. Journ. f. Math. **78**, 177—222, 1874.
A. Harnack, Über die Verwertung der elliptischen Funktionen für die Geometrie der Curven dritten Grades. Diss. Erlangen. Math. Ann. **9**, 1—54, 1875.
G. H. Halphen, Recherches sur les courbes planes du troisième degré. Math. Ann. **15**, 359—379, 1879.
H. Picquet, Applications de la représentation des courbes du troisième degré à l'aide des fonctions elliptiques, J. Éc. Polyt. cah. **54**, 31—100, 1884.
G. Pittarelli, Le curve di 3° ordine e di 4ª classe. Rend. Acc. Napoli **24**, 216—233, 1885.
P. P. Greve, Über die Construction der Curven 3. Ordnung. Kasan 1898. 400 S. (Russisch).
J. Steiner, Eigenschaften der Curven vierten Grades rücksichtlich ihrer Doppeltangenten. Journ. f. Math. **49**, 265—278, 1854.
O. Hesse, Über Determinanten und ihre Anwendung in der Geometrie, insbesondere auf Curven vierter Ordnung. Journ. f. Math. **49**, 243—262, 1854. — Über die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung. ib. 279—332, 1854.
H. Kortum, Über geometrische Aufgaben dritten und vierten Grades. Preisschrift. Bonn 1869. 72 S. (Konstruktionen über Kurven 3. und 4. Grades).
W. Binder, Theorie der unicursalen Plancurven vierter und dritter Ordnung in synthetischer Behandlung. Leipzig 1896. xi u. 396.
W. Bretschneider, Über Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten. Diss. Erlangen 1875.
U. Aeschlimann, Zur Theorie der ebenen Curven vierter Ordnung. Diss. Zürich 1880.
Fr. Dingeldey, Über die Erzeugung von Kurven vierter Ordnung durch Bewegungsmechanismen. Diss. Leipzig 1885. viii u. 61.
Ph. Friedrich, Die rationale Plancurve vierter Ordnung im Zusammenhang mit der binären Form sechster Ordnung. Diss. Gießen 1886. 30 S. 4°.
Ernst Meyer, Die rationalen ebenen Curven vierter Ordnung und die binäre Form sechster Ordnung. Diss. Königsberg 1888.
Ruth Gentry, On the forms of plane quartic curves. Diss. New York 1896. 73 S. 8°.
W. G. Bullart, On the general classification of plane quartic curves. Diss. Worcester, Mass. 1899. 16 S. u. 2 Tf.
J. de Vries, La quartique trinodale. Arch. Musée Teyler (2) **7**, 1—58, 1900. — La quartique nodale. ib. (2) **9**, 255—275, 1904.
C. Plagge, Untersuchungen über die Cardioide. Pr. Recklinghausen 1868. 32 S. 4°.
J. Casey, On bicircular quartics. Trans. Ac. Dublin **24**, 457—569, 1869.
H. G. Zeuthen, Sur les différentes formes des courbes planes du quatrième ordre. Math. Ann. **7**, 410—432, 1874.
H. G. Zeuthen, Nogle egenskaber ved kurver af fjerde orden med to dobbeltpunkter. Forh. Selsk. Kjöbenh. 1879, 89—122.
A. Ameseder, Geometrische Untersuchungen der ebenen Kurven 4. Ordnung, insbesondere ihrer Berührungskegelschnitte. Ber. Ak. Wien **85**, 396—423; 1882, **87**, 15—81, 1883.
W. Stahl, Über die rationalen Curven 4. Ordnung. Journ. f. Math. **101**, 300—325, 1887; **104**, 302—320, 1889.



Emil Weyr, Die Lemniskate in rationaler Behandlung. Abh. Ak. Prag **6**, 1874.
E. Oekinghaus, Die Lemniskate. Arch. Math. Phys. (2) **7**, 337—371; **8**, 24—82, 1889.
Fr. Ebner, Leitfaden der technisch wichtigen Kurven. Leipzig 1906. VIII u. 197.
C. Juel, Indledning i Laeren om de grafiske Kurver. Skrifter Danske Vid. Selsk. Kjöbenh. 1899, 1—90.
R. Heger, Zusammenstellung von Constructionen an Curven höherer Ordnung. Ztschr. Math. Phys. **31**, 38—101, 1886.
R. A. Proctor, Treatise on the cycloid and all forms of cycloidal curves. London 1878.
R. Blum, Cykloiden und Cykloidalen als Umhüllungscurven und deren Zusammenhang mit den Fußpunktcurven der Kegelschnitte. Pr. Stuttgart 1902. 56 S.
L. Ellenson, Die reziproken Polaren der Epi- und Hypozykloiden. Diss. Bern 1901. 103 S.
L. Kuglmayr, Über Spiralen und deren Tangierungsproblem. Wien 1889. 180 S. gr. 8° mit 13 aut. Tfln.
A. Michalitschke, Die archimedische, die hyperbolische und die logarithmische Spirale. Prag. 2. Aufl. I. T. 1891. 79 S. gr. 8°.
G. D. E. Weyer, Über die parabolische Spirale. Kiel u. Leipzig 1894. 36 S. gr. 8°. (Auch Historisches).
S. Hudler, Die Cassinische Curve. Wien 1885. 59 S.

§ 5. Allgemeine Theorie der ebenen Kurven.

G. Salmon, A treatise on the higher plane curves; intended as a sequel to a treatise on conic sections. Dublin 1852. — 3rd ed. 1879. 396 S. — Dtsch. Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven. Bearb. von W. Fiedler. Leipzig. 2. Aufl. 1882. XVI u. 508. — Frz. Traité de géométrie analytique (courbes planes), p. O. Chemin. Suivi d'une étude sur les points singuliers, p. G. Halphen. Paris 1884. 2e éd. 1903. XIX u. 667.
C. Ruchonnet, Exposition géométrique des propriétés générales des courbes. Paris. 6e éd. 1901. 216 S.
L. Cremona, Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane. Mem. Ac. Bologna **12**, 305—436, 1861. Dtsch. von Curtze, Greifswald 1865.
H. Grassmann, Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der Curven; mit Anwendung einer rein geometrischen Analyse. Journ. f. Math. **36**, 111—132, 1846.
E. Kötter, Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der algebraischen ebenen Curven. Preisschrift. Berlin 1887. 303 S. 4°. Auch Abh. Ak. Berlin 1887.
J. Plücker, Theorie der algebraischen Curven, gegründet auf eine neue Behandlungsweise der analytischen Geometrie. Bonn 1839.
A. Cayley, Curve. Encycl. Britann. 9th éd. **6**, 716—728, 1877.
L. Berzolari, Allgemeine Theorie der höheren ebenen algebraischen Kurven. Encycl. Math. Wiss. III C 4, 313—455. Leipzig 1906.

Ältere historisch wichtige Werke über Kurven sind folgende:

Colin Maclaurin, Geometria organica, sive descriptio linearum curvarum universalis. London 1720. 4°. (Übers. von de Jonquières siehe oben in § 4).
Colin Maclaurin, A treatise of algebra in three parts. III. The application of algebra and geometry to each other. London 1748. 5th ed. 1788. Auch 1796. (App. De linearum geometricarum proprietatibus generalibus tractatus).
W. Braikenridge, Exercitatio geometrica de descriptione linearum curvarum. London 1733. 10 Bgn. 4°.
J. P. de Gua de Malves, Usages de l'analyse de Descartes pour découvrir sans le secours du calcul différentiel les propriétés ou affections principales des lignes géométriques de tous les ordres. Paris 1740.
P. Sauerbeck, Einleitung in die analytische Geometrie der höheren algebraischen Kurven. Nach den Methoden von Jean Paul de Gua de Malves. Ein Beitrag zur Kurvendiskussion. Abh. z. Gesch. d. math. Wiss. **XV**. Leipzig 1902. VI u. 166.

L. Euler, Sur quelques propriétés des sections coniques qui conviennent à une infinité d'autres lignes courbes. Hist. Mém. Ac. Berlin **1**, a. 1745, 71—98 [1746]. — Introductio in analysin infinitorum. II. 1748. — Institutionum calculi differentialis Sectio III. Opera posth. **1**, 342—402, 1862. (Anwendung der Differentialrechnung auf die Kurventheorie). — Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes. Hist. Mém. Ac. Berlin **4**, a. 1748, 219—233 [1750]. — Démonstration sur le nombre des points où deux lignes d'un ordre quelconque peuvent se couper. ib. 234—248.

G. Cramer, Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques. Genève 1750. (Im Vorwort Historisches).

Ed. Waring, Proprietates algebraicarum curvarum. London 1772. 123 S. 4°.

Neuere Abhandlungen zur Theorie der ebenen Kurven.

J. Plücker, Solution d'une question fondamentale concernant la théorie générale des courbes. Journ. f. Math. **12**, 105—108, 1834.

J. Steiner, Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Curven. Journ. f. Math. **47**, 1—6, 1854. — Über solche algebraische Curven, welche einen Mittelpunkt haben, und über darauf bezügliche Eigenschaften allgemeiner Curven wie über geradlinige Transversalen der letzteren. ib. 7—105. — Über algebraische Curven und Flächen. ib. **49**; 333—348. 1854.

A. Cayley, Recherches sur l'élimination et sur la théorie des courbes. Journ. f. Math. **34**, 30—45, 1847.

E. de Jonquières, Solution de quelques questions générales concernant les courbes algébriques planes. Journ. f. Math. **59**, 313—334, 1861. — Sur la génération des courbes géométriques et en particulier sur celle du quatrième degré. Mém. prés. Ac. sc. Paris (2) **16**, 159—225, 1862.

Em. Weyr, Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde und der algebraischen Curven und Flächen als deren Erzeugnisse. Leipzig 1869. 156 S.

R. Hoppe, Cinematische Grundlagen der Curventheorie. Arch. Math. Phys. **55**, 77—105, 1873.

E. Lucas, Études analytiques sur la théorie générale des courbes planes. Paris 1864.

Louis Aoust, Analyse infinitésimale des courbes planes, contenant la résolution d'un grand nombre de problèmes choisis, à l'usage des candidats à la licence des sciences. Paris 1873.

A. Clebsch, Über die Anwendung der Abelschen Functionen in der Geometrie. Journ. f. Math. **63**, 189—243, 1864. — Über diejenigen ebenen Curven, deren Coordinaten rationale Functionen eines Parameters sind. ib. **64**, 43—65, 1865. — Über diejenigen Curven, deren Coordinaten sich als elliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen. ib. **64**, 210—270, 1865.

A. Allégret, Mémoire sur la représentation des transcendantes par des arcs de courbes. Ann. Éc. Norm (2) **2**, 149—200, 1873.

A. Brill und **M. Nöther,** Über die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie. Math. Ann. **7**, 269—316, 1874.

O. Stolz, Über die singulären Punkte der algebraischen Funktionen und Curven. Math. Ann. **8**, 415—432, 1875. — Allgemeine Theorie der Asymptoten algebraischer Curven. ib. **11**, 41—83, 1877.

H. J. Stephen Smith, On the higher singularities of plane curves. Proc. Lond. Math. Soc. **6**, 153—182, 1876.

P. G. Scholz, Über die endlichen und unendlich fernen singulären Elemente ebener Curven. Pr. Berlin 1877. 32 S. 4°.

J. Casey, On a new form of tangential equations. Phil. Tr. Lond. **167**, 367 bis 440, 1877. Proc. Lond. **25**, 561—565, 1877.

G. Halphen, Mémoire sur les points singuliers des courbes algébriques planes. Mém. prés. Ac. sc. Paris. **26**. 1878.

A. Brill, Über Singularitäten ebener algebraischer Curven und eine neue Kurvenspecies. Math. Ann. **16**, 348—408, 1880.



R. Dedekind und **H. Weber,** Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen. Journ. f. Math. **92**, 181—290, 1880.
G. Humbert, Sur les courbes de genre un. Thèse. Paris 1885. VIII u. 131. 4°.
K. Bobek, Über hyperelliptische Curven. Ber. Ak. Wien **93**, 601—617, 1886; **94**, 861—873, 1886.
C. J. Küpper, Hyperelliptische C_{3n}. Mit Anhang von K. Bobek. Abh. Ak. Prag **7**, 1. 1887. 47 S.
F. Deruyts, Mémoire sur la théorie de l'involution et de l'homographie unicursale. Mém Soc. sc. Liège (2) **17**, 1892. 208 S.
R. Schumacher, Die Punktsysteme auf der Geraden und ihre Anwendung zur Erzeugung der algebraischen ebenen Curven. Journ. f. Math. **110**, 230—264, 1893; **111**, 254—276, 1894.
A. Cayley, On the correspondence of two points on a curve. Proc. Lond. Math. Soc. **1**, 1866. — On the curves which satisfy given conditions. Phil. Trans. Lond. **158**, 75—172, 1868. (Literatur).
A. Brill, Über Entsprechen von Punktsystemen auf einer Curve. Math. Ann. **6**, 33—65, 1873. — Über die Correspondenzformel. ib. **7**, 607—622, 1874.
A. Brill, Über algebraische Correspondenzen. Math. Ann. **31**, 374—409, 1888.
E. Czuber, Über Curvensysteme und die zugehörigen Differentialgleichungen. Ber. Ak. Wien **102**, 1141—1187, 1893.
G. B. Guccia, Ricerche sui sistemi lineari di curve algebriche piane, dotati di singolarità ordinarie. Rend. Ist. Palermo **7**, 193—255, 1893; **9**, 1—64, 1895.
R. v. Lilienthal, Grundlagen einer Krümmungslehre der Curvenscharen. Leipzig 1896. VII u. 114.
E. Ciani, Le linee diametrali delle curve algebriche piane e in particolare i loro assi di simmetria. Ann. Scuola Norm. Pisa **6**, 1—160, 1889.
E. Kötter, Die Hessesche Curve in rein geometrischer Behandlung. Math. Ann. **34**, 123—149, 1889.
A. Brill und **M. Nöther,** Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit. Jhrsb. Dtsch. Math.-Ver. **3**, 107—566, 1894. (Besonders Abschnitt V und VI).
C. Segre, Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito. Ann. di mat. (2) **22**, 41—142, 1893. — Le moltiplicità nelle intersezioni delle curve piane algebriche, con alcune applicazioni ai principii della teoria di tali curve. Giorn. di mat. **36**, 1—50, 1897.

§ 6. Das Imaginäre in der Geometrie.

G. K. Ch. v. Staudt, Geometrie der Lage. Nürnberg 1847.
S. Lie, Über eine Darstellung des Imaginären in der Geometrie. Journ. f. Math. **70,** 346—353, 1869.
F. August, Untersuchungen über das Imaginäre in der Geometrie. Pr. Berlin 1872.
F. Klein, Zur Interpretation der komplexen Elemente in der Geometrie. Gött. Nachr. 1872, 374—379.
G. Darboux, Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques et sur la théorie des imaginaires. Mém. Ac. Bord. **8**, 292—350; **9**, 1—276, 1873.
J. Lüroth, Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen. Darstellung und Erweiterung der v. Staudtschen Theorie. Math. Ann. **8**, 145—214, 1874; **11**, 84—110, 1877.
V. Schlegel, Über die geometrische Darstellung des Imaginären vom Standpunkt der Ausdehnungslehre. Ztschr. Math. Phys. **23**, 141—157, 1878.
Max. Marie, Réalisation et usage des formes imaginaires en géométrie. Nouv. Ann. (3) **10**, 1891 u. Paris 1891. 83 S.
C. Segre, Le coppie di elementi imaginari nella geometria projettiva sintetica. Mem. Acc. Torino (2) **38**, 1886. 24 S. — Sur les homographies binaires et leurs faisceaux. Journ. f. Math. **100**, 317—330, 1886. — Le rappresentazioni

reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici. Math. Ann. **40**, 413 bis 467, 1892.

Cl. Servais, Sur les imaginaires en géométrie. Applications à la théorie des cubiques gauches. Gand 1894. 64 S. 8⁰. — La projectivité imaginaire. Mém. Soc. Belg. C. **52**, 1895. 51 S.

Kap. 5. Höhere Geometrie des Raumes.

§ 1. **Lehrbücher der Raumkurven und Flächen.** Den Lehrbüchern aus der elementaren analytischen Geometrie (Kap. 1, § 2), aus der synthetischen Geometrie (Kap. 2, § 2) und der Differentialgeometrie (Kap. 3, § 2), welche oben S. 165, 173 u. 176 genannt wurden, müssen wir hier noch die folgenden anschließen.

G. Salmon, Analytic Geometry of three dimensions. Dublin. 4th ed. 1882.

G. Salmon, Analytische Geometrie des Raumes. Dtsch. bearb. v. W. Fiedler. I T. Die Elemente und die Theorie der Flächen zweiten Grades. 4. Aufl. Leipzig 1898. XXXIV u. 448. II. T. Analytische Geometrie der Kurven im Raume und der algebraischen Flächen. 2. Aufl. Leipzig 1880. LXXII u. 686.

G. Salmon, Traité de géométrie à trois dimensions, Pr. p. O. Chemin. Paris. I, 2e éd. 1899. II, 2e éd. 1903. III, 1892. — Éléments de géométrie à trois dimensions. Par Cambier, Bruxelles 1883.

G. Salmon, Elementi di geometria analitica a tre coordinati. It. von Salvatore Dino. Napoli 1870.

A. Clebsch, Vorlesungen über Geometrie. Hrsg. von F. Lindemann. II. Bd. 1. T. Die Flächen erster und zweiter Ordnung oder Klasse und der lineare Komplex. Leipzig 1891. VIII u. 650. Frz. von Benoit. 2e éd. Paris 1903.

K. Peterson, Über Curven und Flächen. Moskau 1868.

L. Cremona, Preliminari di una teoria geometrica delle superficie. Milano 1866. Deutsch: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen in synthetischer Behandlung. Von Curtze. Berlin 1870.

L. Painvin, Principes de la géométrie analytique. Géométrie de l'espace. Paris. I, 1869, 460 S. II, 1870, 464 S. 4⁰. (Lith.) Paris 1872.

O. Hesse, Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, insbesondere über Oberflächen zweiter Ordnung. Leipzig. 3. Aufl. von S. Gundelfinger. 1876. XVI u. 546.

Ch. Brisse, Exposition analytique de la théorie des surfaces. Ann. Éc. Norm. (2) **3**, 87—146, 1874 u. (Suite) J. Éc. Polyt. **53**, 213—233, 1883.

R. Hoppe, Principien der Flächentheorie. Leipzig 1876. 96 S. u. Arch. Math. Phys. **59**, 225—320, 1876; Nachträge **60**, 376—404, 1877.

G. v. Escherich, Einführung in die analytische Geometrie des Raumes. Leipzig 1881. VIII u. 282. (Algebraische oder rechnende synthetische Geometrie).

O. Böklen, Analytische Geometrie des Raumes. I. T. Die allgemeine Theorie der Flächen und Curven, die Eigenschaften der Flächen zweiten Grades. II. T. Disquisitiones generales circa superficies curvas von C. F. Gauß, ins Deutsche übertragen mit Anwendungen und Zusätzen. Die Fresnelsche Wellenfläche. 2. Aufl. Stuttgart 1884. 336 S.

G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal. 4 vols. Paris. I. P. Généralités. Coordonnées curvilignes. Surfaces minima. 1887. II. P. Les congruences et les équations linéaires aux dérivées partielles. Des lignes tracées sur les surfaces. 1889. III. P. Lignes géodésiques et courbure géodésique. Paramètres différentielles. Déformation des surfaces. 1894. IV. P. Déformation infiniment petite et représentation sphérique. 1896. 548 S.



J. Knoblauch, Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen. Leipzig 1888. VIII u. 267.
P. Frost, Solid geometry. 3th ed. London 1886. XXIII u. 408.
F. Joachimsthal, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung. 3. Aufl. von L. Natani. Leipzig 1890. X u. 308.
H. Resal, Exposition de la théorie des surfaces. Paris 1891. XIII u. 171.
A. Voß, Über die Fundamentalgleichungen der Flächentheorie. Stzgsber. Ak. München. **22**, 247—278, 1892.
H. Stahl und **V. Kommerell,** Die Grundformeln der allgemeinen Flächentheorie. Leipzig 1893. VI u. 114.
L. Raffy, Leçons sur les applications géométriques de l'analyse. (Éléments de la théorie des courbes et des surfaces). Paris 1897. VI u. 251.
G. Ricci, Lezioni sulla teoria delle superficie. Verona, Padova 1897. VIII u. 416. (Lith.)
B. Niewenglowski, Cours de géométrie analytique. T. III. Géométrie dans l'espace avec une note sur les transformations en géométrie. Paris 1896. III u. 572.
W. Killing, Lehrbuch der analytischen Geometrie in homogenen Koordinaten. II T. Die Geometrie des Raumes. Paderborn 1901. VIII u. 361.
E. Rouché et **Ch. de Comberousse,** Traité de Géométrie. I. Géométrie plane. II. Géométrie de l'espace; courbes et surfaces usuelles. Paris. 7e éd. 1900. LX u. 1212.
C. Briot et **J. C. Bouquet,** Leçons de géométrie analytique. 17e éd. p. P. Appell. Paris 1900.
V. Kommerell und **K. Kommerell,** Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen. 2 Bde. Saml. Schubert. Leipzig 1903. 144 u. 212.

§ 2. **Zur Theorie der Raumkurven und Flächen.** Nächst den Griechen, bei denen schon Raumkurven vorkommen, waren R. Descartes und Henri Pitot die ersten, welche Kurven doppelter Krümmung betrachteten und ihnen diesen Namen gaben. Die erste Schrift über die Raumkurven ist von

Al. Cl. Clairaut, Recherches sur les courbes à double courbure. Paris 1731. 119 S. 4°.
L. Euler, Methodus facilis omnia symptomata linearum curvarum non in eodem plano sitarum investigandi. Acta Ac. Petrop. **6**, a. 1782, P. I, 19—36 [1786]; Dissertatio altera, ib. 37—57. (Eulers Arbeiten über die kürzesten Linien werden weiter unten angeführt.)
Lancret, Mémoire sur les courbes à double courbure. Mém. prés. Inst. **1**, 416 bis 454, 1805. — Sur les développoïdes des courbes planes, des courbes à double courbure et des surfaces développables. ib. **2**, 1—79, 1811.
A. L. Cauchy, Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie. I, 276—328. Paris 1826.
A. J. C. Barré de Saint-Venant, Mémoire sur les lignes non planes. Journ. Éc. Polyt. cah. 30, t. **18**, 1—76, 1845.
A. J. C. Barré de Saint-Venant, Tableau des formules de la théorie des courbes de l'espace. Paris 1846.
J. A. Serret, Sur quelques formules relatives à la théorie des courbes à double courbure. Journ. de math. **16**, 193—207. 1851. — Mémoire sur une classe d'équations différentielles simultanées qui se rattachent à la théorie des courbes à double courbure. ib. **18**, 1—40, 1853.
J. F. Frenet, Sur les courbes à double courbure. Journ. de math. **17**, 437 bis 449, 1852.
W. Schell, Allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung. In rein geometrischer Darstellung. Leipzig 1859. 106 S. 2. Aufl. 1898. VIII u. 163.

P. Serret, Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes à double courbure. Paris 1860. 276 S.
H. E. Schröter, Über die Raumkurven dritter Klasse und dritter Ordnung. Journ. f. Math. **56**, 27—43, 1859.
A. Cayley, Considérations générales sur les courbes en espace. C. R. Ac. sc. Paris **54** u. **58**, 1862 u. 1864.
L. Painvin, Détermination des planes osculateurs et des rayons de courbure en un point multiple d'une courbe gauche. Ann. di mat. p. appl. **4**, 281—327, 1869.
G. Halphen, Mémoire sur les courbes gauches algébriques. Paris 1870.
Ed. Weyr, Über algebraische Raumkurven. Diss. Göttingen 1873.
R. Hoppe, Principien der analytischen Curventheorie. Arch. Math. Phys. **56**, 41—84, 1874. Nachträge ib. **60**, 376—404, 1877. — Lehrbuch der analytischen Geometrie. I. T. Lehrbuch der analytischen Curventheorie. Leipzig 1880. 89 S.
Louis Aoust, Analyse infinitésimale des courbes dans l'espace. Paris 1876. 564 S.
H. Valentiner, Bidrag til Rumcurvernes Theorie. Diss. Kopenhagen 1881.
M. Nöther, Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde von beliebig vielen Dimensionen. Math. Ann. **2**, 293—317, 1869. — Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven. Journ. f. Math. **93**, 271 bis 318, 1882 u. Berlin 1883.
G. H. Halphen, Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques. J. Éc. polyt. **52**, 1882. 200 S. Paris 1883.
A. Kneser, Allgemeine Sätze über die scheinbaren Singularitäten beliebiger Raumcurven. Math. Ann. **34**, 204—216, 1889.
A. Milinowski, Zur Theorie der Raumcurven 4. Ordnung erster Art. Journ. f. Math. **97**, 277—316. 1884.
J. Lyon, Sur les courbes à torsion constante. Paris 1890. 71 S. 4°.
V. Rouquet, Formules générales de la théorie des courbes gauches. Mém. Ac. sc. Toulouse (9) **3**, 117—132, 1891. Application des formules générales de la théorie des courbes gauches à l'étude des courbes de M. Bertrand. ib. (9) **4**, 241—264, 1892.
H. Schröter, Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der Raumkurve vierter Ordnung erster Species. Leipzig 1890. 101 S.
P. Stäckel, Über algebraisch rectificirbare Raumcurven. Math. Ann. **43**, 171 bis 184, 1893. — Über algebraische Raumcurven. ib. **45**, 341—370, 1894.
L. Autonne, Sur la représentation des courbes gauches algébriques et sur le nombre des conditions qui expriment qu'une courbe algébrique est située sur une surface algébrique. Ann. Univ. Lyon 1896. 37 S. u. Paris 1896 41 S. 8°.
J. W. Lemm, Analytische theorie der ruimtekrommen. Diss. Leiden 1899. 142 S. 4°. (Literatur.)

Wir haben schon oben erwähnt, daß L. Eulers Arbeiten für die Theorie der Raumkurven und der Flächen in mehrfacher Hinsicht bahnbrechend gewesen sind. Durch die Untersuchungen Joh. I. Bernoulli über die kürzeste Linie zwischen 2 Punkten auf einer krummen Fläche veranlaßt, entstanden folgende Abhandlungen:

L. Euler, De linea brevissima in superficie quacunque duo quaelibet puncta jungente. Comm. Ac. Petrop. **3**, a. 1728, 110—124 [1732]. — Curvarum maximi minimive proprietate gaudentium inventio nova et facilis. Comm. Ac. Petrop. **8**, a. 1736, 159—190 [1741]. — Accuratior evolutio problematis de linea brevissima in superficie quacunque ducenda. Nova Acta Ac. Petrop. **15**, a. 1799—1802, 44—54 [1806].

Zur Geschichte:

G. Eneström, Sur la découverte de l'équation générale des lignes géodésiques. Bibl. math. (2) **13**, 19—24, 1899.



P. Stäckel, Bemerkungen zur Geschichte der geodätischen Linien. Ber. Sächs. Ges. d. Wiss. **45**, 447—467, 1893.

Euler verdanken wir auch die ersten fundamentalen Untersuchungen über die Krümmung der Flächen.

L. Euler, Recherches sur la courbure des surfaces. Hist. Mém. Ac. Berlin **16**, a. 1760, 119—143 [1767].

Ihm folgten:

M. Ph. Meusnier, Mémoire sur la courbure des surfaces. Mém. prés. Ac. sc. Paris **10**, 1785.

G. Monge, Des lignes de courbure de la surface de l'ellipsoïde. J. Éc. Pol. cah. **2**. 145—165. 1796.

Ch. Dupin, Développement de géométrie, pour faire suite à la géométrie pratique de Monge. Paris 1813.

C. F. Gauß, Disquisitiones generales circa superficies curvas. Commentat Gott. rec. **6,** 99—144, a. 1823—27 [1827]. Dtsch. Allgemeine Flächentheorie. Herausg. von A. Wangerin. Klass. d. ex. Wiss. Nr. 5. Leipzig 1889. 62 S. — Nachgelassene Gaußsche Arbeiten aus dem Jahre 1825. Werke **8**, 1902. (Am Schluß Bibliographie der Flächentheorie.)

C. F. Gauß, Recherches générales sur les surfaces courbes. Trad. en français; suivies de Notes et d'Études sur divers points de la théorie des surfaces et sur certaines classes de courbes, p. E. Royer. Paris. 2e éd. 1870.

C. F. Gauß, General investigations of curved surfaces of 1827 and 1825. Transl. with notes and a bibliography, by J. C. Morehead and A. M. Hiltebeitel. Princetown 1902. 126 S.

Sophie Germain, Mémoire sur la courbure des surfaces. Journ. f. Math. **7**, 1 bis 29, 1830.

J. Plücker, Über die Krümmung einer beliebigen Fläche in einem gegebenen Punkte. Journ. f. Math. **3**, 324—336, 1828.

D. Poisson, Mémoire sur la courbure des surfaces. Journ. f. Math. **8**, 280 bis 297, 1832.

Weitere Arbeiten über allgemeine Flächentheorie:

A. F. Möbius, Über eine besondere Art dualer Verhältnisse zwischen Figuren im Raume. Journ. f. Math. **10**, 317—341, 1833. — Über eine allgemeine Art der Affinität geometrischer Figuren. ib. **12**, 109—136, 1834.

L. Raabe, Discussion über krumme Flächen, in Beziehung auf Directrix- und Fußpunktenflächen. Journ. f. Math. **50**, 194—212, 1855.

O. Bonnet, Mémoire sur les surfaces, dont les lignes de courbure sont planes ou sphériques. J. Éc. Polyt. **20**, cah. **35**, 117—306, 1853. — Note sur la théorie générale des surfaces. C. R. Ac. sc. Paris **37**, 529, 1853. — Sur l'emploi d'un nouveau système de variables dans l'étude des surfaces courbes. Journ. de math. (2) **5**, 246—357, 1860.

J. A. Serret, Mémoire sur les surfaces dont les lignes de courbure sont planes ou sphériques. Journ. de Math. **18**, 1853.

F. Joachimsthal, Sur les surfaces dont les lignes de l'une des courbures sont planes. Journ. f. Math. **54**, 1857. 11 S.

U. Dini, Sulle superficie, che hanno un sistema di linee di curvatura piana. Ann. di mat. (2) **1**, 146—154, 1868.

L. Aoust, Analyse infinitésimale des courbes tracées sur une surface quelconque. Paris 1868.

Ph. Gilbert, Mémoire sur la théorie générale des lignes tracées sur une surface quelconque. Paris 1869.

D. Codazzi, Sulle coordinate curvilinee d'una superficie e dello spazio. Ann. di mat. p. appl. (2), **1, 2, 4, 5,** 1868—1872. 92 S.

A. Mannheim, Mémoire sur les pinceaux de droites et les normalies contenant

une nouvelle exposition de la théorie de la courbure des surfaces. J. de math. (2) **17**, 109—167, 1872.

G. v. Escherich, Die Geometrie auf den Flächen constanter negativer Krümmung. Ber. Ak. Wien **69**, 1—30, 1894.

Ch. Brisse, Exposition analytique de la théorie des surfaces. Ann. Éc. Norm. (2) **3**, 87—146, 1874 (Krümmung und Krümmungslinien).

E. Beltrami, Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque. Ann. di mat. p. appl. (2) **1**, 329—366, 1868. — Zur Theorie des Krümmungsmaßes. Math. Ann. **1**, 515—582, 1869.

D. Chelini, Della curvatura delle superficie con metodo diretto ed intuitivo. Mem. Ist. Bol. (2) **8**, 27 ff. 1868.

P. Simon, Über Flächen mit constantem Krümmungsmaß. Diss. Halle 1876.

A. Enneper, Analytisch-geometrische Untersuchungen. Gött. Nachr. 1868, 258 bis 277, 421—443. — Bemerkungen über einige Flächen mit constanten Krümmungen. Gött. Nachr. 1876, 597—619.

J. Weingarten, Über die Eigenschaften des Linienelementes der Flächen von constantem Krümmungsmaß. Journ. f. Math. **94**, 181—202, **95**, 325—329, 1883.

F. de Salvert, Mémoire sur la théorie de la courbure des surfaces. Ann. Soc. sc. Brux. **5** B, 291—473, 1881. — Mémoire sur les ombilics coniques. ib. **7** B, 143—248, 1882.

A. Ribaucour, Études des élassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle. Mém. cour. 4⁰ Ac. Belg. **45**, 1882.

G. Darboux, Sur les surfaces dont la courbure est constante. C. R. Ac. sc. Paris **97**, 848—850, 1883. — Sur les surfaces à courbure constante. ib. 892 899. — Sur l'équation aux dérivées partielles des surfaces à courbure constante. ib. 946—949.

G. Frobenius, Über die in der Theorie der Flächen auftretenden Differentialparameter. Journ. f. Math. **110**, 1—36, 1892.

Ph. Gilbert, Sur l'emploi des cosinus directeurs de la normale dans la théorie de la courbure des surfaces. Ann. Soc. sc. Brux. **18** B, 1—24, 1894.

A. Enneper, Bemerkungen über die Biegung einiger Flächen. Gött. Nachr. 1875, 129—162.

R. H. van Dorsten, Theorie der Kromming van lijnen op gebogen oppervlakken. Diss. Leiden 1885. 66 S.

J. Weingarten, Über die Deformationen einer biegsamen, unausdehnbaren Fläche. Journ. f. Math. **100**, 296—310, 1886; Ber. Ak. Berl. 1886; 83—91. — Sur la déformation des surfaces. Acta math. **20**, 159—200, 1896.

A. Ribaucour, Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes. J. de math. (4) **7**, 5—108, 219—270, 1891. (Géométrie autour de la surface de référence.)

A. L. Thybaut, Sur la déformation du paraboloïde et sur quelques problèmes qui s'y rattachent. Ann. Éc. Norm. (3) **14**, 45—98, 1897. Auch Thèse. Paris 1897.

C. Guichard, Sur la déformation des surfaces. J. de math. (5) **2**, 123—215, 1896.

G. Hessenberg, Über die Invarianten linearer und quadratischer binärer Differentialformen und ihre Anwendung auf die Deformation der Flächen. Acta math. **23**, 121—170, 1899. Diss. Berlin. 50 S. 4⁰.

L. Bianchi, Sulla teoria delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante. Ann. di mat. (3) **3**, 185—298, 1899.

H. Liebmann, Über die Verbiegung der geschlossenen Fläche positiver Krümmung. Habil. Schr. Leipzig 1899. 30 S.

A. Voß, Zur Theorie der infinitesimalen Biegungsdeformationen einer Fläche. Stzgsber. Ak. München **27**, 229—301, 1897 [1898]. — Beiträge zur Theorie der unendlich kleinen Deformationen einer Fläche. Stzgsber. Ak. München **34**, 141—199, 1904 [1905].



A. Mehling, Über diejenigen Flächen, die äquidistante infinitesimale Biegungen gestatten. Diss. Würzburg 1899. 62 S.
U. Dobriner, Über die Flächen mit einem System sphärischer Krümmungslinien. Journ. f. Math. **94**, 116—161, 1883.
A. Enneper, Untersuchungen über die Flächen mit planen und sphärischen Krümmungslinien. Abh. Ges. Gött. **23** und **26**, 1880. Resultate der zweiten Abhandlung: Journ. f. Math. **94**, 329—341, 1883.
V. Rouquet, Des surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes. Mém. Fac. sc. Toulouse (8) **9**, 233—268, 1887; ib. **10**, 161—192, 1888.

Von neueren Schriften über geodätische Linien und geodätische Dreiecke seien genannt:
E. B. Christoffel, Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke. Abh. Ak. Berlin 1868, 119—176.
H. v. Mangold, Klassifikation der Flächen nach der Verschiebbarkeit ihrer geodätischen Dreiecke. Journ. f. Math. 21—40, 1883.
A. Brill, Zur Theorie der geodätischen Linie und der geodätischen Dreiecke. Abh. Ak. München **14**, 111—140, 1883.
A. v. Braunmühl, Über die reducierte Länge eines geodätischen Bogens und die Bildung jener Flächen, deren Normalen eine gegebene Fläche berühren. Abh. Ak. München **14**, 1883.
R. v. Lilienthal, Über geodätische Krümmung Math. Ann. **42**, 505—575, 1893.
G. Koenigs, Mémoire sur les lignes géodésiques. Mém. sav. étr. Ac. sc. Paris **31** Nr. 6. 1894. 318 S.
C. Fibbi, Sulle superficie che contengono un sistema di geodetiche a torsione costante. Ann. Scuola Norm. Pisa **5**, 79—164, 1888.
J. Hadamard, Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques. J. de math. (3) **4**, 27—73, 1898.

Zur Theorie der algebraischen Flächen, die zum Teil in den Schriften über algebraische Funktionen behandelt sind, gehören noch:
A. Clebsch, Zur Theorie der algebraischen Flächen. Journ. f. Math. **58**, 93 bis 108, 1858; **63**, 14—23, 1864.
L. Painvin, Recherches des points à l'infini sur les surfaces algébriques. I. II. Journ. f. Math. **55**, 198—256, 1858.
Th. Reye, Die algebraischen Flächen, ihre Durchdringungscurven, Schnittpunkte und projectivische Erzeugung. Math. Ann. **2**, 475—504, 1870.
G. Darboux, Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques et sur la théorie des imaginaires. Mém. Ac. Bordeaux **8**, 292—350. **9**, 1 bis 276, 1873. Auch Paris 1873.
L. Saltel, Sur l'application de la transformation arguésienne à la génération des courbes et des surfaces géométriques. Mém. Ac. Belg. 8⁰. **22**, 1—53, 1872. — Mémoire sur de nouvelles lois générales qui régissent les surfaces à points multiples. Mém. Ac. Belg. 8⁰ **27**, 1876.
G. Halphen, Sur les lignes singulières des surfaces algébriques. Ann. di. mat. p. appl. (2) **9**, 68—105, 1878.
G. Darboux, Sur le contact des courbes et des surfaces. Bull. sc. math. (2) 4, 348—384, 1880.
A. Voß, Beiträge zur Theorie der algebraischen Flächen. I. Zur Theorie der Steinerschen Kernfläche. Math. Ann. **27**, 357—393, 1886.
G. Humbert, Théorie générale des surfaces hyperelliptiques. Journ. de math. (4) **9**, 29—170, 361—475, 1893.
F. Enriques, Ricerche di geometria sulle superficie algebriche. Mem. Acc. Torino **44**, 171—232, 1894. — Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche. Mem. Soc. It. (3) **10**, 1—81, 1896.
G. Castelnuovo, Alcuni risultati sui sistemi lineari di curve appartenenti ad una superficie algebrica. Mem. Soc. It. (3) **10**, 82—102, 1896. — Alcune proprietà

fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciate sopra una superficie algebrica. Ann. di mat. (2) **25**, 235—318, 1897.

G. Castelnuovo et **F. Enriques,** Sur quelques récents résultats dans la théorie des surfaces algébriques. Math. Ann. **48**, 241—316, 1896 (Historisch).

G. Castelnuovo e **F. Enriques,** Sopra alcuni questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche. Ann. di mat. (3) **6**, 165—225, 1901.

R. v. Lilienthal, Die auf einer Fläche gezogenen Kurven. Encycl. d. math. Wiss. IIID 3, 105—183, 1902. — Besondere Flächen. ib. IIID 5, 260 bis 354, 1903.

Die orthogonalen Flächensysteme sind in folgenden Schriften behandelt:

R. Hoppe, Zum Problem der dreifach orthogonalen Flächensysteme. Arch. Math. Phys. **55,** 362—391, 1873; **56,** 153—163, 250—267; **57,** 89—107, 1874.

L. Schläfli, Über die allgemeinste Flächenschaar zweiten Grades, die mit irgend zwei anderen Flächenschaaren ein orthogonales System bildet. Journ. f. Math. **76,** 126—149, 1873.

A. Enneper, Untersuchungen über orthogonale Flächensysteme. Math. Ann. **7,** 456—480, 1874.

E. Catalan, Note sur les surfaces orthogonales. C. R. Ac. sc. Paris 28—32, 1874.

G. Darboux, Mémoire sur la théorie des coordonnées curvilignes et des systèmes orthogonaux. Ann. Éc. Norm. (2) **7**, 101—150, 227—260, 275—348, 1878.

L. Bianchi, Sopra alcune classi di sistemi tripli ciclici di superficie ortogonali. Giorn. di mat. **21**, 275—292, 1883; **22**, 333—374, 1884. — Sopra i sistemi tripli ortogonali di Weingarten. Ann. di mat. (2) **13**, 177—234, 1885; **14**, 115—130, 1886. — Sopra i sistemi tripli di superficie ortogonali che contengono un sistema di superficie pseudosferiche. Rend. R. Acc. Linc. Roma (4) **2**, 19—22, 1886. — Sopra alcune nuove classi di superficie e di sistemi tripli ortogonali. ib. **18**, 301—358, 1890. — Nuove ricerche sulle superficie pseudosferiche. Ann. di mat. (2) **24**, 347—386, 1896.

G. Bolke, Die Komplementärflächen der pseudosphärischen Rotationsflächen und ihr Zusammenhang mit allgemeineren pseudosphärischen Flächen. Diss. Leipzig 1901. 78 S.

F. de Salvert, Mémoire sur la recherche la plus générale d'un système orthogonal triplement isotherme. Ann. Soc. sc. Brux. **13** B, 117—260, 1889; **14** B, 121 bis 283, 1890; **15** B, 204—394, 1891; **17** B, 103—272. 1893. Introduction (Historische Einleitung zu vorstehenden Abhandlungen) ib. **18** B, 61—94, 1894. Auch Paris 1894.

L. Lévy, Sur les systèmes de surfaces triplement orthogonaux. Mém. cour. et d. sav. étr. Ac. Belg. **54**, 1896. 92 S. 4°.

G. Darboux, Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes. T. I. Paris 1898. VI u. 338.

C. Guichard, Sur les systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques. Ann. Éc. Norm. (3) **14**, 467—516, 1897; (3) **15**, 179—227, 1898.

§ 3. **Flächen zweiten Grades.** L. Euler verdankt man die wesentliche Durchführung der Descartesschen Koordinatenmethode für den Raum. Im Anhang seiner „Introductio" (s. oben S. 164) gibt er eine Klassifikation der Flächen zweiten Grades. Außer in den obengenannten größeren Geschichtswerken finden wir historische Notizen und Literatur über die Theorie dieser Flächen in:

O. Staude, Flächen zweiter Ordnung und ihre Systeme und Durchdringungskurven. Encycl. d. math. Wiss. IIIC, 2, 161—256, 1904.

C. Klöres, Zur Geschichte der Steinerschen Konstruktion einer Fläche zweiter Ordnung. Diss. Rostock 1903. 39 S.

H. Paepcke, Klassifikation der Oberflächen zweiten Grades bei Cauchy, Plücker, Hesse. Diss. Rostock 1904. 70 S.
H. Bögehold, Historisch-kritische Darstellung der Konstruktion der Flächen zweiter Ordnung aus neun Punkten. Diss. Jena 1898. 52 S. 8°.

In allen Lehrbüchern über Geometrie des Raumes wird die Theorie der Flächen zweiten Grades behandelt. Von älteren und neueren speziellen Untersuchungen über Flächen zweiten Grades seien genannt:

Nic. Fuß, De proprietatibus quibusdam ellipseos in superficie sphaerica descriptae. Nova Acta Ac. Petrop. **3**, a. 1785, 90—99 [1788].
J. v. Paccassi, Über einige Eigenschaften der Sphäroiden. Phys. Arb. einträcht. Freunde Wien **2**, Quart. II, 10 ff. 1788.
J. L. Lagrange, Mémoire sur les sphéroïdes elliptiques. Nouv. Mém. Ac. Berlin a. 1792—1793, 258—270 [1793].
J. H. Lindquist, Dissertatio mathematica de sectionibus ellipsoidicis. Abo 1794. 12 S. 4°.
A. J. Lexell, De epicycloidibus in superficie sphaerica descriptis. Acta Ac. Petrop. 1779, I. 49—71 [1782].
G. Monge, Sur les lignes de courbure de la surface de l'ellipsoïde. Journ. Éc. Polyt. cah. **2**, 145—165, 1796. — Application de l'algèbre à la géométrie. Paris 1805. — Application de l'analyse à la géométrie des surfaces du 1^r^ et 2^d^ degré. Paris 1807 et 1809.
J. N. P. Hachette, Traité des surfaces du second degré. Paris 1813. — Éléments de géométrie à trois dimensions. Paris 1817. — Applications de l'algèbre à la géométrie à trois dimensions. 2e éd. Paris 1817.
M. Chasles, Recherches de géométrie pure sur les lignes et les surfaces du second degré. Nouv. Mém. Bruxelles **5**, 1829; **6**, 1830. — Mémoire sur les propriétés générales des surfaces du second degré. Nouv. Mém. Bruxelles **6**, 1830. Engl. von Graves. Dublin 1841. — Mémoire sur les propriétés des coniques sphériques. Paris 1831. — Théorème général sur la description des lignes de courbure des surfaces du second ordre. C. R. **22**, 1846, 313—318.
C. G. J. Jacobi, Auszug aus einem Schreiben an Steiner. Journ. f. Math. **12**, 137—140, 1834. — Geometrische Theoreme. Bruchstücke aus dem Nachlaß, mitget. von O. Hermes. ib. **73**, 179—206, 1871.
O. Hesse, Über Oberflächen zweiter Ordnung. Journ. f. Math. **18**, 101—118, 1838. — De punctis intersectionis trium superficierum secundi ordinis. Königsberg 1840.
B. Amiot, Mémoire sur une nouvelle méthode de génération et de discussion de surfaces du second ordre. Paris 1843.
C. A. Valson, Application de la théorie des coordonnées elliptiques à la géométrie de l'ellipsoïde. Thèse. Paris 1854.
F. H. Siebeck, De superficiebus conicis cuilibet superficiei circumscriptis. Diss. Breslau 1845.
L. F. Painvin, Application de la nouvelle analyse aux surfaces du second ordre. Paris 1861.
H. E. Schröter, Problematis geometrici ad superficiem secundi ordinis per data puncta construendum spectantis solutio nova. Breslau 1862.
O. Hermes, De superficiebus confocalibus secundi gradus. Breslau 1849.
A. Clebsch, Über das Problem der Normalen bei Curven und Oberflächen der zweiten Ordnung. Journ. f. Math. **62**, 64—109, 1863.
C. A. v. Drach, Vom Tangentialkegel der Oberflächen 2. Ordnung. Diss. Marburg 1861.
L. Aoust, Recherches sur les surfaces du second ordre. I. II. Marseille 1864 et 1868.
K. G. C. v. Staudt, Von den reellen und imaginären Halbmessern der Kurven und Flächen zweiter Ordnung. Nürnberg 1867.

H. Theune, Über den Winkel, welchen zwei Seitenkanten eines Kegels bilden wenn derselbe in eine Ebene abgewickelt wird. Diss. Jena 1867.

R. Sturm, Das Problem der Projectivität und seine Anwendung auf die Flächen, zweiten Grades. Math. Ann. **1,** 533—574, 1869.

O. Hermes, Die Jacobische Erzeugungsweise der Flächen zweiten Grades. Journ. f. Math. **73,** 209—273, 1871.

G. Darboux, Sur les théorèmes d'Ivory relatifs aux surfaces homofocales du second degré. Mém. Soc. Bordeaux **8,** 197—280, 1872 u. Paris 1872.

L. Painvin, Axes, plans cycliques etc. dans les surfaces du second ordre. Nouv. Ann. (2) **13,** 113—128, 1874.

E. P. Böhme, Die Achsen eines Kegels 2. Ordnung. Diss. Göttingen, Berlin 1871.

E. Benter, Untersuchung über Tangentialkegel und die Kurven zweiten Grades. Diss. Erlangen. Leipzig 1871. IV u. 44 S. 4°.

Th. Reye, Synthetische Geometrie der Kugeln und linearen Kugelsysteme. Mit einer Einleitung in die analytische Geometrie der Kugelsysteme. Leipzig 1879. VIII u. 93.

J. Ph. Weinmeister, Die Flächen zweiten Grades nach elementar-synthetischer Methode bearbeitet. 2 Pr. Leipzig 1880 u. 1881.

H. Schröter, Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumcurven dritter Ordnung als Erzeugnisse projektivischer Gebilde. Nach Jacobi-Steiners Principien auf synthetischem Wege abgeleitet. Leipzig 1880. XVI u. 720.

H. Schröter, Über ein einfaches Hyperboloid von besonderer Art. Journ. f. Math. **85,** 26—79, 1880.

O. Hesse, Über Sechsecke im Raume. Mitget. von S. Gundelfinger. Journ. f. Math. **85,** 304—317, 1880.

R. Heger, Die Konstruktion der Flächen zweiter Ordnung aus 6 gegebenen Punkten und verwandte Konstruktionen. Pr. Dresden 1881.

O. Staude, Über Fadenconstructionen des Ellipsoids. Math. Ann. **20,** 147 bis 185, 1882.

E. d'Ovidio, Le proprietà fondamentali delle superficie di secondo ordine. Torino 1883.

K. T. Meyer, Über die Kegel des Pappus und des Hachette. Diss. Straßburg. Berlin 1884.

N. Salvatore Dino, Le proprietà fondamentali delle superficie di secondo ordine stabilite con i principii della geometria projettiva. Napoli 1884.

O. Lüdeke, Über die Erzeugung von Flächen durch zwei sich schneidende veränderliche Kegel. Pr. Brandenburg 1885.

H. G. Zeuthen, Théorie des figures projectives sur une surface du second ordre. Math. Ann. **18,** 33—69, 1881; **26,** 24—274, 1885.

O. Zucca, Applicazione del methodo delle coordinate curvilinee allo studio dell' iperboloide ad una falda. Genova 1888. 26 S.

J. H. Engel, Konstruktionen zur Geometrie der Flächen 2. Ordnung und der ebenen Curven 2. Ordnung. Diss. Zürich 1889. Vrtljschr. nat. Ges. Zürich **34,** 299—337.

A. Petot, Sur une extension du théorème de Pascal à la géométrie de l'espace. Ann. Éc. Norm. (3) **5.** Suppl. 3—65, 1888.

C. Biehler, Notes de géométrie analytique sur les surfaces du second ordre. Paris 1890. 52 S.

H. C. R. Méray, Sur la discussion et la classification des surfaces du deuxième degré. Nouv. Ann. (3) **11,** 474—509. 1892.

V. de Pasquale, Sul luogo dei punti dell' ellissoide nei quali la curvatura di Gauss e costante. Messina 1893.

O. Staude, Die Fokaleigenschaften der Flächen zweiter Ordnung. Leipzig 1896. VIII u. 186.

L. Gottscho, Miszellen aus der Theorie der Kegelschnitte und der Flächen 2. Ordnung unter Anwendung der Methode des Unendlichgroßen. Diss. Freiburg 1896. 61 S. 8°.

E. v. Weber, Das Imaginäre in der Geometrie der konfokalen Flächen 2. Ordnung. Stzsber. Ak. München **34**, J. 1904, 447—483 [1905].
G. Fontené, Tétraèdres variables liés à des quadriques et à des cubiques gauches. Nouv. Ann. (4) **1**, 10—14, 1901. — Tétraèdres, octaèdres, icosaèdres inscrits à une cubique gauche et circonscrits à une quadrique. ib. (4) **4**, 289 bis 309, 1904.
G. Hessenberg, Neue Begründung der Sphärik. Stzsber. Berl. Math. Ges. **4**, 69 bis 77, 1905.
G. Müth, Die projektive Erzeugung der Rotationsfläche zweiten Grades. Diss. Breslau 1905. 62 S.
K. M. Peterson, Sur la déformation des surfaces du second ordre. Trad. du russe p. Ed. Davaux. Ann. Fac. sc. Toulouse (2) **7**, 69—107, 1905.
L. Bianchi, Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche rotonde. Mem. Soc. It. (3) **14**. 72 S. u. Roma 74 S. 1905.

Wir schließen mit den neueren Schriften über Linien auf Flächen zweiten Grades.

L. Euler, De curva rectificabili in superficie sphaerica. Novi Comm. Ac. Petrop. **15**, a. 1770, 195—216 [1771]. — De curvis rectificabilibus in superficie coni recti ducendis. Acta Ac. Petrop. **5**, a. 1781, P. I, 60—73 [1784]. — De lineis rectificabilibus in superficie sphaeroidica quacunque geometrice ducendis. Nova Acta Ac. Petrop **3**. a. 1785, 67—68 [1788].
Nic. Fuß, De proprietatibus quibusdam ellipseos in superficie sphaerica descriptae. Nova Acta Petrop. **3**, a. 1785, 90—99. [1788].
F. J. Richelot, Anwendung der elliptischen Transcendenten auf die sphärischen Polygone, welche zugleich einem kleinen Kreise der Kugel eingeschrieben und einem anderen umschrieben sind. Journ. f. Math. **5**, 250—567, 1830. — Über die Anwendung einiger Formeln der elliptischen Funktionen auf ein bekanntes Problem der Geometrie. ib. **38**, 353—372, 1848.
F. Joachimsthal, Observationes de lineis brevissimis et curvis curvaturae in superficiebus secundi gradus. Journ. f. Math. **26**, 185—171, 1843.
C. Gudermann, De curvis catenariis sphaericis dissertatio analytico-geometrica Journ. f. Math. **33**, 189 ff. u. 281 ff. 72 S. 1846.
J. Plücker, Die analytische Geometrie der Curven auf den Flächen zweiter Ordnung und Classe. Journ. f. Math. **34**, 341 ff. r. 336 ff. 32 S. 1847.
P. van Geer, De geodetische lijnen op de ellipsoide. Diss. Leiden 1862.
K. Schwering, De linea brevissima in elliptica paraboloide sita. Berlin 1869.
A. v. Braunmühl, Geodätische Linien und ihre Enveloppen auf dreiachsigen Flächen zweiten Grades. Math. Ann. **20**, 557—587, 1882.
A. Kreuschmer, Über eine Eigenschaft der kürzesten Linie und der logarithmischen Spirale auf dem Mantel eines normalen Kreiskegels. Diss. Jena 1874.
K. Beucke, Die geodätischen Linien und die als geodätische Ellipsen und Hyperbeln betrachteten Krümmungscurven auf dem dreiachsigen Ellipsoid. Diss. Halle 1885.
R. Noske, Die kürzesten Linien auf dem Ellipsoid. Pr. Königsb. i. P. 1886.
A. Quidde, Curven gleicher Steilheit auf Flächen zweiten Grades. Pr. Stargard 1879.

Für die Literatur der von Nonius rumbus (linea rhombica, rhumb), von Willebrord Snellius Loxodrome genannten Linie eines Schiffes nennen wir:

F. Th. Schubert, De curva loxodromica. Nova Acta Ac. Petrop. **4**, a. 1786, 95—101 [1789].
J. H. Lindquist, Dissertatio de loxodromiis in superficie ellipsoidica. Aboae 1792. 20 S. 4°.
J. A. Grunert, Loxodromische Trigonometrie. Ein Beitrag zur Nautik. Leipzig 1849.
A. Stechert, Zur Geometrie der loxodromischen Linie auf Rotationsflächen zweiter Ordnung. Pr. Magdeburg 1856. 19 S. 4°.

A. Enneper, Über die Loxodrome der Kegelflachen. Gött. Nachr. 1869, 463 u. Z. Math. Phys. **15**, 466—475, 1870.
P. Glotin, Navigation orthodromique. Mém. Soc. Bord. (2) **2**, 189—210, 1878.
G. Scheffers, Über Loxodromen. Ber. Ges. Leipz. **54**, 363—370, 1902.

§ 4. Flächen dritten Grades. Flächen vierten Grades.

A. Cayley, On the triple tangent planes of surfaces of the third order. Cambr. a. Dublin math. J. **4**. 1849.
G. Salmon, On the triple tangent planes to a surface of the third order. Cambr. a. Dublin math. J. **4**, 1849.
J. J. Sylvester, On elimination, transformation and canonical forms. Cambr. a. Dublin math. J. **6**, 1851.
J. Steiner, Über die Flächen dritten Grades. Journ. f. Math. **53**, 133—141, 1856.
H. Graßmann, Die stereometrische Gleichung dritten Grades und die dadurch erzeugten Oberflächen. Journ. f. Math. **49**, 47—65, 1854.
F. Brioschi, Intorno ad alcune proprietà delle superficie del terzo ordine. Ann. sc. mat. fis. **5** Roma 1854.
L. Schläfli, An attempt to determine the twenty-seven lines upon a surface of the third order. Quart J. **2**, 1858. — On the distribution of surfaces of the third order into species. Phil. Trans. Lond. **153**, 1863.
G. Salmon, Über die Flächen dritten Grades. Journ. f. Math. **53**, 133—141, 1857. — On quaternary cubics. Phil. Trans. **150**, Lond. 1860.
A. Clebsch, Zur Theorie der algebraischen Flächen. Journ. f. Math. **58**, 93 bis 108. 1861 u. **63**, 1—8, 1864. — Über eine Transformation der homogenen Funktionen dritter Ordnung mit einer Veränderlichen. ib. 109—127. — Über die Knotenpunkte der Hesseschen Fläche, insbesondere bei Oberflächen dritter Ordnung. ib. **59**, 193—228, 1861.
Fr. August, Disquisitiones de superficiebus tertii ordinis. Diss. Berlin 1862.
H. E. Schröter, Nachweis der 27 Geraden auf der allgemeinen Oberfläche dritter Ordnung. Journ. f. Math. **62**, 265—280, 1863.
R. Sturm, Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung. Leipzig **1867.** xx u. 388.
L. Cremona, Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre. Preisschrift. Journ. f. Math. **68**, 1—133, 1868. — Dtsch. von M. Curtze. Berlin 1870.
Ch. Wiener, Stereoskopische Photographie des Modells einer Fläche dritter Ordnung mit 27 reellen Geraden. Leipzig 1869. 8 S. u. 2 photogr. Bl.
Th. Reye, Projectivische Erzeugung der allgemeinen Flächen dritter, vierter und beliebiger Ordnung durch Flächenbündel niederer Ordnung. Math. Ann. **1**, 455—466, 1869.
V. Schlegel, Untersuchung einer Fläche dritter Ordnung mittelst der Graßmannschen Ausdehnungslehre. Pr. Waren 1871.
H. G. Zeuthen, Études des propriétés de situation des surfaces cubiques. Math. Ann. 8, 1—30, 1874.
R. Rodenberg, Zur Klassification der Flächen dritter Ordnung. Math. Ann. **14**, 46—111, 1878.
R. Sturm, Zur Theorie der Flächen dritter Ordnung. Journ. f. Math. **88**, 213 bis 241, 1879. — Über die Curven auf der allgemeinen Fläche dritter Ordnung. Math. Ann. **21**, 457—515, 1883.
H. Schröter, Lineare Constructionen zur Erzeugung der kubischen Fläche. Journ. f. Math. **96**, 282—324, 1884.
C. Le Paige, Sur les surfaces du troisième ordre. Versl. en. Meded. Ak. Amst. **19**, 328—348, 1884.
E. Bertini, Contribuzione alla teoria delle 27 rette e dei 45 punti tritangenti di una superficie di 3^0 ordine. Ann. di mat. **12**, 301—346, 1884.

B. Meth, Untersuchungen über die asymptotische Fläche dritten Grades. Pr. Berlin 1887. 20 S. 4°.
K. Bobek, Zur Klassifikation der Flächen dritter Ordnung. Ber. Ak. Wien **96**, 355—386, 1887.
G. Herting, Über die gestaltlichen Verhältnisse der Flächen dritten Grades und ihrer parabolischen Kurven. 2 T. Diss. München u. Pr. Augsburg 1887 u. 1888.
H. Stoltz, Untersuchung der Fläche dritten Grades hinsichtlich der projektivisch verallgemeinerten Mittelpunktseigenschaften. Diss. Gießen 1890. 18 S.
K. Rohn, Die Raumkurven auf den Flächen dritter Ordnung. Ber. Sächs. Ges. Leipz. **46**, 84—119, 1894.
P. Dumont, Théorie élémentaire des surfaces du troisième ordre. Paris 1895.
F. C. Ferry, Geometry on the cubic scroll of the first kind. Arch. f. Math. og Naturv. **21**, 1—60, 1899. — Geometry on the cubic scroll of the second kind. ib. **23**, 179—234, 1901.
J. Schmidt, Das Cylindroid als geometrischer Ort der kürzesten Transversalen windschiefer Flächen. Pr. Plan 1900. 21 S.
M. Y. van Yven, La surface cubique de révolution. Mém. cour. Arch. Musée Teyler (3) **8**, 407—486, 1903.
R. Sturm, Zusammenstellung von Arbeiten, welche sich mit Steinerschen Aufgaben beschäftigen. Bibl. math. (3) **4**, 160—184, 1903.

Unter den Flächen vierten Grades, zu denen wir jetzt übergehen, zeichnet sich die Fresnelsche Wellenfläche aus. Historisch-bibliographisches gibt

E. Wölffing, Bericht über den gegenwärtigen Stand der Lehre von der Fresnelschen Wellenfläche. Bibl. math. (3) **3**, 361—382, 1902.
A. Smith, Investigation of the equation to Fresnels wave surface. Trans. Phil. Soc. Cambridge **6**, I, 85—90, 1836.
A. Cayley, Sur la surface des ondes. Journ. de math. **11**, 291—296, 1846. — On the wave surface. Quart. Journ. math. **3**, 16—22, 142—144, 1860.
P. H. Zech, Die Eigenschaften der Wellenfläche zweiaxiger Krystalle, mittelst der höheren Geometrie abgeleitet. Journ. f. Math. **52**, 243—223, 1856. — Die Krümmungslinien der Wellenfläche zweiaxiger Krystalle. ib. **54**, 72 bis 76, 1857, u. **55**, 94—101, 1858.
F. Brioschi, Sulle linee di curvatura delle superficie delle onde. Ann. di mat. **2**, 135—136, 285—287, 1859.
H. Durrande, Recherches sur la surface des ondes. Nouv. Ann. (2) **2**, 193 bis 204, 252—261, 1863.
L. Pochhammer, De superficiei undarum derivatione. Diss. Berlin 1863.
E. Lampe, Sur quelques problèmes relatifs à la surface des ondes. Pr. Berlin 1870.
C. Frosch, Die singulären Punkte und Tangentialebenen der Wellenfläche. Pr. Schneidemühl 1870.
E. Catalan, Mémoire sur une transformation géométrique et sur la surface des ondes. Mém. Ac. Belg. **38**, 1—64. 1871.
C. Cellérier, Mémoire sur la surface des ondes. Mém. Soc. sc. phys. nat. Genève **23**, 161—235, 1874.
O. Böklen, Über die Wellenfläche zweiaxiger Krystalle. Zschr. f. Math. Phys. **24**, 400—405, 1879; **25**, 207—213, 346—351, 1880; **27**, 160—175, 1882; **44**, 289 bis 297, 1899. — Die Wellenfläche zweiaxiger Krystalle. Pr. Reutlingen 1881 (Literatur).
C. Niven, On Mr. Mannheim's researches on the wave-surface. Quart. Journ. math. **15**, 257—260, 1878.
A. Mannheim, Construction plane des éléments de courbure de la surface de l'onde. Collect. math. in Mem. Dom. Chelini, 91—104. Mediol. 1881.

J. Knoblauch, Über die allgemeine Wellenfläche. Diss. Berlin 1882. 40 S. 4°.

A. Cayley, Sur la surface des ondes. Ann. di mat. (2) **20**, 1—18, 1892.

Eine Bibliographie der neueren Untersuchungen über Flächen vierter und fünfter Ordnung findet sich bei

A. Cayley, Sketch of recent researches on quartic and quintic surfaces. Proc. Lond. Math. Soc. **3**, 187—195, 1871.

R. Luchterhandt, Analytisch-geometrische Untersuchungen einer algebraischen Fläche vierten Grades. Pr. Berlin 1861.

J. Teichert, Über eine Gruppe algebraischer Flächen vierten Grades. Pr. Freienwalde 1865.

E. E. Kummer, Über die Flächen vierten Grades, auf welchen Schaaren von Kegelschnitten liegen. Monatsb. Ak. Berlin 1863 u. Journ. f. Math. **64**, 66 bis 76, 1865. — Die Fläche vierten Grades mit sechzehn singulären Punkten. Monatsb. Ak. Berlin 1864, 246—260. — Über einige Arten von Flächen vierten Grades. ib. 1864, 474 u. 483.

E. Lampe, De superficiebus quarti ordinis, quibus puncta triplicia insunt. Diss. Berlin 1864. 17 S. 4°.

H. Schröter, Über die Steinersche Fläche vierten Grades. Journ. f. Math. **64**, 79—94, 1865.

A. Clebsch, Über die Steinersche Fläche. Journ. f. Math. **67**, 1—22, 1867.

A. Cayley, Memoir on quartic surfaces. Proc. Lond. Math. Soc. **3**, 19—69, 1871; 2^d^ Mem. ib. 198—202; A third Mem. ib. 234—266. — On cyclides and sphero-quartics. Phil. Trans. Lond. **161**, 585—781, 1871. — On the 16-nodal quartic surface. Journ. f. Math. **84**, 239—241, 1877.

C. W. Borchardt, Über die Darstellung der Kummerschen Fläche vierter Ordnung mit 16 Knotenpunkten durch die Göpelsche biquadratische Relation zwischen vier Thetafunktionen mit zwei Variabeln. Journ. f. Math. **83**, 234 bis 245, 1877.

H. Weber, Über die Kummersche Fläche 4. Ordnung mit 16 Knotenpunkten und ihre Beziehung zu den Thetafunktionen mit 2 Veränderlichen. Journ. f. Math. **84**, 332—354, 1878.

K. Rohn, Betrachtungen über die Kummersche Fläche und ihren Zusammenhang mit den hyperelliptischen Funktionen $p = 2$. Diss. München 1878. Math. Ann. **15**, 315—354, 1879. — Die verschiedenen Gestalten der Kummerschen Fläche. Math. Ann. **18**, 96—160, 1881. — Über die Fläche 4. Ordnung mit einem dreifachen Punkte. ib. **24**, 55—152, 1884. — Die Flächen vierter Ordnung hinsichtlich ihrer Knotenpunkte und ihrer Gestaltung. Preisschr. d. Jablon. Ges. Leipzig 1886. 58 S. — Die Raumcurven auf den Flächen vierter Ordnung. Ber. Ges. Leipzig **49**, 631—663, 1897.

W. Reichardt, Über die Darstellung der Kummerschen Fläche durch hyperelliptische Funktionen. Diss. Leipzig 1887. Nova. Acta Leop. **50**, 375—483, 1887.

H. G. Zeuthen, Om flader af fjerde orden med dobbelt keglesnit. Festschr. Kopenhagen 1879. Ital. v. G. Loria. Ann. di mat. (2) **14**, 31—70, 1886.

F. Schur, Ueber eine besondere Klasse von Flächen 4. Ordnung. Math. Ann. **20**, 254—297, 1882.

R. W. H. T. Hudson, Kummer's quartic surface. Cambridge 1905. XI u. 219.

G. Darboux, Mémoire sur une classe de courbes et de surfaces. C. R. 68, 1311 bis 1313, 1869. (Cyklide). — Mém. Soc. Bord. **8**, 292—350; **9**, 1—276, 1873. — Sur le contact des courbes et des surfaces. Bull. sc. math. (2) **4**, 348 bis 384, 1880.

J. Casey, On cyclides and sphero-quartics. Phil. Trans. Lond. **161**, 585 bis 781, 1871.

G. Loria, Ricerche intorno alla geometria della sfera e loro applicazione allo studio ed alla classificazione delle superficie di quarto ordine aventi per linea doppia il cerchio imaginario al infinito. Mem. Acc. Torino (2) **36**, 1884.

G. Humbert, Sur la surface desmique du quatrième ordre. Journ. de math. (4) **3**, 353—398, 1891. — Sur les surfaces cyclides. Journ. Ec. Polyt. **55**, 127 bis 252, 1885. — Sur les surfaces de Kummer elliptiques. Amer. Journ. math. **16**, 221—253, 1894.
E. Cosserat, Sur la cyclide de Dupin. Ann. Fac. sc. Toulouse **6** F, 1—7, 1892.
H. Brunn, Ueber Ovale und Eiflächen. Diss. München 1887.
C. Demartres, Sur les surfaces à génératrice circulaire. Ann. Éc. Norm. (3) **2**, 123—182, 1885.
F. Blank, Über die geodätischen Curven auf einem körperlichen Kreisringe. Pr. Gera 1895. 24 S. 4⁰.
K. Uth, Die Fläche, welche durch Rotation eines Kreises um eine beliebige Achse entsteht. Diss. Marburg. Pr. Fulda 1865.
J. A. R. de la Gournerie, Sur les lignes spiriques. C. R. **66**, 283—285, 1868. Journ. de math. (2) **14**, 9—64, 103—138, 1869.
A. Enneper, Die cyklischen Flächen. Zschr. Math. Phys. **14**, 393—421, 1869.
W. M. Hicks, On toroidal functions. Phil. Trans. Lond. **171**, 609—652, 1882.
G. Bamberger, Die Cassinische Fläche. Diss. Bern 1900. 33 S. 4⁰.

§ 5. **Andere spezielle Flächen.** Geradlinige Flächen, weitere kinematisch definierbare Flächen, Krümmungsmittelpunktflächen, Flächen mit ebenen und sphärischen Krümmungslinien, Weingartensche Flächen, Minimalflächen, Flächen konstanter Krümmung und weitere besondere Flächen werden in ihrer historischen Entwickelung behandelt in dem Aufsatz von:

R. v. Lilienthal, Besondere Flächen. Encykl. d. math. Wiss. IIID 5, 269 bis 354, 1903.

Wegen der Literatur der geradlinigen Flächen verweisen wir auf die „Liniengeometrie" (Kap. 7). Einen großen Teil der soeben genannten Flächen haben wir bereits oben in § 2 (S. 188—193) berücksichtigt.

Hier beginnen wir mit den Minimalflächen. Eine erschöpfende Bibliographie derselben hat H. A. Schwarz in Arbeit. Wir müssen uns mit einer kurzen Auswahl begnügen. Die Literatur der Minimalflächen reicht bis auf L. Eulers oben (S. 107) genannten „Methodus inveniendi" 1744 zurück. J. L. Lagrange gab in den Misc. Taur. **2**, a. 1760 bis 1761 [1762] ihre Differentialgleichung. Die fundamentale Eigenschaft der Minimalflächen, daß ihre Hauptkrümmungsradien überall gleich und entgegengesetzt sind, findet sich bei:

Ch. Meusnier, Mémoire sur la courbure des surfaces. Mém. prés. Ac. sc. Paris 1785, 477—510.
D. Poisson, Note sur la surface dont l'aire est un minimum entre des limites données. Journ. f. Math. **8**, 361—362, 1832.
H. F. Scherk, Bemerkungen über die kleinste Fläche innerhalb gegebener Grenzen. Journ. f. Math. **13**, 188—209, 1835.
E. Catalan, Sur les surfaces réglées dont l'aire est un minimum. Journ. de math. **7**, 203—211, 1842.
J. Steiner, Sur le maximum et le minimum des figures dans le plan, sur la sphère et dans l'espace en général. Journ. f. Math. **24**, 93 ff. u. 189 ff. 1842. 122 S.
J. A. Serret, Note sur la surface réglée dont les rayons de courbure principaux sont égaux et dirigés en sens contraire. Journ. de math. **11**, 451 ff. 1846. — Sur la moindre surface comprise entre des lignes droites données, non située dans le même plan. C. R. **40**, 1078—1082, 1855.
O. Bonnet, Sur l'emploi d'un nouveau système de variables dans l'étude des

propriétés des surfaces courbes. Journ. de math. (2) **5**, 153 ff. u. 224 bis 252, 1860.
A. Weiler, Die allgemeine Gleichung der Minimalflächen. Arch. Math. Phys. **39**, 356—359, 1862.
C. Weierstraß, Über die Flächen, deren mittlere Krümmung überall gleich Null ist. Monatsb. Ak. Berlin 1866, 612—619.
B. Riemann, Über die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung. Bearb. von Hattendorff. Abh. Ges. Gött. **13**, 1867.
H. A. Schwarz, Bestimmung einer speziellen Minimalfläche. Gekrönte Preisschr. Berlin 1867. — Miscellen aus dem Gebiete der Minimalflächen. Journ. f. Math. **80**, 280—313, 1875. — Gesammelte mathematische Abhandlungen. I. Berlin 1890. 338 S. — Zur Theorie der Minimalflächen, deren Begrenzung aus geradlinigen Strecken besteht. Stzgsber. Ak. Berlin 1894. 1237—1266.
E. Beltrami, Sulle proprietà generali delle superficie d'area minima. Mem. Ist. Bologna (2) **7**, 3—73, 1868.
A. Schondorff, Ueber die Minimalfläche, die von einem doppelt-gleichschenkligen räumlichen Viereck begrenzt wird. Göttingen 1868. 52 S. 4°.
A. Herzog, Bestimmung einiger spezieller Minimalflächen. Vrtlj. natrf. Ges. Zürich **22**, 217—254, 1875.
L. Henneberg, Über solche Minimalflächen, welche eine vorgeschriebene ebene Curve zur geodätischen Linie haben. Diss. Zürich 1875. 68 S.
L. Kiepert, Über Minimalflächen. Journ. f. Math. **81**, 337—348, 1876; **85**, 171 bis 183, 1878.
S. Lie, Synthetisch-analytische Untersuchungen über Minimalflächen. I. Arch. for math. nat. Christ. **2**, 295—337, 1877. — Sätze über Minimalflächen. ib. **3**, 166—176, 224—233, 340—351, 1878; **4**, 334—344, 477—512, 1879. — Beiträge zur Theorie der Minimalflächen. Math. Ann. **14**, 331—416, 1878; **15**, 465 bis 506, 1879.
E. Neovius, Bestimmung zweier speziellen periodischen Minimalflächen, auf welchen unendlich viele gerade Linien und unendlich viele ebene geodätische Linien liegen. Afh. Ak. Helsingf. 1883. VIII u. 117.
L. Bianchi, Sopra una proprietà caratteristica delle superficie ad area minima. Giorn. di mat. **22**, 374—377, 1884. — Sulla teoria delle trasformazioni delle superficie d'area minima. Rend. R. Acc. Linc. Roma (5) **8**, II, 157—165, 1899.
G. Darboux, Sur la théorie des surfaces minima. C. R. Ac. sc. Paris **102**, 1513 bis 1519, 1886. — Sur un problème relatif à la théorie des surfaces minima. ib. **104**, 728—733, 1887.
G. Vivanti, Über Minimalflächen. Zschr. Math. Phys. **33**, 137—153, 1888.
P. Paci, Sopra le superficie di area minima. Atti Acc. Torino **29**, 446 bis 461, 1894.
H. Hancock, On minimum surfaces. Math. Review **1**, 81—86, 127—140, 1896.
P. Zeemann, Une surface minima algébrique du vingtième ordre. Arch. Mus. Teyler (2) **5**, 299—345, 1898.
L. Sinigaglia, Sulle superficie ad area minima applicabili a se stesse. Giorn. di mat. **36**, 172—182, 1898; **37**, 171—185, 1899.
R. Juga, Die cyklischen Minimalflächen. Diss. Straßburg 1898. 39 S.
P. Stäckel, Beiträge zur Flächentheorie. VII. Darstellungen der Minimalkurven. Ber. Sächs. Ges. Leipz. 1902, 101—108. (Geschichte.)
J. O. Müller, Über die Minimaleigenschaft der Kugel. Diss. Göttingen 1903. 51 S. 8°.

Im Zusammenhange mit den Minimalflächen stehen die Translationsflächen.

S. Lie, Untersuchungen über Translationsflächen. I. II. Ber. Sächs. Ges. Leipz. **44**, 447—572, 559—579, 1902. — Die Theorie der Translationsflächen und das Abelsche Theorem. ib. **48**, 141—198, 1896. (Literaturangaben.)

Für die Theorie der isothermen Flächen, deren Krümmungslinien isotherme Linien sind, fügen wir der Literatur der oben (S. 190) angeführten Flächen mit einem System ebener oder sphärischer Krümmungslinien und der damit zusammenhängenden Deformation der Flächen nachstehende Schriften hinzu.

G. Lamé, Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes et les surfaces isothermes. Paris 1857.

J. Garlin-Soulandre, Sur les surfaces isothermes et orthogonales et sur les mouvements apparents. Thèse. Paris 1853.

G. Darboux, Détermination d'une classe particulière de surfaces à lignes de courbure planes dans un système et isothermes. Bull. sc. math. (2) **7**, 257 bis 276, 1883.

M. Voretsch, Untersuchung einer speciellen Fläche constanter mittlerer Krümmung, bei welcher die eine der beiden Scharen der Krümmungslinien von ebenen Curven abgebildet wird. Diss. Göttingen 1883.

H. Willgrod, Über Flächen, welche sich durch ihre Krümmungslinien in unendlich kleine Quadrate teilen lassen. Diss. Göttingen 1883.

J. Weingarten, Über die Differentialgleichung der Oberflächen, welche durch ihre Krümmungslinien in unendlich kleine Quadrate geteilt werden können. Stzgsb. Ak. Berlin 1883, 1163—1166.

P. Adam, Sur les surfaces isothermiques à lignes de courbure planes dans un système ou dans les deux systèmes. Ann. Éc. Norm. (3) **10**, 319—358, 1893.

Th. Caronnet, Recherches sur les surfaces isothermiques et les surfaces dont les rayons de courbure sont fonction l'une de l'autre. Thèse. Paris 1894.

R. Rothe, Untersuchung über die Theorie der isothermen Flächen. Diss. Berlin 1897. 42 S. 4°.

A. Thybaut, Sur une classe de surfaces isothermiques. Ann. Éc. Norm. (3) **17**, 541—591, 1900.

§ 6. **Abwickelbare Flächen.** L. Euler benutzte zur Bestimmung der Oberfläche des schiefen Kegels die Abwickelung desselben und entwickelte später in einer Abhandlung über die Berechnung der Oberfläche eines zweiachsigen Ellipsoids die Prinzipien der analytischen Theorie der abwickelbaren Flächen.

L. Euler, De solidis, quorum superficiem in planum explicare licet. Novi Comm. Ac. Petrop. **16**, a. 1771, 3—34 [1772].

G. Monge, Mémoire sur les propriétés de plusieurs genres de surfaces courbes, particulièrement sur celles des surfaces développables, avec une application à la théorie des ombres et des pénombres. Mém. prés. Ac. sc. Paris **9**, 1775, **10**, 1780; Hist. Mém. math. Ac. sc. Paris a. 1784 [1787].

A. Lancret, Mémoire sur les développoïdes des courbes planes, des courbes à double courbure et des surfaces développables. Mém. prés. div. sav. Ac. sc. Paris **2**, 1—79, Paris 1811.

F. Minding, Wie sich entscheiden läßt, ob zwei gegebene krumme Flächen aufeinander abwickelbar sind oder nicht; nebst Bemerkungen über die Flächen von unveränderlichem Krümmungsmaße. Journ. f. Math. **19**, 370 bis 387, 1839.

A. Cayley, Mémoire sur les courbes à doubles courbure et sur les surfaces développables. Journ. de math. **10**, 1845; Cambr. a. Dublin math. J. (2) **4**, 1850. — On the developpable surface which arise from two surfaces of the second order. Cambr. a. Dublin math. J. (2) **5**, 46—58, 1850; On the developpable derived from an equation of the fifth order. ib. 152—159. — On certain developpable surfaces. Quart. J. **6**, 1863, 108—136.

W. Schell, Die Abwickelung einfach krummer Flächen. Diss. Marburg 1851.
E. A. A. Tillich, De superficiebus explicabilibus quarti gradus. Diss. Breslau 1855.
F. G. Mehler, Abwickelbare Flächen und Kurven doppelter Krümmung. Pr. Fraustadt 1861.
M. Chasles, Propriétés des surfaces développables circonscrites à deux surfaces du second ordre. C. R. Ac. Paris **54**, 715—722, 1862.
L. Cremona, Sur les surfaces développables du cinquième ordre. C. R. Ac. Paris **54**, 1862, 604—608.
C. Hamdorff, De superficiebus algebraicis in planum explicabilibus. Diss. Halle 1863.
H. A. Schwarz, De superficiebus in planum explicabilibus primorum septem ordinum. Diss. Berlin 1864. 22 S. 4°.
A. Enneper, Über die developpabele Fläche, welche zwei gegebenen Flächen umschrieben ist. Zschr. Math. Phys. **13**, 322—346, 1868.
L. Painvin, Étude analytique de la développable circonscrite à deux surfaces du second ordre C. R. Ac. Paris **67**, 816—820, 1868. — Détermination des éléments de l'arête de rebroussement d'une surface développable définie par ses équations tangentielles. Journ. de math. (2) **17**, 177—218, 1872.
L. Bianchi, Sulla applicabilità delle superficie degli spazi a curvatura costante. Rend. R. Acc. Lincei Roma (3) **2**, 149 ff. 1878. — Sulle superficie applicabili. Diss. Pisa 1878.
J. Weingarten, Über die Theorie der aufeinander abwickelbaren Oberflächen. Festschr. Berlin 1884. 43 S. 4°.
W. Hosenfeldt, Zur Theorie der abwickelbaren Flächen. Diss. Rostock 1887. 71 S. 8°.
A. Wangerin, Über die Abwickelung der Flächen konstanten Krümmungsmaßes sowie einiger anderer Flächen aufeinander. Festschr. Halle 1894. 22 S. 4°.

Kapitel 6. Abzählende Geometrie.

§ 1. **Einleitung. Geschichtliches.** Loria definiert das Problem der abzählenden Geometrie, geometria numerativa, folgendermaßen: „Unter den ∞^r geometrischen Gebilden von gegebener Definition die Zahl derjenigen zu bestimmen, welche einer Anzahl von Bedingungen genügen, die r einfachen Bedingungen äquivalent sind". Die Anfänge dieser neuen Disziplin reichen auf Arbeiten von J. Steiner und De Jonquières um die Mitte des XIX. Jahrhunderts zurück. Die von Chasles im Jahre 1864 geschaffene Methode der Charakteristiken begründete die abzählende Geometrie. Geschichte und Literatur findet man bei:

G. Loria, Notizie storiche sulla geometria numerativa. Bibl. math. (2) **2**, 39 bis 48, 67—80, 1888, **3**, 23—27, 1889.
C. Segre, Intorno alla storia del principio di correspondenza e dei sistemi di curve. Bibl. math. (2) **6**, 33—47, 1892.
M. Chasles, Rapport sur les progrès de géométrie. Paris 1871. 393 S. 8°.
L. Painvin, Sur la théorie des caractéristiques. Bull. sc. math. **3**, 155—159, 1872. (Bibliographie.)
E. Study, Über die Geometrie der Kegelschnitte, insbesondere deren Charakteristikenproblem. Math. Ann. **27**, 58—101, 1886. — Über das Prinzip der Erhaltung der Anzahl. Verh. III. intern. Math. Kongr. Heidelberg 1904, 388—395.
Fred. Schuh, Vergelijkend overzicht der methoden ter bepaling van aantallen

vlakke krommen. Preischr. Diss. Amsterdam 1905. 218 S. (Ausführliches Literaturverzeichnis.)

A. Brill und **M. Nöther,** Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit. Jhrsber. d. Dtsch. Math.-Ver. **3,** 107 bis 566, 1892—1893 [1894].

H. G. Zeuthen, Abzählende Methoden. Enzykl. d. math. Wiss. III C, 3, 257 bis 312. Leipzig 1906.

Die von Chasles erfundene und von De Jonquières und H. G. Zeuthen weiter fortgebildete Methode der Charakteristiken hat im wesentlichen die Aufgabe, die Anzahl der Kurven und Flächen zu finden, welche gegebenen Bedingungen genügen. Daher finden sich abzählende Methoden in den meisten Werken über Höhere Geometrie, besonders über ebene höhere Kurven.

§ 2. Zusammenfassende Darstellungen. Originalarbeiten.

H. Schubert, Kalkul der abzählenden Geometrie. Leipzig 1879. VIII u. 348.

A. Cayley, On the curves which satisfy given conditions. Phil. Trans. London **158,** 75—172, 1868. (Auch Literatur.)

H. G. Zeuthen, Almindelige egenskaber ved systemer af plane kurver, med anvendelse til bestemmelse af karakteristikerne i de elementaere systemer af fjerde orden. Skrift. Vid. Selsk. Kopenh. (5) **10,** 1873. 109 S. Résumé. Bull. sc. math. **7,** 97—105. 1874.

A. Legoux, Étude sur le principe de correspondance et la théorie des caractéristiques. Mém. Ac. Toulouse (8) **8,** 208—255, 1886. — Mémoire sur les systèmes de surfaces. ib. (8) **9,** 326—355, 1887. (Übersicht über die bisherigen Arbeiten.)

P. Visalli, Sulle correlazioni in due spazi a tre dimensioni. Mem. Acc. Linc. Roma (4) **3,** 597—671, 1886.

W. G. Alexejew, Theorie der Charakteristiken der Kurvensysteme (Historisches, Kegelschnittsysteme). Preisschr. Gel. Verh. Univ. Moskau. Phys.-math. Abt. **10,** 1893. (Russisch).

Von den vorbereitenden Arbeiten nennen wir:

J. Steiner, Über solche algebraische Kurven, welche einen Mittelpunkt haben, und über darauf bezügliche Eigenschaften allgemeiner Kurven sowie über geradlinige Transversalen der letzteren. Journ. f. Math. **47,** 7—105, 1854. Werke II, 485. — Über algebraische Kurven und Flächen. ib. **49,** 333—348, 1855. Werke II, 621.

E. de Jonquières, Note sur le nombre des coniques qui sont déterminées par cinq conditions, lorsque parmi ces conditions, il existe des normales données. Journ. de math. (2) **4,** 49—56, 1859. — Solutions de quelques questions générales concernant les courbes algébriques planes. Journ. f. Math. **59,** 313 bis 334, 1861. — Théorèmes généraux concernant les courbes géométriques planes d'un ordre quelconque. Journ. de math. (2) **6,** 113—134, 1861.

Für die von M. Chasles entwickelte Charakteristikentheorie und das Korrespondenzprinzip sind von Bedeutung:

M. Chasles, Considérations sur la méthode générale exposée dans la séance du 15 février. Différences entre cette méthode et la méthode analytique. Procédés généraux de démonstration. C. R. Ac. sc. Paris **58,** 1167—1176, 1864. — Questions dans lesquelles il y a lieu de tenir compte des points singuliers des courbes d'ordre supérieur. Formule générale comprenant la solution de toutes les questions relatives aux sections coniques. ib. **59,** 209—218, 1864. — Théorèmes divers concernant les systèmes de coniques représentés par deux caractéristiques. ib. **72,** 511—520, 1871.



H. G. Zeuthen, Nyt bidrag til laeren om systemer af keglesnit, der ere underkastede 4 betingelser, Kopenh. 1865. Frz. Nouvelle méthode pour déterminer les caractéristiques des systèmes de coniques. Nouv. Ann. (2) **5**, 241 bis 262, 289—297, 385—398, 433—443, 481—492, 529—540, 1866.

§ 3. Neuere Arbeiten über Charakteristiken.

H. G. Zeuthen, Sur la détermination des caractéristiques des surfaces du second ordre. Nouv. Ann. (2) **7**, 385—403, 1868. — Sur les singularités ordinaires d'une courbe gauche et d'une surface développable. Ann. di mat. (2) **3**, 175 bis 218, 1869.

H. Schubert, Zur Theorie der Charakteristiken. Journ. f. Math. **71**, 366—386, 1870.

C. Hierholzer, Über Kegelschnitte im Raume. Math. Ann. **2**, 563—586, 1870.

S. N. Maillard, Recherches des caractéristiques des systémes élémentaires des courbes planes du troisième ordre. Thèse. Paris 1871.

A. Brill, Zur Theorie der Elimination und der algebraischen Kurven. Math. Ann. **4**, 510—526, 1871. — Über zwei Berührungsprobleme. ib. **4**, 527—549, 1871. — Über Systeme von Kurven und Flächen. ib. **8**, 534—538, 1875.

H. Krey, Einige Anzahlen für Kegelflächen. Acta math. **5**, 83—96, 1884. — Über Systeme von Plankurven. ib. **7**, 49—94, 1885.

T. Archer Hirst, On the correlation of two planes. Proc. Lond. Math. Soc. **5**, 40—70, 1874; Ann. di mat. (2) **6**, 260—297, 1874.

L. Saltel, Considérations générales sur la détermination sans calcul de l'ordre d'un lieu géométrique. Mém. Ac. Belg. 8⁰. **24**, 1875.

H. G. Zeuthen, Révision et extension des formules numériques de la théorie des surfaces réciproques. Math. Ann. **10**, 446—546, 1876.

H. Schubert, Beiträge zur abzählenden Geometrie. Math. Ann. **10**, 1—116, 1876.

G. Halphen, Sur la théorie des caractéristiques pour les coniques. Proc. Lond. Math. Soc. **9**, 149—170; Math. Ann. **15**, 16—38, 1878. — Charactéristiques des systèmes de coniques et de surfaces du second ordre. J. Éc. Polyt. cah. **28**, 27—89, 1878.

O. Chemin, Étude sur les points singuliers des courbes algébriques planes. Paris 1883.

H. Schubert, Die n-dimensionalen Verallgemeinerungen der fundamentalen Anzahlen unseres Raumes. Math. Ann. **26**, 26—51, 1885. — Die n-dimensionale Verallgemeinerung der Anzahlen für die vielpunktig berührenden Tangenten einer punktallgemeinen Fläche m^{ten} Grades. ib. **26**, 52—73, 1885. — Lösung des charakteristischen Problems für lineare Räume beliebiger Dimension. Mitt. Hamb. Math. Ges. 1886, 134—155.

P. Visalli, Sulle correlazioni in due spazi a tre dimensioni. Mem. Acc. Lincei Roma (4) **3**, 597—671, 1886. — Sulle correlazioni che soddisfano a dodici condizioni elementari. Rend. Acc. Linc. Roma 1887. (4) $\mathbf{3}_1$, 118—124.

H. G. Zeuthen, Nouvelle démonstration du principe de correspondance de Cayley et Brill, et méthode à la détermination des coïncidences de correspondances algébriques sur une courbe d'un genre quelconque. Math. Ann. **40**, 99—124, 1892.

H. Schubert, Allgemeine Anzahlfunktionen für Kegelschnitte, Flächen und Räume zweiten Grades in n Dimensionen. Math. Ann. **45**, 153—206, 1894

A. Tanturri, Ricerche sugli spazi plurisecanti di una curva algebrica. Ann. di mat. (3) **4**, 67—121, 1900.

F. Severi, Sopra alcune singolarità delle curve di un iperspazio. Mem. Acc. Torino (2) **51**, 81—114, 1902.

G. Z. Giambelli, Risoluzione del problema degli spazi secanti. Mem. Acc. Torino (2) **52**, 171—211, 1902. — Il problema della correlazione negli iperspazi. Mem. Ist. Lomb. (3) **19**, 155—194, 1903. — La teoria delle formole d'incidenza e di posizione speziale e le forme binarie. Atti Acc. Torino **40**, 1041—1062. 1905.

Kapitel 7. Liniengeometrie.

§ 1. **Einleitung. Historisches.** Julius Plücker schuf in einer Reihe von Aufsätzen, die bis zum Jahre 1830 zurückreichen, eine neue geometrische Disziplin, die Liniengeometrie, indem er die gerade Linie als Element sämtlicher räumlicher Gebilde auffaßte. Selbstverständlich waren geometrische Gebilde, die durch Bewegung einer Geraden entstehen, schon weit früher betrachtet worden. Der Name „Regelfläche" (surface gauche, ruled surface, superficie rigata) für die durch Bewegung einer Geraden erzeugte Fläche rührt von G. Monge her (Leçons de géométrie descriptive, 1794). Fadenmodelle geradliniger Flächen ließ Th. Olivier 1830 anfertigen. Die Regelflächen sind entweder abwickelbare, surfaces développables (s. § 6 in Kap. 5) oder nicht abwickelbare, surfaces gauches. Plücker bezeichnet die Gesamtheit aller geraden Linien, die einer einzigen Bedingung unterworfen sind, mit dem Namen „Komplex" oder „Linienkomplex"; gerade Linien, die zwei Bedingungen unterworfen sind, die also zwei Komplexen gemeinschaftlich sind, bilden eine „Kongruenz" und alle Geraden, die drei Bedingungen genügen, eine „Regelfläche".

Kummer begründete im Jahre 1860 die Theorie der geradlinigen „Strahlensysteme". Ein Strahlensystem ist eine zweifache Mannigfaltigkeit von Geraden im Raume. Da die Liniengeometrie und besonders die Theorie der Strahlensysteme für die geometrische Optik von großer Bedeutung sind, so fügen wir hier ein Verzeichnis der wichtigsten neueren Schriften über geometrische Optik ein.

Lediglich um die Übersicht über die Literatur der Liniengeometrie zu erleichtern, trennen wir dieselbe in vier Abschnitte: 1. Lehrbücher; 2. Regelflächen im allgemeinen; 3. Strahlensysteme. Geometrische Optik; 4. Konnexe, Komplexe und Kongruenzen.

§ 2. **Lehrbücher der Liniengeometrie.**

J. Plücker, Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. Mit einem Vorwort von A. Clebsch. I (S. 1—226). Leipzig 1868. II (S. 227—378), hrsg. von F. Klein. 1869.

Rud. Sturm, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung. 3 Teile. Leipzig 1892—97. I. Der lineare Komplex oder das Strahlengewinde und der tetraedrale Komplex. 1892. XIV u. 386. II. Die Strahlenkongruenzen erster und zweiter Ordnung. 1893. XIV u. 367. III. Die Strahlenkomplexe zweiten Grades. 1897. XXIV u. 518.

E. Müller, Die Liniengeometrie nach den Prinzipien der Graßmannschen Ausdehnungslehre. Monatsh. f. Math. **2**, 267—290, 1891.

G. Königs, La géométrie réglée. Ann. Fac. Toulouse **3**, 1—24, 1889; **6**, 1—67, 1892; **7**, 1—55, 1893. (Bibliographie). — La géométrie réglée et ses applications. Paris 1895. 148 S.

G. Fano, Lezioni di geometria delle rette. Roma 1896. 149 S. lith.

S. Lie, Liniengeometrie und Berührungstransformation. Ber. Sächs. Ges. Leipz. **49**, 687—740, 1897.

M. Pieri, Sui principî che reggono la geometria delle rette. Atti Acc. Torino **36**, 335—350, 1901.

A. del Re, Lezioni sulle forme fondamentali dello spazio rigato, sulla dottrina degli imaginari e sui metodi di rappresentazione nella geometria descrittiva. Napoli 1906.

E. Study, Geometrie der Dynamen. Die Zusammensetzung von Kräften und verwandte Gegenstände der Geometrie. Leipzig 1901—1903. XIII u. 603. (Allgemeine Untersuchungen über Liniengeometrie und Kinematik. Klassifikation linearer Systeme von Gewinden.)

K. Zindler, Liniengeometrie mit Anwendungen. Leipzig. 2 Bände. I, VIII u. 380, 1902. II, VII u. 252, 1906.

A. Demoulin, Mémoire sur l'application d'une méthode vectorielle à l'étude de divers systèmes de droites (complexes, congruences, surfaces réglées). Bruxelles 1894. VII u. 118.

§ 3. Regelflächen im allgemeinen.

G. Monge, Sur les propriétés de plusieurs genres de surfaces courbes. Mém. prés. Ac. sc. Paris **9**, 382—440, 1780. — Leçons de géométrie descriptive. Paris 1794.

G. Gascheau, Traité des surfaces réglées. Paris 1828.

A. Arneth, De lineis rectis in spatio sitis. Heidelberg 1828.

A. F. Möbius, Über eine besondere Art dualer Verhältnisse zwischen Figuren im Raume. Journ. f. Math. **10**, 317—341, 1833.

M. Chasles, Sur quelques propriétés générales des surfaces gauches. Journ. de math. **2**, 1837 u. **4**, 1839.

L. Cremona, Sulle superficie gobbe del terz'ordine. Atti Ist. Lomb. **2**, 1861.

E. Catalan, Recherches sur les surfaces gauches. Mém. Ac. Belg. in 8⁰, **18**, 1866.

J. Lüroth, Zur Theorie der windschiefen Flächen. Habil. Schr. München 1866 u. Journ. f. Math. **67**, 130—152, 1867.

A. F. Material construction of ruled quartics. Mess. math. **4**, 226—237, 1868 Fadenmodelle).

O. Hermes, Über eine Gattung geradliniger Flächen vierten Grades. Festschr. Berlin 1868.

J. Plücker, Théorie générale des surfaces réglées, leur classification et leur construction. Ann. di mat. (2) **1**, 160—169, 1868.

A. Clebsch, Über die Kurven der Haupttangenten bei windschiefen Flächen. Journ. f. Math. **68**, 151—160, 1868.

Emil Weyr, Geometrie der räumlichen Erzeugnisse 1—2-deutiger Gebilde, insbesondere der Regelfläche dritter Ordnung. Leipzig 1870. VIII u. 175.

A. Voß, Zur Theorie der windschiefen Flächen. Math. Ann. **8**, 54—136, 1874. — Die Liniengeometrie in ihrer Anwendung auf die Flächen zweiten Grades. ib. **40**, 143—189, 1876. — Über die Haupttangentenkurve der windschiefen Fläche. ib. **12**, 485—503, 1877.

E. Catalan, Remarques sur la théorie des courbes et des surfaces. Mém. Ac. Belg. en 8⁰. **24**, 1875. — (J. M. de Tilly, Rapport sur ce mémoire. Bull. Ac. Belg. (2) **38**, 804—809, 1875.)

G. A. V. Peschka, Beitrag zur Theorie der Normalenflächen. Ber. Ak. Wien **81**, 1880. — Normalenflächen längs ebener Flächenschnitte. ib. — Normalenfläche einer Developpabeln längs ihres Durchschnitts mit einer krummen Fläche. ib. **83**, 790—803. — Normalenfläche einer krummen Fläche längs ihres Schnittes mit einer zweiten krummen Fläche. ib. **84**, 30—36, 1881. — Neue Eigenschaften der Normalflächen für Flächen zweiten Grades längs ebener Schnitte. ib. **85**, 381—407, 1882.

C. Segre, Sulle rigate razionali in uno spazio lineare qualunque. Atti Acc. Torino **19**, 355—373, 1884. — Ricerche sulle rigate ellittiche di qualunque ordine. ib. **21**, 868—891, 1886. — Nuovi risultati sulle rigate algebriche di genere qualunque. ib. **22**, 362—363, 1885. — Recherches générales sur



les courbes et les surfaces réglées algébriqnes. I. Math. Ann. **30**, 203—226, II, ib. **34**, 1—25, 1887.

E. Goedseels, Théorie des surfaces réglées, précédée de la démonstration des propriétés principales des limites et des infiniment petits. Louvain 1885. 76 S. 8°.

G. Pirondini, Studi geometrici relativi specialmente alle superficie gobbe. Giorn. di mat. **23**, 288—331, 1885. — Sulle superficie rigate. ib. **25**, 25 bis 41, 115—154, 1887. — Di due superficie rigate che si presentano nello studio delle curve. ib. **28**, 92—112, 1890.

A. M. Astor, Lignes géodésiques des surfaces réglées dont les génératrices coupent la ligne de striction sous un angle constant, et dont le paramètre de distribution est constant. C. R. Ass. Franç. 1887. 1—12.

H. Molins, Sur les surfaces gauches dont la ligne de striction est plane et qui sont coupées partout sous le même angle par le plan de cette ligne. Mém. Soc. Toulouse (2) **9**, 516—547, 1887.

C. F. E. Björling, Singuläre Generatricen in algebraischen Regelflächen. Öfv. Vet. Stockh. 1888, 587—604. — Die singulären Generatricen der Binormalen- und Hauptnormalenflächen. Bihang Vet. Stockh. **15**, 1889. 18 S.

E. Ciani, Le superficie rigate inerenti a una linea a doppia curvatura. Giorn. di mat. **27**, 233—264, 1889.

Ch. Bioche, Sur les systèmes de courbes qui divisent homographiquement les génératrices d'une surface réglée. Ann. Fac. Toulouse **3**, Nr. 1—41. 1889.

M. Chini, Sopra alcune deformazione delle superficie rigate. Atti Acc. Torino **26**, 20—34, 1890.

O. Gutsche, Über eine neue Erzeugungsart der Regelfläche zweiter Ordnung. Diss. Halle 1890. 32 S. 8°.

A. Demoulin, Sur le cylindroïde et sur la théorie des faisceaux de complexes linéaires. Bull. Soc. Math. Fr. **20**, 39—50, 1901.

E. J. Wilczynski, Studies in the general theory of ruled surfaces. Trans. Amer. math. Soc. **5**, 226—252, 1904.

Wegen einiger geradliniger Flächen, z. B. der Schraubenflächen, verweisen wir auf die in Kap. 10 weiter unten behandelte kinematische Geometrie.

§ 4. Strahlensysteme. Geometrische Optik.

W. Hamilton, On the theory of systems of rays. Trans. Ir. Ac. Dublin **15**, 1828, **16**, 1830, **17**, 1837. 313 S.

E. E. Kummer, Allgemeine Theorie der geradlinigen Strahlensysteme. Journ. f. Math. **57**, 189—230, 1860. — Über die algebraischen Strahlensysteme, insbesondere über die der ersten und zweiten Ordnung. Abh. Ak. Berlin 1866, 1—120.

F. Möbius, Geometrische Entwicklung der Eigenschaften unendlich dünner Strahlenbündel. Ber. Sächs. Ges. Leipz. **14**, 1—16, 1862.

F. Bachmann, De rectorum radiorum systematis, quorum superficies mediae sunt planae. Diss. Berlin 1861.

O. Hermes, Über Strahlensysteme der ersten Ordnung und der ersten Klasse. Journ. f. Math. **67**, 153—178, 1867.

G. Battaglini, Intorno ai sistemi di rette di primo ordine. Rend. Acc. Nap. **5**, 1866. 14 S. — Intorno ai systemi di rette di 1° grado. Giorn. di mat. **6**, 24—37, 1868. — Intorno ai sistemi di rette di 2° grado. ib. 239—259, 1868. — Intorno ai sistemi di rette di grado qualunque. ib. **10**, 55—76, 1872.

B. Irmer, Über Strahlensysteme dritter Ordnung mit Brennkurven. Diss. Halle 1870.

D. Chelini, Sulla composizione geometrica de sistemi di rette, di aree e di punti. Bologna 1870. 51 S. 4°. Mem. Ist. Bol. (2) **10**, u. (3) **1**, 343 bis 392, 1871.

E. A. Benteli, Über die ebenen Schnitte der Strahlenflächen. Pr. Bern 1875.
R. Niemtschick, Direkte Beleuchtungskonstruktionen für Flächen, deren zu einer Achse senkrechte Schnitte ähnliche Ellipsen sind. Ber. Ak. Wien **57**, 678—692, 1868.
R. Hoppe, Surfaces également illuminées. Nova Acta Ups. (3) **6.** 1868.
L. Burmester, Theorie und Darstellung der Beleuchtung gesetzmäßig gestalteter Flächen. Mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse technischer Hochschulen. Leipzig 1870. 2. Ausg. 1875. XVI u. 386 m. Atlas.
R. v. Lilienthal, Untersuchungen zur allgemeinen Theorie der krummen Oberflächen und geradlinigen Strahlensysteme. Bonn 1886. 112 S.
E. Study, Über Hamiltons geometrische Optik und deren Beziehungen zur Geometrie der Berührungstransformationen. Jhresb. Dtsch. Math. Ver. **14**, 424—438, 1905.
A. Cayley, On system of rays. Mess. math. (2) **17**, 73—78, 1887.
K. Hensel, Theorie der unendlich dünnen Strahlenbündel. Journ. f. Math. **102**, 273—303, 1888. (Neue Behandlung der Kummerschen Theorie.)
F. Walther, Zur Theorie des Strahlensystems 1. Ordnung und 1. Klasse und des linearen Strahlenkomplexes. Ableitung einiger Sätze von Reye. Diss. Leipzig 1889. 67 S. 8°.
R. Schumacher, Klassifikation der algebraischen Strahlensysteme. Math. Ann. **37**, 100—140, 1890.
J. Fibbi, I sistemi doppiamente infiniti di raggi negli spazii di curvatura costante. Ann. Scuola Norm. Pisa **7**, 1895. 100 S.
A. L. Zaalberg, Differentiaal-meetkundige eigenschappen van stralenstelsels. Diss. Leiden 1905. 113 S. 8°.

In den meisten Lehrbüchern der Optik findet man Anwendungen der Liniengeometrie auf optische Probleme. Von den neueren Schriften über geometrische Optik seien hier folgende angeführt.

A. F. Möbius, Kurze Darstellung der Haupteigenschaften eines Systems von Linsengläsern. Journ. f. Math. **5**, 113—132, 1830.
C. F. Gauß, Dioptrische Untersuchungen. Göttingen 1840.
A. F. Möbius, Entwicklung der Lehre von den dioptrischen Bildern mit Hilfe der Kollineationsverwandtschaft. Ber. Sächs. Ges. Leipzig **7**, 8—32, 1855.
C. Neumann, Die Haupt- und Brennpunkte eines Linsensystems. Elementare Darstellung der durch Möbius, Gauß und Bessel begründeten Theorie. Leipzig 1866. 41 S. 2. Aufl. 1893. VIII u. 42.
E. Reusch, Konstruktionen zur Lehre von den Haupt- und Brennpunkten eines Linsensystems. Leipzig 1870. VII u. 70.
P. A. Hansen, Untersuchung des Weges eines Lichtstrahls durch eine beliebige Anzahl von brechenden sphärischen Oberflächen. Abh. Sächs. Ges. Leipz. 1871, 62—202.
L. Geisenheimer, Zur Theorie der sphärischen Aberration. Ztschr. Math. Phys. **17**, 387—416, 1872.
A. Cornu, De la réfraction à travers un prisme suivant une loi quelconque. Ann. Éc. Norm. (2) **1**, 233—272, 1872.
O. Röthig, Die Probleme der Reflexion und Brechung. Leipzig 1876. VIII u. 112.
L. Matthießen, Grundriß der Dioptrik geschichteter Linsensysteme. Mathematische Einleitung in die Dioptrik des menschlichen Auges. Leipzig 1877. VIII u. 276. — Untersuchungen über die Lage der Brennlinien eines unendlich dünnen Strahlenbündels gegeneinander und gegen einen Hauptstrahl. Acta math. **4**, 177—192, 1884. — Neue Untersuchungen über die Lage der Brennlinien unendlich dünner kopulierter Strahlenbündel gegeneinander und gegen einen Hauptstrahl. Ztschr. Math. Phys. **29**, 86—100, 1884. — Die Brennlinien eines unendlich dünnen astigmatischen Strahlenbündels nach schiefer Inzidenz eines homozentrischen Strahlenbündels in eine krumme Oberfläche und das Strahlenkonoid von Sturm und Kummer. Gräfes Arch. Opht. **30**, 141—154, 1884.

A. Mannheim, Mémoire d'optique géométrique, comprenant la théorie du point représentatif d'un élément de surface réglée et son emploi tant pour la démonstration nouvelle de théorèmes relatifs à la courbure des surfaces que pour la détermination plane des éléments des surfaces caustiques. Journ. de math. (4) **2**, 5—48, 1886.
J. Meisel, Geometrische Optik. Eine mathematische Behandlung der einfachsten Erscheinungen auf dem Gebiete der Lehre vom Licht. Halle a. S. 1886. 177 S.
A. Heath, A treatise on geometrical optics. London 1887. — Lehrbuch der geometrischen Optik. Dtsch. von R. Kanthack. Berlin 1894. XIII u. 386.
A. Gleichen, Die Haupterscheinungen der Brechung und Reflexion des Lichtes, dargestellt nach neuen Methoden. Leipzig 1889. 47 S.
Issaly, Optique géométrique. 7 T. Mém. Soc. Bord. (3) **5**, 163—183, 1889; ib. 251—275, 1890; (4) **2**, 339—380, 1891; (4) **3**, 231—279, 1893; (4) **4**, 165 bis 228, 1894; (4) **5**, 437—484, 1895; (5) **1**, 361—420, 1896.
A. Steinheil und **E. Voit,** Handbuch der angewandten Optik. I. (einz.) Leipzig 1891. VI u. 314. Beilagen. 109 S.
S. Czapski, Theorie der optischen Instrumente nach Abbe. Breslau 1893. VIII u. 292. 8° 2. Aufl. von Eppenstein. 1907, (Literatur).
H. Bruns, Das Eikonal. Abh. Sächs. Ges. Leipz. **21**, 325—436. Zusatz. Ber. Sächs. Ges. Leipz. **47**, 323, 1895.
E. Study, Über Hamiltons geometrische Optik und deren Beziehungen zur Theorie der Berührungstransformationen Jhresb. Dtsch. Math. Ver. **14**, 424—438, 1905.
R. A. Sampson, A continuation of Gauß „Dioptrische Untersuchungen". Proc. Lond. Math. Soc. **29**, 33—83, 1896.
R. A. Herman, A treatise on geometrical optics. Cambr. 1900. X u. 344.
E. Walton, Traité d'optique géométrique. Paris 1900. 343 S.
A. Gleichen, Lehrbuch der geometrischen Optik. Leipzig 1902. XIV u. 511.
H. R. G. Opitz, Über das erste Problem der Dioptrik. Pr. Berlin 1903. 26 S. 4° (Geschichtliches).

§ 5. Kongruenzen. Konnexe. Komplexe.

Abschnitte über Komplexe und Kongruenzen findet man in mehreren umfangreicheren Lehrbüchern der höheren Geometrie. Von speziellen Abhandlungen seien hier die folgenden genannt.

A. Clebsch, Über die Plückerschen Komplexe. Math. Ann. **2**, 1—8, 1869.
F. Klein, Zur Theorie der Linienkomplexe des ersten und zweiten Grades. Math. Ann. **2**, 198—226, 1870. Gött. Nachr. 1869, 258—276.
C. A. v. Drach, Zur Theorie der Raumgeraden und der linearen Komplexe. Math. Ann. **2**, 128—139, 1870.
M. Pasch, Zur Theorie der Komplexe und Kongruenzen von Geraden. Gießen 1870.
L. A. Painvin, Étude d'un complexe du second ordre. Bull. sc. math. **2**, 368 bis 382, 1871.
D. Chelini, Sulla nuova geometria de'complessi. Mem. Ist. Bologna (3) **1**, 125 bis 154, 1871.
Th. Reye, Kollineare Grundgebilde und ihre Erzeugnisse. Journ. f. Math. **74**, 1—14, 1871.
M. Pasch, Zur Theorie der linearen Komplexe. Journ. f. Math. **75**, 106—153, 1872.
S. Lie, Über Komplexe, insbesondere Linien- und Kugelkomplexe, mit Anwendung auf die Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Math. Ann. **5**, 145—256, 1872.
F. Klein, Über Liniengeometrie und metrische Geometrie. Math. Ann. **5**, 257 bis 278, 1872. — Über gewisse in der Liniengeometrie auftretende Differentialgleichungen. ib. 278—302.

A. Weiler, Über verschiedene Gattungen der Komplexe zweiten Grades. Ber. Ges. Erl. 1873. Math. Ann. **7**, 145—207, 1873.
A. Voß, Über Komplexe und Kongruenzen. Math. Ann. **9**, 55—144, 1875.
E. d'Ovidio, I complessi e le congruenze lineari nella geometria projettiva. Ann. di mat. (2) **7**, 25—51, 1875. — Alcune proprietà metriche dei complessi e delle congruenze lineari nella geometria projettiva. Atti Acc. R. Linc. Roma (2) **3**, 260—268, 1876. — Sulle reti di complessi lineari nella geometria metrico-projettiva. ib. 561—581. — Le serie triple e quadruple di complessi lineari nella geometria metrico projettiva. ib. 723—755.
Ém. Picard, Application de la théorie des complexes linéaires à l'étude des surfaces et des courbes gauches. Thèse. Paris 1877. Bull. sc. math. (2) **1**, 335 bis 337. Ann. Éc. Norm. (2) **6**, 329—366, 1877.
Fr. Schur, Geometrische Untersuchungen über Strahlenkomplexe ersten und zweiten Grades. Math. Ann. **15**, 432—465, 1879.
Th. Reye, Über lineare und quadratische Strahlenkomplexe und Komplexengewebe. Journ. f. Math. **95**, 330—348, 1883. — Über die Hauptarten der allgemeinen quadratischen Strahlenkomplexe nud Komplexengewebe. ib. **98**, 284—300, 1885.
C. Ernst, Über Komplexe zweiten Grades, welche durch Flächenpaare zweiten Grades erzeugt werden. Preisschr. München 1885. 80 S. gr. 8°.
C. Segre, Sur une expression nouvelle du moment mutuel de deux complexes linéaires. Journ. f. Math. **99**, 169—172, 1885.
R. de Paolis, Fondamenti di una teoria dello spazio generale dei complessi lineari. Mem. R. Acc. Linc. Roma (2) **1**, 205—231, 1885.
D. Montesano, Sui complessi di rette di secondo grado generati da due fasci projettivi di complessi lineari. Rend. Acc. Nap. **25**. **1886**.
Issaly, Nouveaux principes de la théorie des congruences de droites. Bull. Soc. Math. Fr. **16**, 19—81, 1888.
P. H. Schoute, Het lineare complex en de congruentie. Versl. en Meded. Ak. Amst. (3) **5**, 66—99, 1888.
F. Waelsch, Zur Invariantentheorie der Liniengeometrie. Ber. Ak. Wien. **98**, 1528—1540, 1888. — Zur Infinitesimalgeometrie der Strahlenkongruenzen und -Flächen. ib. **100**, 158—219, 1891.
E. Cosserat, Sur une classe de complexes de droites. Mém. Ac. Toulouse (9) **4**, 482—509, 1892. — Sur les congruences de droites et sur la théorie des surfaces. Ann. Fac. Toul. N. 1—62, 1893.
Ch. J. Joly, The theory of linear vector function. Trans. Ir. Ac. Dublin **30**, Part **16**, 597—647, 1895.
D. Sinzow, Theorie der Konnexe im Raume, im Zusammenhange mit der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Kasan 1895. II u. 254. (Ruß.).
P. T. Smith, On surfaces enveloped by spheres belonging to a linear spherical complex. Trans. Amer. Math. Soc. **1**, 371—390, 1900.
L. Autonne, Sur les formes quaternaires à deux séries de variables. Application à la géométrie et au calcul intégral. Mém. cour. et sav. étr. en 4°. Ac. Belg. **59**, 1901. 254 S.
F. Aschieri, Sui complessi tetraedrali. Giorn. di mat. **41**, 261—284, 1903.
Ch. J. Joly, The quadratic screw-system: a study of a family of quadratic complexes. Trans. Ir. Ac. **32** A, 155—238, 1903.
R. S. Ball, Some extension of the theory of screws. Trans. Ir. Ac. **32** A, 299—366, 1903.
D. Sinzow, Zur Theorie der Konnexe. Konnexe mit dem Elemente (Punkt, Gerade, Ebene). Mitt. Ges. Charkow (2) **8**, 210—281. 1904. (Ruß.)
C. L. E. Moore, Classification of the surfaces of singularities of the quadratic spherical complex. Amer. J. math. **27**, 248—279, 1905.
H. Beck, Der Strahlenkomplex im hyperbolischen Raum. Diss. (Bonn.) Hannover 1905. 55 S.

Kapitel 8. Transformationen, Abbildung, Korrelation, Verwandtschaft.

§ 1. **Abbildung. Kartographie.** Die ersten allgemeinen Untersuchungen über Kartenprojektionen, Abbildung der Kugeloberfläche auf eine Ebene, verdanken wir Lambert und Euler.

J. H. Lambert, Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendungen. III, 105—199, 1772. — Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten (1772). Hsrg. von A. Wangerin. Ostwalds Klass. d. ex. Wiss. Nr. 54. Leipzig 1894. 96 S.

L. Euler, De repraesentatione superficiei sphaericae super plano. Acta Ac. Petrop. **1**, a. 1777, P. I, 107—132 [1778]. — De projectione geographica superficiei sphaericae, ib. 133—142. — De projectione geographica Delisliana in mappa generali Imperii Russici usitata. ib. 143—153. — Dtsch: Drei Abhandlungen über Kartenprojektion, hrsg. von A. Wangerin. Ostwalds Klass. d. ex. Wiss. Nr. 93. Leipzig 1898. 78 S.

L. Lagrange, Sur la construction des cartes géographiques. Nouv. Mém. Ac. Berlin, a. 1779, 161—210, [1781].

C. F. Gauß, Allgemeine Auflösung der Aufgabe: Die Teile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, daß die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Teilen ähnlich wird (1822). Preisschrift. Astron. Abhandlungen, hrsg. von H. C. Schumacher, Heft 3, Altona 1825. 1—30. — Werke IV, 189—216, Göttingen 1873.

L. Lagrange und **C. F. Gauß,** Abhandlungen über Kartenprojektion. Hrsg. von A. Wangerin. Ostwalds Klass. d. ex. Wiss. Nr. 55. Leipzig 1894. 102 S.

J. M. N. Carnot, Sur la corrélation des figures de géométrie. Paris 1801.

S. T. Mayer, Vollständige und gründliche Anleitung zum Entwerfen von Land-, See- und Himmelskarten und die Netze zu Weltkugeln und Koniglobien. 2. Aufl. Göttingen 1804.

L. Puissant, Traité de géodésie. Paris 1805. 2e éd. 2 vol. 1819, Suppl ém. 1827; 3e éd. 1843. — Traité de topographie, d'arpentage et de nivellement. Paris 1807; Suppl. 1810; 2e éd. 1820.

L. B. Francœur, Géodésie ou traité de la figure de la terre. Paris 1835; 2e éd. 1840.

C. F. Gauß, Neue allgemeine Untersuchungen über die krummen Flächen (1825). Aus dem Nachlaß. Werke VIII, 365—450.

C. F. Gauß, Untersuchungen über einige Gegenstände der höheren Geodäsie. I. Abh. Ges. Gött. **2**, a. 1842—44, 3—45 [1845]; II, ib. a. 1845—47, 3—43 [1847]. Werke IV, 259 ff.

C. G. J. Jacobi, Über die Abbildung eines ungleichachsigen Ellipsoids auf einer Ebene, bei welcher die kleinsten Teile ähnlich bleiben. Aus dem Nachlaß. Journ. f. Math. **59**, 74—88, 1861.

E. Schering, Über die konforme Abbildung des Ellipsoids auf der Ebene. Preisschr. Göttingen 1858.

W. Döllen, Meletemata quaedam de methodis secundum quas superficiei cujuslibet partes in qualibet alia superficie delineantur. Petersburg 1853.

J. Dienger, Abbildung krummer Oberflächen aufeinander und Anwendungen auf höhere Geodäsie. Braunschweig 1858.

Adr. Germain, Traité des projections des cartes géographiques. Paris 1867. 400 S. u. 14 Tab.

L. Cremona, Rappresentazione di una classe di superficie gobbe sopra un piano, e determinazione delle loro curve assintotiche. Ann. di mat. (2) **1**, 248—259, 1868.

K. v. der Mühll, Über ein Problem der Kartenprojektion. Habil. Schr. Leipzig

1868. — Über die Abbildung von Ebenen auf Ebenen. Journ. f. Math. **69**, 264—285, 1868.

J. A. Grunert, Über konforme Kartenprojektionen. Arch. Math. Phys. **50**, 176—216, 1869.

H. A. Schwarz, Über einige Abbildungsaufgaben. Journ. f. Math. **70**, 105 bis 121, 1869. — Konforme Abbildung der Oberfläche eines Tetraeders auf die Oberfläche einer Kugel. ib. 121—137, 1869.

A. Clebsch, Über die Abbildung algebraischer Flächen, insbesondere der 4. und 5. Ordnung. Math. Ann. **1**, 253 ff. 1869. — Über die Abbildung der geradlinigen Flächen 4. Ordnung, welche eine Doppelkurve dritten Grades haben. ib. **2**, 445—467, 1869. — Über den Zusammenhang einer Klasse von Flächenabbildungen mit der Zweiteilung der Abelschen Funktionen. ib. **3**, 45—75, 1870.

F. Eisenlohr, Über Flächenabbildung. Heidelberg 1870. Journ. f. Math. **72**, 148—151, 1870.

E. B. Christoffel, Sopra un problema proposta da Dirichlet. Ann. di mat. (2) **4**, 1—10, 1870. — Über die Abbildung einer einblättrigen, einfach-zusammenhängenden ebenen Fläche auf einem Kreise. Gött. Nachr. 1870, 288 ff. — Über die Abbildung einer n-blättrigen, einfach-zusammenhängenden Fläche auf einem Kreise. ib. 1870, 359 ff.

U. Dini, Sopra un problema che si presenta nella teoria generale delle rappresentazioni geografiche di una superficie su di un'altra. Ann. di mat. (2) **3**, 269—294, 1870. — Sulla rappresentazione geografica di una superficie su di un'altra. ib. (2) **8**, 162—187, 1877.

E. Armenante, Intorno alla rappresentazione delle superficie gobbe di genere $p = 0$ sopra un piano. Ann. di mat. (2) **4**, 50—73, 1870.

H. Amstein, Über die konforme Abbildung der Oberfläche eines regulären Oktaeders auf die Oberfläche einer Kugel. Vierteljahrschr. nat. Ges. Zürich **16**, 297—341, 1871.

G. Holzmüller, Über logarithmische Abbildung und die aus ihr entspringenden Kurvensysteme. Ztschr. Math. Phys. **16**, 269—289, 1871.

L. Cremona, Über die Abbildung algebraischer Flächen. Math. Ann. **4**, 213 bis 230, 1871.

M. Nöther, Über die eindeutigen Raumtransformationen, insbesondere in ihrer Anwendung auf die Abbildung algebraischer Flächen. Math. Ann. **4**, 547 bis 570, 1871.

H. Gretschel, Lehrbuch der Landkartenprojektionen. Leipzig 1873. 260 S.

F. August, Über eine konforme Abbildung der Erde nach der epizykloidischen Projektion. Verh. Ges. Erdk. Berlin **9**, 1874.

L. Schläfli, Über die allgemeine Möglichkeit der konformen Abbildung einer von Geraden begrenzten Figur in einer Halbebene. Journ. f. Math. **78**, 63 bis 81, 1874.

F. Schottky, Über die konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Flächen. Journ. f. Math. **83**. 300—351, 1877.

A. Voß, Über ein neues Prinzip der Abbildung krummer Oberflächen. Math. Ann. **19**, 1—27, 1881.

O. K. Fischer, Konforme Abbildung sphärischer Dreiecke aufeinander mittels algebraischer Funktionen. Diss. Leipzig 1885.

R. Tissot, Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques, suivi d'un complément et de tableaux numériques relatifs à la déformation produite par les divers systèmes de projection. Paris 1881. — Die Netzentwürfe geographischer Karten nebst Aufgaben über Abbildung beliebiger Flächen aufeinander. Dtsch. von Hammer. Stuttgart 1887.

M. Fiorini, Le projezioni delle carte geografiche. Bologna 1881. 746 S. u. 11 Taf. Sopra una speziale trasformazione delle projezioni cartografiche. Mem. Soc. geogr. It. **5**, 1895. — Erd- und Himmelsgloben, ihre Geschichte

und Konstruktion. N. d. It. (Le sfere cosmografiche e specialmente le sfere terrestri. Boll. d. soc. geogr. It.) frei bearbeitet von S. Günther. Leipzig 1895 VI u. 139.

G. Lazzeri, Sulla rappresentazione piana delle superficie sviluppabili razionali. Ann. Scuola Norm. Pisa (6) **3**, 79—170, 1883.

J. Thomae, Das ebene Kreissystem und seine Abbildung auf den Raum. Ztschr. Math. Phys. **29**, 284—305, 1884.

P. G. Laurin, Sur la transformation isogonale par une fonction rationnelle. Inaug. Diss. Lund 1888.

M. Busolt, Behandlung der konformen Abbildung der Oberflächen zweiter Ordnung. Diss. Königsberg 1890. 95 S. 8°.

J. A. Gravé, Sur la construction des cartes géographiques. J. de math. (5) **2**, 317—361, 1896.

A. Manaira, Sopra una certa rappresentazione piana dell' ellissoide di rivoluzione e sulla applicazione di essa ai calcoli geodetici. Padova 1895. 59 S. 8°.

F. Hausdorff, Infinitesimale Abbildungen der Optik. Ber. Ges. Leipzig **48**, 79 bis 130, 1896.

F. v. Dalwigk, Über die Integration von $\Delta u = 0$ und die konforme Abbildung. Habil. Schr. Marburg 1897. 53 S. (Zusammenhängende Darstellung).

K. Zöppritz, Leitfaden der Kartenentwurfslehre. 2. Aufl. von A. Bludau. Leipzig. T. I: Die Kartenprojektionslehre. 1899. x u. 178. T. II: Kartographie und Kartometrie. 1908. VIII u. 109.

E. Häntzschel, Das Erdsphäroid und seine Abbildung. Leipzig 1903. VI u. 140.

J. Frischauf, Die Abbildungslehre und deren Anwendung auf Kartographie und Geodäsie. Zsch. f. math. naturw. Unterr. **36**, 393—406, 477—497. Sep. Leipzig 1906. 32 S. (Auch Geschichte.)

A. Voß, Abbildung und Abwicklung zweier Flächen aufeinander. Enc. math. Wiss. III D 6a, 355—440. Leipzig 1903. (Historisches.)

§ 2. **Verwandtschaft, Korrelation, Transformation.** Unter Korrelation, Verwandtschaft, Transformation versteht man gewisse Beziehungen zwischen Grundgebilden. Eine Verwandtschaft zwischen zwei Grundgebilden findet statt, wenn jedem Element des einen Grundgebildes ein oder mehrere Elemente des andern zugeordnet werden. Zwei Flächen sind verwandt, wenn einem jeden Punkt der einen Fläche ein bestimmter Punkt der anderen entspricht und eine Abhängigkeit der Form der Fläche in den entsprechenden Punkten hinzukommt. Eine quadratische Verwandtschaft ist eine eindeutig umkehrbare nicht lineare Beziehung zweier Ebenen aufeinander. Solche finden sich gelegentlich schon bei

J. V. Poncelet, Traité des propriétes projectives des figures, Paris 1822, und Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques. Journ. f. Math. **4**, 1—71, 1829.

und bei

J. Plücker, Über ein neues Princip der Geometrie. Journ. f. Math. **5**, 268—286. 1830.

Ihre Theorie beginnt mit folgenden Aufsätzen:

L. J. Magnus, Nouvelle méthode pour découvrir des théorèmes de géométrie. Journ. f. Math. **8**, 51—63, 1832. — Quelques théorèmes de géométrie. ib. **9**, 135—138, 1832. — Auch: Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie. Berlin 1833.

J. Steiner, Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander. I. Berlin 1832. (S. oben S. 172.)

A. F. Möbius, Über eine neue Verwandtschaft zwischen ebenen Figuren. Ber. Sächs. Ges. 1853, 14—24; Journ. f. Math. **52**, 218—228, 1856.

Cremona kann als der eigentliche Schöpfer der allgemeinen eindeutigen Transformationen in der Ebene gelten.

L. Cremona, Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane. Mem. Acc. Bologna (2) **2**, 1863; ib. **5**, 1865.
M. Nöther, Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde von beliebig vielen Dimensionen. Math. Ann. **2**, 293—317, 1869.
E. Weyr, Analytische Untersuchung der quadratischen Verwandtschaft. Ztschr. Math. Phys. **14**, 445—477, 1869.
Fr. J. Richelot, Über die einfachste Correlation in zwei räumlichen Gebilden. Journ. f. Math. **70**, 137—156, 1869.
P. Bretschneider, Punktverwandtschaft und Linienverwandtschaft ebener Figuren. Pr. Plauen i. V. 1870.
A. Cayley, On the rational transformation between two spaces. Proc. Lond. Math. Soc. **3**, 127—180, 1871.
L. Cremona, Sulle trasformazione razionali nello spazio. Rend. Ist. Lomb. 1871, 269—279, 315—324. Ann. di mat. (2) **5**, 131—163, 1872.
L. Saltel, Sur l'application de la transformation arguésienne à la génération des courbes et des surfaces géométriques. Mém. Ac. Belg. en 8°. **22**, 1—53, 1872. — Mémoire sur le principe arguésien unicursal et sur certaines systèmes de courbes géométriques. Mém. Ac. Belg. en 8°. **23**, 1873.
E. Dewulf, Sur les transformations géométriques des figures planes. Bull. sc. math. **5**, 206—240, 1873.
E. Bertini, Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano. Ann. di mat. (2) 8, 254—287, 1877.
T. Archer Hirst, On the correlation of two planes. Proc. Lond. Math. Soc. **5**, 40—71, 1874; Ann. di mat. (2) **6**, 260—297, 1875; (2) 8, 262—273, 287 bis 301, 1877.
S. Lie, Über eine Klasse geometrischer Transformationen. 2 Abh. Forh. Vid. Selsk. Christ. 1871, 57—109, 182—245. — Geometrie der Berührungstransformationen. Darg. von S. Lie und G. Scheffers. I. Leipzig 1896. XII u. 694.
J. Edw. Campbell, Introductory treatise on Lie's theory of finite continuous transformation groups. Oxford 1903. XX u. 416.
J. Casey, On cubic transformations. Mem. Ir. Ac. Dublin **1**, 1880. 140 S. 4°.
R. Sturm, Über die reciproke und mit ihr zusammenhängende Verwandtschaften. Math. Ann. **19**, 461—487, 1882.
P. Visalli, Sulle correlazioni in due spazi a tre dimensioni. Mem. R. Acc. Linc. Roma (4) **3**, 597—671, 1886.
G. Hauck, Theorie der trilinearen Verwandtschaft ebener Systeme. Journ. f. Math. **95**, 1—36, 1883; **97**, 271—276, 1884; **98**, 304—332, 1885; **108**, 25—49, 1891; **111**, 207—233, 1893.
G. Holzmüller, Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften und der konformen Abbildungen, verbunden mit Anwendungen auf mathematische Physik. Leipzig 1882. VIII u. 284.
R. de Paolis, Le trasformazioni piane doppie. Mem. Acc. R. Linc. Roma (3) **1**, 136—171, 1871. — Le trasformazioni doppie dello spazio. ib. (4) **1**, 576 bis 608, 1885.
G. Pirondini, Sulla trasformazione per raggi vettori reciproci. Giorn. di mat. **27**, 168—223, 1889.
C. Segre, Un nuovo campo di ricerche geometriche. Saggio. Atti Acc. Torino **25**, 276—301, 430—457; **26**, 35—71, 592—612, 1890. (Antiprojektive Verwandtschaften, Antipolarität).
S. Kantor, Premiers fondements pour une théorie des transformations périodiques univoques. (Bearbeitung e. Mém. cour.) Naples 1891. 335 S. 4°.
S. Kantor, Theorie der eindeutigen periodischen Transformationen in der

Ebene. Journ. f. Math. **114**, 50—108, 1894. (Auszug aus d. vor.) — Neue Theorie der eindeutigen periodischen Transformationen in der Ebene. Acta math. **19**, 115—194, 1895. — Theorie der endlichen Gruppen von eindeutigen Transformationen in der Ebene. Berlin 1895. 111 S.

G. Fano, Über Gruppen, insbesondere continuierliche Gruppen von Cremona-Transformationen der Ebene und des Raumes. Monatsh. f. Math. **9**, 17—29, 1898. (Historisches).

Ed. v. Weber, Zur Theorie der Kreisverwandtschaften in der Ebene. Stzgsb. Ak. München **31**, 367—408, 1901.

Kapitel 9. Mehrdimensionale Geometrie.

§ 1. **Einleitung. Historisches.** Ein Raum von n Dimensionen R_n oder ein Hyperraum besteht aus Gruppen von speziellen, reellen oder komplexen Werten, welche man n gegebenen Variabeln beilegt. Durch eine homogene Gleichung zwischen homogenen Koordinaten, den Werten der Verhältnisse von n Variabeln dividiert durch eine $(n+1)^{\text{te}}$ Variable, wird eine in einem R_n enthaltene lineare Mannigfaltigkeit definiert. Eine Geometrie von n Dimensionen entstand durch Ersetzung von Ebene und Raum durch höhere Mannigfaltigkeiten, durch eine rein formale Ausdehnung der Cartesischen Koordinaten-Geometrie, durch eine Erweiterung der Begriffe, Formeln und Sätze der gewöhnlichen Differentialgeometrie auf Räume von mehreren Dimensionen und durch Ausdehnung der Begriffe und Probleme der projektiven und metrischen Geometrie. Die erste Definition der Mannigfaltigkeiten von n Dimensionen gab H. Graßmann 1844 in seiner Ausdehnungslehre. Die Anfänge der Geometrie von n Dimensionen sind auf Cayley zurückzuführen.

A. Cayley, Chapters in the analytical geometry of n dimensions. Cambr. math. f. **4**, 1845.

Die Prinzipien der absoluten Geometrie und der Begriff der Krümmung im Raume von n Dimensionen finden sich 1854 bei Riemann.

B. Riemann, Über die Hypothesen, die der Geometrie zugrunde liegen. Göttingen 1867. Abh. Ges. Gött. **13**, 1—20, 1868.

Die verwandten Arbeiten über die Grundlagen der Geometrie sind bereits oben (S. 51 und 132) angeführt. Zur Orientierung über die verschiedenen Richtungen, in denen sich die Theorie der mehrdimensionalen Geometrie entwickelt hat, dient:

E. O. Lovett, Sur la géométrie à n dimensions. Journ. de math. (5) **7**, 259 bis 303, 1901.

§ 2. Lehrbücher und Einführungen. Grundlagen.

C. Jordan, Essai sur la géométrie à n dimensions. Bull. Soc. math. Fr. **3**, 103—174, 1875.

H. Scheffler, Die polydimensionalen Größen. Braunschweig 1880. 201 S.

R. Hoppe, Einfachste Sätze aus der Theorie der mehrfachen Ausdehnungen. Arch. Math. Phys. **64**, 189—214, 1879.

W. Killing, Über die nicht-euklidischen Raumformen von n Dimensionen. Braunsberg 1883.

M. Rhenius, Grundzüge der allgemeinen Theorie vieldimensionaler Räume. Diss. Halle 1884.

G. Veronese, Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare. Padova 1891. XLVIII u. 628. Dtsch. Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten geradliniger Einheiten in elementarer Form entwickelt. Von A. Schepp. Leipzig 1894. XLVII u. 710. (Systematisches Hauptwerk mit zahlreichen historischen Angaben).

G. Fontené, L'hyperespace à $(n-1)$ dimensions. Propriétés métriques de la corrélation générale. Paris 1892. XVIII u. 133. gr. 8°.

C. Segre, Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito. Ann. di mat. (2) **22**, 1894. 102 S.

V. Schlegel, Über Entwickelung und Stand der n-dimensionalen Geometrie. Leopoldina und Leipzig 1886. Sur le développement et l'état actuel de la géométrie à n dimensions. L'enseign. math. **2**, 77—114, 1900 (Literaturangaben).

W. Kapteyn, De meer-dimensionale meetkunde. Utrecht 1902. IV u. 29.

P. H. Schoute, Mehrdimensionale Geometrie. I. T. Die linearen Räume. Leipzig, 1902. VIII u. 295. II. T. Die Polytope. ib. 1906. IX u. 326.

G. Jouffret, Traité élémentaire de géométrie à quatre dimensions. Introduction à la géométrie à n dimensions. Paris 1903. XXXIX u. 213. gr. 8°.

E. Bertini, Introduzione alla geometria projettiva degli iperspazi con appendice sulle curve algebriche e loro singolarità. Pisa 1907. VI u. 426.

A. Cayley, A memoir on abstract geometry. Phil. Trans. Lond. **160**, 51—63, 1870.

E. Betti, Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni. Ann. di mat. (2) **4**, 140—158, 1871.

G. Veronese, Behandlung der projektivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens. Math. Ann. **19**, 161—234, 1881.

R. Hoppe, Principien der n-dimensionalen Curventheorie. Arch. Math. Phys. (2) **6**, 168—185, 1885.

G. Vivanti, Fondamenti della teoria dei tipi ordinati. Ann. di mat. (2) **17**, 1—35, 1889.

S. Lie, Über die Grundlagen der Geometrie. I. II. Ber. Sächs. Ges. **42**, 284 bis 321, 355—418, 1890.

W. Killing, Einführung in die Grundlagen der Geometrie. I. Paderborn 1893. X u. 347. — Über die Grundlagen der Geometrie. Journ. f. Math. **109**, 121—186, 1902.

F. Aschieri, Fondamenti di geometria analitica. Mem. Acc. Modena (2) **11**, 301—338, 1895. (Grundlagen des linearen n-dimensionalen Raumes).

D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie. Leipzig 1899. 92 S. 2. Aufl. ib. 1904. VI u. 175.

G. Fano, Sui postulati fondamentali della geometria projettiva in uno spazio lineare a un numero qualunque di dimensioni. Giorn. di mat. **30**, 106—132, 1902.

§ 3. Mannigfaltigkeiten. Allgemeines.

G. Cantor, Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. Journ. f. Math. **84**, 242 bis 259, 1877. — Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten. Math. Ann. **15**, 1—8, 1879; **17**, 355—359, 1880; **20**, 113—122, 1882.

V. Schlegel, Theorie der homogen zusammengesetzten Raumgebilde. Halle 1883.

B. K. Mlodzieiowski, Über mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten. Mosk. Nachr. Phys.-Math. Abt. B. 8, 1—155, 1889. (Russisch).

O. Landsberg, Untersuchungen über die Gruppen einer fünffach linearen Mannigfaltigkeit. Diss. Breslau 1889. 81 S.

H. Kühne, Beiträge zur Lehre von der n-fachen Mannigfaltigkeit. Diss. (Greifswald) Berlin 1892. 57 S. Arch. Math. Phys. (2) **11**, 353—407, 1892.

A. Schoenflies, Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. II. Teil. Leipzig. Ergänzgsbd. Jhrsber. Dtsch. Math. Ver. 1908. x u. 431. (S. S. 51).

§ 4. Projektive und Differentialgeometrie im R_n.

E. Beltrami, Sulla teoria generale dei parametri differentiali. Mem. Acc. Bologna (2) **8**, 549—590, 1868. — Teoria fondamentale degli spazi di curvatura costante. Ann. di mat. (2) **2**, 232—255, 1868. Frz. von J. Hoüel, Ann. Éc. Norm. **6**, 347—377, 1869.

S. Lie, Über diejenige Theorie eines Raumes mit beliebig vielen Dimensionen, die der Krümmungstheorie des gewöhnlichen Raumes entspricht. Gött. Nachr. 1871, 191—209. — Zur Theorie des Raumes von n Dimensionen. ib. 535—551.

C. Jordan, Sur la théorie des courbes dans l'espace à n dimensions. C. R. Ac. sc. Paris **79**, 795—797. 1874. — Généralisation du théorème d'Euler sur la courbure des surfaces. ib. 909—911.

R. Lipschitz, Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Funktionen von n Variabeln. Journ. f. Math. **70**, 71—102, 1869; **72**, 1—56, 1870. — Entwickelung einiger Eigenschaften der quadratischen Formen von n Differentialen. ib. **71**, 274—287, 288—295, 1870. — Sätze aus dem Grenzgebiet der Mechanik und der Geometrie. Math. Ann. **6**, 416—436, 1873. — Beitrag zur Theorie der Krümmung. Journ. f. Math. **81**, 230—242. Généralisation de la théorie du rayon osculateur d'une surface. Journ. f. Math. **81**, 295—301; C. R. **82**, 160—162, 218—220, 1876.

R. Beez, Zur Theorie des Krümmungsmaaßes von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung. Ztschr. Math. Phys. **20**, 423—444, 1875; **21**, 373—401, 1876. — Über das Riemannsche Krümmungsmaß höherer Mannigfaltigkeiten. ib. **24**, 65—82, 1889.

M. Allé, Zur Theorie des Gaußschen Krümmungsmaaßes. Ber. Ak. Wien **74**, 9—38, 1876.

G. Halphen, Recherches de géometrie à n dimensions. Bull. Soc. Math. Fr. **2**, 34—52, 1875. (Projektive Eigenschaften höherer algebraischer Gebilde).

E. d'Ovidio, Le funzioni metriche negli spazi di quantesivogliano dimensioni e di curvatura costante. Atti Acc. R. Linc. (3) **1**, 133—193, 1877. — Les fonctions métriques fondamentales dans un espace de plusieurs dimensions et de courbure constante. Math. Ann. **12**, 403—419, 1877.

L. Kaiser, Beiträge zur Theorie eines Raumes von n Dimensionen. Diss. Bonn 1877.

L. Scheeffer, Über Bewegungen starrer Punktsysteme in einer ebenen n-fachen Mannigfaltigkeit. Diss. Berlin 1880.

E. Study, Über Distanzrelationen. Ztschr. Math. Phys. **27**, 140—160, 1883.

H. F. Blichfeldt, On the determination of the distance between two points in space of m dimensions. Trans. Amer. Math. Soc. **3**, 467—481, 1902.

P. Cassani, La geometria pura euclidea degli spazi superiori. Atti Ist. Ven. (2) **1**, 440—447; **2**, 121—135, 245—254, 1885. — Geometria pura euclidiana a n dimensioni. Giorn. di mat. **23**, 1—19, 1885.

E. Bertini, Sulla geometria degli spazi lineari in uno spazio ad n dimensioni. Rend. Ist. Lomb. (2) **19**, 855—862, 1886.

C. Segre, Ricerche sulle rigate ellittiche di qualunque ordine. Atti Acc. Tor. **21**, 868—891, 1886. — Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques. Math. Ann. **30**, 203—226, 1887; **34**, 1—25, 1889.

P. del Pezzo, Sulle superficie del n^{mo} ordine immerse nello spazio di n dimensioni. Rend. circ. Palermo **1**, 241—271, 1887. Appunti di geometria ad n dimensioni. Giorn. di mat. **31**, 1—22, 1893 (Lineare projektive Räume).

P. Predella, Le omografie in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni. Ann. di mat. (2) **17**, 113—159, 1889.

F. Amodeo, Quali possono essere i postulati fondamentali della geometria projettiva di uno S_r. Atti Acc. Torino **26**, 751—770, 1891.

G. Fano, Sopra le curve di dato ordine e dei massimi generi di un spazio qualunque. Mem. Acc. Torino 1894 (2) **44**, 335—382. — Studio di alcuni sistemi di rette considerati come superficii dello spazio a cinque dimensioni. Ann. di mat. (2) **21**, 141—192, 1893.

P. Stäckel, Über Biegungen von n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten. Journ. f. Math. **113**, 102—114, 1894.

A. Buchholz, Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. Mannigfaltigkeiten, deren Linienelemente auf die Form $ds = f(\sqrt{\Sigma X_k^2}) \cdot \sqrt{\Sigma d X_k^1}$ gebracht werden können. Bonn 1899. VI u. 264. 8⁰.

N. J. Hazzidakis, Displacements depending on one, two, ... k parameters in a space of n dimensions. Amer. J. math. **22**, 154—184, 1900.

H. C. Moreno, On ruled loci in n-fold space. Proc. Amer. Ac. Boston **37**, 126—157, 1901.

P. H. Schoute, Le déplacement le plus général dans l'espace à n dimensions. Ann. Éc. Polyt. Delft **7**, 139—158, 1901.

G. H. Knibbs, On the principle of continuity in the generation of geometrical figures in pure and pseudohomaloidal space of n dimensions. Journ. a. Proc. Soc. New South Wales **35**, 243—319, 1901.

§ 5. Körper höherer Dimensionen.

W. J. Stringham, Regular figures in n-dimensional space. Amer. Journ. Math. **3**, 1—15, 1880.

K. Rudel, Vom Körper höherer Dimension. Pr. Kaiserslautern. 1882.

V. Schlegel, Quelques théorèmes de géométrie à n dimensions. Bull. Soc. Math. Fr. **10**, 172—207, 1882. — Theorie der homogen zusammengesetzten Raumgebilde. Nova Acta Leop. **44**, 343—459, 1883. (Polyeder).

A. Puchta, Analytische Bestimmung der regelmäßigen konvexen Körper in Räumen von beliebiger Dimension. Ber. Att. Wien **90**, 168—185, 1884.

O. Biermann, Über die regelmäßigen Körper höherer Dimension. Ber. Ak. Wien **90**, 144—159, 1884.

R. Hoppe, Über den Winkel von n Dimensionen. Arch. Math. Phys. **66**, 448 ff. 1881. — Die regelmäßigen linear begrenzten Figuren jeder Anzahl von Dimensionen. ib. **68**, 151—166, 1882.

P. H. Schoute, Quelques figures à $n+2$ inversions dans l'espace à n dimensions. I. Arch. Mus. Teyler (2) **5**, 159—205, 1896; (2) **6**, 151—162, 1899. — Sur les relations entre les diagonales des parallelotopes. ib. (2) **8**, 395—405, 1902.

Körper im Raume von vier Dimensionen siehe im folgenden Paragraphen.

§ 6. Vierdimensionale Geometrie.

E. Dreher, Die vierte Dimension des Raumes. Habil. Schr. Halle 1879.

R. Hoppe, Berechnung einiger vierdehniger Winkel. Arch. Math. Phys. **67**, 269—290, 1882. — Regelmäßige linear begrenzte Figuren von vier Dimensionen. ib. **69**, 29—44, 1882. — Innere Winkel aller linear begrenzten Figuren von vier Dimensionen. ib. **68**, 110—112, 1883. — Über die Stellung der Ebene in der Vierdimensionengeometrie. ib. **68**, 378—389, 1883.

G. Veronese, Sulla geometria descrittiva a quattro dimensioni. Atti Ist. Ven. (5) **8**, 981—1025, 1882.

H. Durège, Über Körper von 4 Dimensionen. Ber. Ak. Wien **83**, 1110—1125, 1881.

A. Puchta, Analytische Bestimmung der regelmäßigen convexen Körper im Raume von vier Dimensionen nebst einem allgemeinen Satze aus der Substitutionstheorie. Ber. Ak. Wien **89**, 806—840, 1884.

F. A. Aschieri, Sulla curva normale di uno spazio a quattro dimensioni. Mem. Acc. Linc. Roma (4) **4**, 172—180, 1887.



G. Bordiga, La superficie del 6^0 ordine con 10 rette nello spazio R_4 e le sue projezioni nello spazio ordinario. Mem. Acc. Linc. Roma (4) **3**, 182—203, 1887.
C. Segre, Sulle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni e su certi sistemi di rette e certe superficie dello spazio ordinario. Mem. Acc. Torino (2) **39**, 1888. 48 S.
G. Castelnuovo, Sulle congruenze del 3^0 ordine dello spazio a quattro dimensioni. Atti Ist. Ven. (6) **6**, 1240—1281, 1888. — Su certi gruppi associati di punti. Rend. circ. Palermo **3**, 179—192, 1889. — Ricerche di geometria della retta nello spazio a quattro dimensioni. Atti Ist. Ven. (7) **2**, 855—901, 1901.
C. Cranz, Gemeinverständliches über die sogenannte vierte Dimension. Vorträge Virchow-Holtzendorff. 1890. 70 S. (Populär).
G. Pirondini, Sulle linee a tripla curvatura nello spazio euclideo a quattro dimensioni. Giorn. di mat. **28**, 219—239, 1890.
M. Brückner, Die Elemente der vierdimensionalen Geometrie mit besonderer Berücksichtigung der Polytope. Jhrsb. Ver. f. Naturk. Zwickau 1893. 61 S. 8^0.
G. Fano, Sulle varietà algebriche dello spazio a quattro dimensioni con un gruppo continuo integrabile di trasformazioni projettive in sé. Atti Ist. Ven. (7) **7**, 1069—1103, 1896.
P. H. Schoute, Regelmäßige Schnitte und Projektionen des 120zelles und 600zelles im vierdimensionalen Raume. Antwerpen 1895. 26 S. u. 7 Tf. — Het vierdimensionalen prismoide. Verh. Ak. Amst. **5**, Nr. 2, 1896. 20 S. — Les hyperquadriques dans l'espace à quatre dimensions. ib. **7**, Nr. 4. 1900. 66 S.
Th. Craig, Displacements depending on one, two and three parameters in a space of four dimensions. Amer. J. math. **20**, 135—156, 1898.
G. Kowalewski, Über eine Kategorie von Transformationsgruppen einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit. Diss. Leipzig. Ber. Sächs. Ges. **50**, 60 bis 111, 1898.
J. Sommer, Fokaleigenschaften quadratischer Mannigfaltigkeiten im vierdimensionalen Raume. Math. Ann. **53**, 113—160, 1900.
A. B. Stott, On certain series of sections of the regular four-dimensional hypersolids. Verh. Ak. Amst. **7**, Nr. 3. 1900. 21 S.
E. O. Lovett, Note on geometry of four dimensions. Bull. Amer. math. Soc. (2) **7**, 88—100, 1900. (Historisches zur Orientierung).
K. Kommerell, Die Krümmung der zweidimensionalen Gebilde im ebenen Raume von 4 Dimensionen. Diss. Tübingen 1897. 53 S. 8^0. — Riemannsche Flächen im Raume von 4 Dimensionen. Pr. Heilbronn 1905. 45 S.
C. J. Keyser, Concerning the angles and the angular determination of planes in four-space. Bull. Amer. Math. Soc. (2) **8**, 324—329, 1902.
G. Marletta, Sulle varietà del quarto ordine con un piano doppio nello spazio a quattro dimensioni. Giorn. di mat. **40**, 265—274, 1902; **41**, 47—61, 113 bis 128, 1903.
J. G. Hardy, Curves of triple curvature. Amer. J. math. **24**, 13—38, 1902.
St. Kwietniewski, Über Flächen des vierdimensionalen Raumes, deren sämtliche Tangentialebenen untereinander gleichwinklig sind, und ihre Beziehung zu den ebenen Kurven. Diss. Zürich 1902. 51 S. gr. 8^0.
H. de Vries, Die Lehre von der Zentralprojektion im vierdimensionalen Raume. Leipzig 1905. 78 S.
G. Jouffret, Mélanges de géométrie à quatre dimensions. Paris 1906. x u. 227.

Kapitel 10. Kinematische Geometrie.

§ 1. **Einleitung. Historisches.** Die kinematische Geometrie bezweckt die Erforschung der Bewegung unabhängig von den Kräften und der Zeit. Die Idee einer reinen Bewegungslehre, Phoronomie, findet sich

bei Kant, Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft, Königsberg 1786, dann bei Carnot, Essai sur les machines en général, Paris 1786, und in seiner Géométrie de position, Paris 1803. In der von Wronski herausgegebenen Sphinx, 1818, wird die Mathematik eingeteilt in Geometrie, Algorithmie und Phoronomie und in letzterer der Begriff der Kraft ausdrücklich ausgeschlossen. Ampère betrachtete in seinem Essai sur la philosophie des sciences, 1834, die Theorie der Bewegungen an und für sich und nannte diesen Teil der Mechanik Kinematik. Die eigentlichen Begründer der Geometrie der Bewegung oder der kinematischen Geometrie sind Chasles und Mannheim. Chasles' Untersuchungen über die Verrückung, déplacement, einer unveränderlichen Figur reichen bis zum Jahre 1829 zurück. Wir nennen:

M. Chasles, Propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace. C. R. Ac. sc. Paris **16**, 1420—1432, 1843. — Sur le déplacement d'une figure de forme invariable. ib. **51** u. **52**, 77—85, 189—197, 487—501, 1860. 53 S.

A. Mannheim, Étude sur le déplacement d'une figure de forme invariable. Nouvelle méthode des normales. Applications diverses. Journ. Éc. Polyt. cah. **43**, 57—122, 1870. Mém. prés. Ac. sc. Paris (2) **20**, 1—74, 1872.

Für die historische Entwicklung sehe man:

M. Grübler, Wandlungen der Kinematik in der Gegenwart. Civiling. (2) 35, 219—236, 1889.

A. Schoenflies und **M. Grübler,** Kinematik. Encykl. d. math. Wiss. IV. 1, 190 bis 278. Leipzig 1902.

§ 2. Lehrbücher der Kinematik.

S. H. Aronhold, Grundzüge der kinematischen Geometrie. Verh. Ver. Gewerbfl. Preuß. 1872.

F. Reuleaux, Theoretische Kinematik. Grundzüge einer Theorie des Maschinenwesens. 1875. — Lehrbuch der Kinematik. II. Bd. Die praktischen Beziehungen der Kinematik zu Geometrie und Mechanik. Braunschweig 1875. xxviii u. 788.

E. J. Groß, An elementary treatise on kinematics aud kinetics. London, Oxford, Cambridge 1877.

Jos. Somoff, Theoretische Mechanik. Aus dem Russischen übersetzt von A. Ziwet. I. T. Kinematik. Leipzig 1878. xvi u. 412.

W. Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte. I. 1. Geometrie der Streckensysteme und Geometrie der Massen. 2. Theorie der Bewegung und Theorie der Bewegungszustände (Kinematik). 2. Aufl. Leipzig 1879. xvi. u. 580.

A. Mannheim, Cours de géométrie descriptive de l'École Polytechnique, comprenant les éléments de la géométrique cinématique. Paris 1880. 2e éd. 1886.

C. W. Mac Cord, Kinematics, a treatise on the modification of motion. New York 1883. ix u. 335.

J. Petersen, Kinematik. Foreläsninger. Kjöbenhavn 1884. 69 S. Dtsch von R. v. Fischer-Benzon. Kopenhagen 1884. 80 S.

A. Schoenflies, Geometrie der Bewegung in synthetischer Darstellung. Leipzig 1886. vi u. 195. — La géométrie du mouvement. Trad. p. Ch. Speckel. Suivie de notions géométriques sur les complexes et les congruences de droites, par G. Fouret. Paris 1893.

L. Burmester, Lehrbuch der Kinematik, für Studierende der Maschinentechnik, Mathematik und Physik geometrisch dargestellt. Leipzig 1886—88. xx u. 942.

Ed. Bour, Cours de mécanique et machines. Cinématique. Paris 2e éd. 1887.

E. Villié, Traité de cinématique, Paris 1888.

A. Calinon, Étude de cinématique à deux et à trois dimensions. Paris 18.0. 129 S. 8⁰.

P. Puiseux, Leçons de cinématique, mécanismes, hydrostatique, hydrodynamique Réd. p. P. Bourguignon et H. Le Barbier. Paris 1890. VIII u. 340. 8⁰.

F. Buka, Elemente der kinematischen Geometrie der zweigliedrigen ebenen Systeme. Pr. Charlottenburg 1890. 27 S. 4⁰.

G. Davoglio, Nuovi principi di cinematica. Bergamo 1892. 129 S. 8⁰.

A. Mannheim, Principes et développements de géométrique cinématique. Ouvrage contenant de nombreuses applications à la théorie des surfaces. Paris 1894. x u. 589. 4⁰.

G. Koenigs, Leçons de cinématique, prof. à la Faculté des sciences. Paris 1895. IX u. 241. 8⁰. — Leçons de cinématique, prof. à la Sorbonne. Avec des notes par G. Darboux et par E. Cosserat et F. Cosserat. Cinématique théorique. Paris 1897. x u. 499. gr. 8⁰.

H. Weiß, Grundzüge der Kinematik. I. Heft. Leipzig 1900. 256 S. m. Atl. (Geschichtliches.)

F. Munger, Kinematische Geometrie. Basel 1901. 36 S. 4⁰.

H. Sicard, Traité de cinématique théorique. Paris 1901. VIII u. 185.

K. Heun, Lehrbuch der Mechanik. I. Kinematik mit einer Einleitung in die elementare Vektorrechnung. Sammlg. Schubert. Leipzig 1906. XVI u. 339.

§ 3. Spezielle Probleme der kinematischen Geometrie.

R. S. Ball, On the theory of screws, a geometrical study of the kinematics, equilibrium aud small oscillations of a rigid body. Trans. Ir. Ac. Dublin **25**, 1872. — A treatise on the theory of screws. Cambridge 1900. XIX u. 544. gr. 8⁰.

F. Klein, Zur Schraubentheorie von Sir Robert Ball. Ztschr. Math. Phys. **47**, 237—265, 1902.

L. Burmester, Kinematisch-geometrische Untersuchungen der Bewegung ähnlich-veränderlicher ebener Systeme. Ztschr. Math. Phys. **19**, 151—170; 1874. — Kinematisch-geometrische Untersuchungen der Bewegung affin-veränderlicher und collinear-veränderlicher ebener Systeme. ib. 465—472. — Kinematisch-geometrische Theorie der affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen und starren räumlichen und ebenen Systeme. ib. **23**, 108—131, 1878; **47**, 128—156, 1902. — Über die Festlegung projektiv-veränderlicher ebener Systeme. Math. Ann. **14**, 472—497, 1879. — Ueber das bifocal veränderliche System. ib. **16**. 89—112, 1880.

H. Durrande, Essai sur le déplacement d'une figure de forme invariable. Ann. Éc. Norm. (2) **2**, 81—121, 1873.

Ch. Brisse, Sur le déplacement fini quelconque d'une figure de forme invariable. Journ. de math. (2) **20**, 220—265, 1874; (3) **1**, 141—180, 1875.

E. Beltrami, Formules fondamentales de cinématique dans les espaces de courbure constante. Bull. sc. math. **11**, 233—240, 1876.

G. Darboux, Sur le mouvement d'une figure invariable; propriétés relatives aux aires, aux arcs des courbes décrites et aux volumes des surfaces trajectoires. Bull. sc. math. (2) **2** 333—356, 1878.

M. Chasles, Mémoire de géométrie sur la construction des normales à plusieurs courbes mécaniques. (1829 verfaßt.) Bull. Soc. Math. Fr. **6**, 208—250, 1878.

L. Geisenheimer, Untersuchung der Bewegung ähnlich-veränderlicher Systeme. Ztschr. Math. Phys. **24**, 129—159, 1879. — Die Bildung affiner Figuren durch ähnlich-veränderliche Systeme. ib. 345—381.

Ad. Schumann, Beiträge zur Kinematik ähnlich-veränderlicher und affin-veränderlicher Gebilde. Ztschr. Math. Phys. **26**, 157—179, 1881.

A. Schoenflies, Über die Bewegung eines starren räumlichen Systems. Ztschr. Math. Phys. **28**, 229—241, 1883. — Zur Theorie der Bewegung starrer räumlicher Systeme. Journ. f. Math. **98**, 265—280, 1885.

C. Formenti, Sul movimento geometrico dei sistemi invariabili. Rend. Ist. Lomb. (2) **16**, 781—795, 1884; **18**, 195—200, 238—242, 418—431, 1885.
J. Tannery, Deux leçons de cinématique. Ann. Éc. Norm. (3) **3**, 43—80, 1886. Auch Paris 1886. (Theorie der Strecken und ihrer Derivierten.)
L. Burmester, Kinematische Flächenerzeugung vermittelst cylindrischer Rollung. Ztschr. Math. Phys. **33**, 304—348, 1888.
A. Mannheim, Étude d'un déplacement particulier d'une figure de forme invariable. Rend. Circ. mat. Palermo **3**, 131—144, 1889; Nouv. Ann. (3) **8**, 308—322, 1889.
C. Rodenberg, Über Wesen und Aufgaben der Kinematik. Ztschr. math. naturw. Unterr. **21**, 3—18, 161—180, 1890.
J. Somoff, Kinematik collinear-veränderlicher Systeme. (Russisch). Warschau 1891. 241 S.
Chr. Nehls, Über den Flächen- und Rauminhalt der durch Bewegung von Curven und Flächen erzeugten Flächen- und Raumgrößen. Arch. Math. Phys. (2) **13**, 225—262, 337—386, 1894.
X. Antomari, Application de la méthode cinématique à l'étude des surfaces réglées. Mouvement d'un corps solide assujetti à cinq conditions. Paris 1894. 113 S. 4⁰.
R. de Saussure, Étude de géométrie cinématique réglée. Amer. J. math. **18**, 304—346, 1896. — Sur une géométrie de l'espace réglée. C. R. **123**, 734 bis 737, 1896.
M. Disteli, Über Rollkurven und Rollflächen. Ztschr. Math. Phys. **43**, 1—35, 1898; **46**, 134—181, 1901.

§ 4. Bewegungsmechanismen.

A. v. Braunmühl, Historische Studie über die organische Erzeugung ebener Curven von den ältesten Zeiten bis zum Ende des 18. Jahrhunderts. Katalog mathem.-phys. Modelle, Apparate und Instrumente. Hersg. von W. Dyck. München 1892, 54—88.
A. Amsler, Über mechanische Integrationen. Dycks Katalog 1892, 99—124.
W. v. Dyck, Kinematische Modelle und Apparate, zugleich mit Bezug auf die Anwendungen in der Praxis. Dycks Katalog 1892, 315—359.
A. Cayley, Three-bar motion. Proc. Lond. Math. Soc. **7**, 136—166, 1876.
L. Burmester, Über die Geradführung durch das Kurbelgetriebe. Civiling. (2) **22**. 1877.
O. Keßler, Kaustische Linien in kinematischer Behandlung. Ztschr. Math. Phys. **23**, 1—34, 1878.
A. Amsler, Über den Flächeninhalt und das Volumen durch Bewegung erzeugter Curven und Flächen und mechanische Integrationen. Schaffhausen 1881.
V. Liguine, Sur les systèmes articulés de MM. Peaucellier, Hart et Kempe. Nouv. Ann. (3) **1**, 153—163, 1882.
H. Léauté, Sur une famille de courbe, que l'on rencontre dans les machines. Journ. Éc. Polyt. cah. **53**, 59—79, 1883.
M. Grübler, Allgemeine Eigenschaften der zwangläufigen ebenen kinematischen Ketten. Civiling. (2) **29**, 167—200, 1883.
O. de Lacolonge, Théorie du parallélogramme de Watt. Mém. Soc. Bord. (3) **2**, 101—137, 1885.
E. Cavalli, Le ovali di Cartesio considerate dal punto di vista cinematico. Atti Acc. Torino **20**, 1143—1165, 1885.
F. Dingeldey, Über die Erzeugung von Curven vierter Ordnung durch Bewegungsmechanismen. Diss. Leipzig 1885. VIII u. 64. 6 Tfl.
J. Neuberg, Systèmes de tiges articulées. Trace mécanique des lignes. Paris 1886. — Sur les quadrilatères articulés. Verh. Nederl. natuurk. Congres **5**, 255—267, 1895.

T. A. Hearson, The kinematics of machines. Phil. Trans. Lond. **187** A, 15 bis 40, 1896.
F. Masi, La teoria dei meccanismi. Bologna 1897. 384 S. 8⁰.
Fr. Schilling, Über neue kinematische Modelle, sowie eine neue Einführung in die Theorie der cyklischen Curven. Halle 1899. 15 S. 2 Tfl. Frz. L'Enseign. math. **2**, 31—48, 1900.
Fr. Schilling, Die Bewegung in der Ebene als Berührungstransformation. Ztschr. Math. Phys. **54**, 281—317, 337—364, 1906.
J. H. Barr, Kinematics of machinery; a brief treatise on constrained motions of machine elements. New York 1899. v u. 247. 8⁰.
E. Delassus, Sur les systèmes articulés gauches. Ann. Éc. Norm. (3) **17**, 445 bis 499, 1900; ib. (3) **19**, 119—152, 1902.
D. Tessari, La costruzione degli ingranaggi. Torino 1902. xvi u. 226.
R. J. Durley, Kinematics of machines. New York, London 1903. viii u. 379. 8⁰.
A. Emch, Kinematische Gelenksysteme und die durch sie erzeugten geometrischen Transformationen. Mit Anwendungen. Pr. Solothurn 1907. 66 S.



Nachträge und Verbesserungen.

S. 3 Z. 14 v. u. Geschichte. Inzwischen erschien:

M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Bd. IV, 1908. VI u. 1113. (Darin S. Günther, Geschichte der Mathematik, S. 1—36; F. Cajori, Arithmetik, Algebra, Zahlentheorie, 37—198; E. Netto, Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Reihen, Imaginäres, 199—318; V. Bobynin, Elementare Geometrie, 319—402; A. v. Braunmühl, Trigonometrie, Polygonometrie, 403—450; V. Kommerell, Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes, 451—576; G. Loria, Perspektive und darstellende Geometrie, 577—637; G. Vivanti, Infinitesimalrechnung, 639—869; C. R. Wallner, Totale und partielle Differentialgleichungen, Differenzen- und Summenreihen, Variationsrechnung, 871—1074; M. Cantor, Überblick über die Zeit von 1758 bis 1799, 1075—1096.)

S. 3. **G. L. Arrighi,** La storia della matematica in relazione con lo sviluppo del pensiero. Torino 1905. XIII u. 15 u. 133.

S 4. Schluß des § 4. **W. Ahrens,** Scherz und Ernst in der Mathematik. Geflügelte und ungeflügelte Worte. Leipzig 1904. x u. 522.

S. 5. **S. Günther,** Geschichte der Mathematik. I. T. Von den ältesten Zeiten bis Cartesius. Samml. Schubert. Leipzig 1908. XII u. 415 S.

F. Rudio, Der Bericht des Simplicius über die Quadratur des Antiphon und des Hippokrates. Griechisch und deutsch. Mit einem historischen Erläuterungsberichte als Einleitung. Im Anhange ergänzende Urkunden, verbunden durch eine Übersicht über die Geschichte des Problems von der Kreisquadratur vor Euklid. Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Altertum. Heft I. Leipzig 1907. x u. 184.

S. 8 § 2. **Felix Müller,** Gedenktagebuch für Mathematiker. B. G. Teubners Verlags-Katalog 101. 1908. 52 S. (Mehr als 2500 Daten aus der Geschichte der Mathematik, besonders Geburts- und Todestage von Mathematikern; mit Namenregister.)

S. 12. Biographisches.

G. Mittag-Leffler, Niels Henrik Abel. Paris 1907. 68 S. 8°.

F. Rudio, Friedrich Hultsch. Bibl. math. (3) **8**, 325—402, 1908.

S. 14 § 2. Klassikerausgaben. **An. M. T. Sev. Boetii** De institutione arithmetica libri duo, de institutione musica libri quinque. Accedit geometria quae fertur Boetii. Ed. G. Friedlein. Leipzig 1867. VIII u. 492.

Firmici Materni, Julii, Matheseos libri VIII. Rec. C. Sittl. Pars I (einz.), libri I—IV. Leipzig 1894. XVI u. 246. — Matheseos libri VIII. Ed. W. Kroll et F. Skutsch. Fasciculus prior libri IV priores et quinti prooemium continens. Leipzig 1897. XII u. 280.

Heronis Alexandrini Opera quae supersunt omnia I. Ed. W. Schmidt. Leipzig 1899. LXXII u. 514. Suppl. 1899. 182 S. II, 1. Ed. L. Nix et W. Schmidt. 1900. XII u. 415. III. Ed. H. Schöne. 1903. XXI u. 366.

Hipparchi in Arati et Eudoxi Phaenomena commentariorum libri tres. Ed. Carolus Manitius. Leipzig 1894. XXXIV u. 376.

Jamblichi De communi mathematica scientia liber. Ed. Nic. Festa. Leipzig 1891. x u. 153. — In Nicomachi arithmeticam introductionem liber. Ed. Hermenegildus Pistelli. Leipzig 1894. ix u. 195.
Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentarii. Ex rec. G. Friedlein. Leipzig 1873. viii u. 507.
S. 19 Z. 12 v. u. lies Hermite statt Kermite.
P. Stäckel und **W. Ahrens,** Der Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und P. H. von Fuß über die Herausgabe der Werke Leonhard Eulers. Bibl. math. (3) 8, 233—306, 1908. Erweitert, mit einem Abdruck der Fußschen Liste der Eulerschen Werke. Leipzig 1908. viii u. 184.
S. 20 Z. 30 v. o. lies J. J. Sylvester statt J. S. Sylvester.
S. 24 Z. 1 v. u. lies H. Graßmann statt U. Graßmann.
S. 25 Z. 13 v. o. lies Brioschi statt Briochi.

S. 46. Formelsammlungen. Modelle.
O. Th. Bürklen, 3. Aufl. 1904. 227 S.
Herm. Wiener, Abhandlungen zur Sammlung mathematischer Modelle. I. Bd. 1. Heft. Leipzig 1907. 91 S.

S. 47. Kompendien der Elementar-Mathematik.
K. Schwering, Handbuch der Elementarmathematik für Lehrer. Leipzig 1907. viii u. 408.
B. Sellenthin, Mathematischer Leitfaden mit besonderer Berücksichtigung der Navigation. Leipzig 1902. xi u. 459.
S. 49 Z. 18 v. o. lies Plašil statt Plšail.
S. 55 Z. 25 v. o. lies F. Enriques statt E. Enriquez.
S. 58 Z. 6 v. o. lies Grüson statt Gruson.

S. 58. Algebra.
C. Runge, Praxis der Gleichungen. Samml. Schubert. Leipzig 1900. iii u. 196. (Kurze Behandlung mit praktischen Anwendungen.)
G. Bauer, Vorlesungen über Algebra. Hrsg. vom Mathem. Verein München. Leipzig 1903. vi u. 376.

S. 59. Algebraische Gleichungen.
S. Bring, On the transformation of algebraic equations. Transl. from the Latin and annotated by F. Cajori. Public. Colorado College (Gen. series). **31,** 65—91, 1907.
B. Bolzano, Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege. Abh. Böhm. Ges. 1817. Ostw. Klass. Nr. 153. Leipzig.
S. 60 Z. 17 v. u. **Ch. Sturm,** Abhandlung über die Auflösung der numerischen Gleichungen (1835). Dtsch. von Löwy. Ostw. Klass. Nr. 143. Leipzig 1904. 66 S.
S. 60 Z. 4 v. u. **Fourier,** Die Auflösung der bestimmten Gleichungen. Ostw. Klass. Nr. 127. iv u. 262.
S. 62 Z. 16 v. o. lies Diekmann statt Dieckmann.
Z. 18 v. o. lies S. Gundelfinger statt A. Gundelfinger.

S. 67. Algebraische Formen.
W. Scheibner, Beiträge zur Theorie der linearen Transformationen als Einleitung in die algebraische Invariantentheorie. Leipzig 1908. 250 S.

S. 67. Niedere Arithmetik.
L. Jordan, Materialien zur Geschichte der arabischen Zahlzeichen in Frankreich. Arch. f. Kulturgesch. Berlin **3,** 155—195, 1905.
S. 74 Z. 1 v. o. lies Mazères statt Mazère.

S. 76. Höhere Arithmetik.
A. Aubry, L'arithmétique avant Fermat. (Erster Abschnitt der Abhandlung: Étude élémentaire sur le théorème de Fermat.) L'Enseign. math. **9,** 417—433, 1907.

S. 78. **V. v. Dantscher,** Vorlesungen über die Weierstraßsche Theorie der irrationalen Zahlen. Leipzig 1908. VI u. 79.
S. 78 Z. 27 v. o. lies H. Minkowski statt U. Minkowski.
S. 79. **G. Lejeune-Dirichlet,** Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres. Journ. f. Math. **19**, 324—369, 1839; **21**, 1—12, 134—155, 1840. — Dtsch. Untersuchungen über verschiedene Anwendungen der Infinitesimal-Analysis auf die Zahlentheorie, (1839—40), hrsg. von R. Haußner. Ostw. Klass. Nr. 91. Leipzig 1897. 128 S.
S. 80 Z. 22 v. o. lies Erh. Weigel statt Erk. Weigel.
S. 81 Z. 6. **Diophantus von Alexandria,** Arithmetik und die Schrift über Polygonalzahlen. Übers. von G. Wertheim. Leipzig 1890. X u. 346.

S. 88. Wahrscheinlichkeit.
E. Blaschke, Vorlesungen über mathematische Statistik. Die Lehre von den statistischen Maßzahlen. Leipzig 1906. VIII u. 268.
S. 89 Z. 17 v. o. **Helmert,** Ausgleichungsrechnung. 2. Aufl. 1907. XVIII u. 578.
S. 89. **W. Weitbrecht,** Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Leipzig, Göschen 1906. 180 S. kl. 8°.

S. 92. Interpolation.
S. Mauderli, Die Interpolation und ihre Verwendung bei der Benutzung und Herstellung mathematischer Tabellen. Solothurn 1906. 144 S. 8°.

S. 93. Kettenbrüche.
E. Wölffing, Wer hat über Kettenbrüche gearbeitet? Math. naturw. Mitt. (2) **10**, 18—32, 1908.
S. 95 Z. 4 v. o. lies Michelsen statt Michelson.
S. 95 Z. 34 v. o. lies Ch. Sturm statt M. Sturm.

S. 96. Infinitesimalrechnung.
E. Czuber, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Leipzig. 2. Aufl. 1906. I. XIV u. 560. II. VIII u. 532.
G. Kowalewski, Einführung in die Infinitesimalrechnung mit einer historischen Übersicht. Leipzig 1908. IV u. 126.
S. 96 Z. 16 v. u. **Sohncke,** Sammlung. II. 6. Aufl. Jena 1906.
S. 100 Z. 11 v. o. **G. Petit-Bois,** Tables d'intégrales indéfinies. Paris 1906. XII u. 159.

S. 110. Funktionentheorie.
S. 110 Z. 13 v. u. lies H. Durège statt G. Durège.
Z. 10 v. v. **H. Durège,** Elemente. 5. Aufl. von L. Maurer. 1906. X u. 397.
S. 110. **L. Kronecker,** Über die Zeit und die Art der Entstehung der Jacobischen Thetaformeln. Ber. Ak. Berlin 1891, 653—659 u. Journ. f. Math. **108**, 325—334. 1891.
S. 111 Z. 20 v. o. **G. Vivanti,** Lezioni. Dtsch. bearb.: Theorie der analytischen Funktionen. Von A. Gutzmer. Leipzig 1906. VI u. 512.
S. 111. **W. F. Osgood,** Lehrbuch der Funktionentheorie. I. Bd. Leipzig 1907. XII u. 642.
S. 112. **P. Appell,** Développements en séries trigonométriques de certaines fonctions périodiques vérifiant l'équation $\Delta F = 0$. J. de math. (4) **3**, 5—52, 1887. (Literaturangaben.)
S. 113. **G. Vivanti,** Elementi della teoria delle funzioni poliedriche e modulari. Milano, Hoepli. 1906. VIII u. 433.
S. 114 Z. 23 v. o. lies E. Study statt F. Study.
S. 121 Z. 3 v. o. lies P. Appell statt C. Appell.
S. 122 Z. 4 v. u. lies Ch. Briot et J. C. Bouquet statt M. Briot et M. Bouquet.

S. 132. Prinzipien der Geometrie.
H. v. Mangoldt, Die Begriffe „Linie“ und „Fläche“. Encykl. d. math. Wiss. III AB 2, 130—152. 1906.

F. Enriques, Prinzipien der Geometrie. Encykl. d. math. Wiss. III A, B, 1. S. 1—129. Leipzig 1907.

S. 140. Elementare Geometrie.

H. C. E. Martus, Mathematische Aufgaben zum Gebrauche in den obersten Klassen höherer Lehranstalten. Aus den bei Reifeprüfungen an deutschen höheren Schulen gestellten Aufgaben ausgewählt und mit Hinzufügung der Ergebnisse zu einem Übungsbuche vereinigt. I. T. Aufgaben. 8. Aufl. Leipzig 1890. xvi u. 204. II. T. Ergebnisse. 7. Aufl. 1891. 289 S. 10. Aufl. 1897. Teilweise auch 1901 und 1904.

S. 140. **A. Adler,** Theorie der geometrischen Konstruktionen. Samml. Schubert. Leipzig 1906. viii u. 301.

S. 146. **H. Brandes,** Über die axiomatische Einfachheit mit besonderer Berücksichtigung der auf Addition beruhenden Zerlegungsbeweise des Pythagoräischen Lehrsatzes. Diss. Halle. Braunschweig 1908.

S. 149 Z. 16 v. u. lies G. S. Klügel statt G. L. Klügel.

S. 150. Trigonometrie.

Opus Palatinum (1596). Sinus und Cosinus-Tafeln von 10″ zu 10″. Hrsg. von W. Jordan. Hannover u. Leipzig 1897. vii u. 270.

Joannis Verneri, De triangulis sphaericis libri quatuor. Ed. A. Björnbo. Leipzig 1907. (2) u. 184 u. 12 S. Faksimile.

S. 151. **F. Bohnert,** Ebene und spärische Trigonometrie. Samml. Schubert 2. Aufl. Leipzig 1906. viii u. 167.

S. Günther, Astronomische Geographie. Leipzig, Göschen. Neudruck 1905. 156 S. kl. 8°.

S. 154. Praktische Geometrie.

C. Reinhertz, Geodäsie. Leipzig, Göschen. Neudruck 1907. 181 S. kl. 8°.

O. Eggert, Einführung in die Geodäsie. Leipzig 1907. x u. 437.

S. 155. Analysis situs.

B. Riemann, Lehrsätze aus der Analysis situs für die Theorie der Integrale von zweigliedrigen vollständigen Differentialen. Journ. f. Math. **54**, 105—110, 1857.

M. Dehn und **P. Heegaard,** Analysis situs. Encykl. d. math. Wiss. III AB 3, 153—220. 1907.

S. 158—159. Stereometrie.

Kepler, Stereometria doliorum. Übers. u. hrsg. von R. Kluge. Ostw. Klass. Nr. 165. Leipzig 1908. 130 S.

F. Bohnert, Elementare Stereometrie. Samml. Schubert. Leipzig 1902. vii u. 183.

S. 161. Darstellende Geometrie.

K. Rohn und **E. Papperitz,** Lehrbuch. 3. Aufl. 3 Bde. 1906. xx u. 476. vi u. 194. x u. 334.

S. 162. **R. Haußner,** Darstellende Geometrie. I. T. Elemente; ebenflächige Gebilde. Leipzig, Göschen. 2. Aufl. 1904. 207 S. kl. 8°.

S. 163. **S. Finsterwalder,** Photogrammetrie. Encykl. d. math. Wiss. VI, **1**, 2. S. 98—116. 1905.

S. 166. **Ad. Hochheim,** Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. Heft I. 3. Aufl. von Frz. Hochheim. Leipzig 1904. A. vi u. 98. B. 128. Heft II. A. 3. Aufl. von Ad. u. Frz. Hochheim. 1906. iv u. 90. B. 2. Aufl. 1899. 96 S. Heft III. 1886. A. 66 S. B. 94 S.

S. 167. **O. Th. Bürklen,** Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie der Ebene. Leipzig, Göschen. 1905. 196 S. kl. 8°. — Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie des Raumes. ib. 1906. 98 S. kl. 8°.

S. 171 Z. 16 v. o. lies Balbin statt Babin.

S. 172. Synthetische Geometrie.

P. Schafheitlin, Synthetische Geometrie der Kegelschnitte. Für die Prima höherer Lehranstalten bearbeitet. Leipzig 1907. vi u. 96.

S. 176. Differentialgeometrie.

E. J. Wilczynski, Projective differential geometry of curves and ruled surfaces. Leipzig 1906. VIII u. 298.

S. 183 Z. 11 v. o. lies A. Milinnwski statt H. Milinowski.

S. 191. Flächentheorie.

G. Darboux, Sur les relations entre les groupes de points, de cercles et de sphères dans le plan et dans l'espace. Ann. Éc. Norm. (2) **1**, 323—392, 1872.

G. Frobenius, Anwendungen der Determinantentheorie auf die Geometrie des Maaßes. Journ. f. Math. **79**, 185—247, 1874.

S. 196. Flächen zweiten Grades.

R. Heger, Analytische Geometrie auf der Kugel. Samml. Schubert. Leipzig 1908. VIII u. 152.

S. 201. Minimalflächen.

R. Lipschitz, Ausdehnung der Theorie der Minimalflächen. Journ. f. Math. **78**, 1—45, 1874.

S. 209. Geometrische Optik.

Joh. Kepler, Dioptrik (Augsburg 1611). Übers. u. hrsg. von Ferd. Plehn. Ostw. Klass. N. 144. Leipzig 1904. 114 S.

Ch. Huygens, Abhandlung über das Licht (1678). Hrsg. von E. Lommel. 2. Aufl. von A. v. Oettingen. Ostw. Klass. Nr. 20. Leipzig 1903. 115 S.

Is. Newton, Optik (1704). Übers. u. hrsg. von W. Abendroth. I. Buch. Ostw. Klass. Nr. 96. Leipzig 1898. 132 S. II. u. III. Buch ib. Nr. 97. 156 S.

S. 210. **J. Classen,** Mathematische Optik. Samml. Schubert. Leipzig 1901. X u. 207.

S. 216. Transformation.

K. Doehlemann, Geometrische Transformation. I. Die projektiven Transformationen nebst ihren Anwendungen. Samml. Schubert. Leipzig 1902. VII u. 322. II. Die quadratischen und höheren birationalen Punkttransformationen. ib. 1908. VIII u. 328.

Sachregister.

Die eckigen Klammern verweisen auf die einschlägige Disziplin.

Namenregister.